FINANCIJSKI VREMENSKI NIZOVI

INDEXI BURZE, CIJENE ZLATA, TEČAJNE LISTE

DNEVNO ZAPISIVANJE CIJENA

skupljanjem npr. dnevnih cijena — vremenski niz

iz niza odredimo proces

KARAKTERISTIKA — napredvidljivost (nedeterminiranost)

Problem: da li promatranjem cijena možemo predvidjeti buduće cijene?

ODREDJIVANJE DINAMIKE: primjenom statistike

JEDINO MOŽEMO GOVORITI U TERMINIMA VJEROJATNOSTI

process: linearan — nelinearan proces ???

RIZIK — ST. DEVIJACIJA — VAŽNOST PREDVIDJANJA ST DEV.

ZNAČAJKE DINAMIKE CIJENA DIONICA

postojanje trendova

precizno predvidjanje nemoguće

dva se pitanja nameću

1) da li je cijena sutra današnja + ocijena dnevnog porasta?

2) da li izmjenom pozicije na tržištu možemo zaraditi — neprestano kupujući i prodajući isti proizvod??

hipoteza slučajnog koraka i efikasnog tržišta

1) da li trebamo poznavati prošle cijene?

koliko daleko u prošlost?

hipoteza slučajnog koraka tvrdi da su promjene cijena nepredvidljive poput slučajnog šetača.

statističko tumačenje: Bachelier (1900) — ΔS su neovisne i identične normalne PDF

Fama (1965) odbacuje normalnost distribucije

Granger (1970) odbacuje i identičnost distribucija

HIPOTEZA PODRAZUMJEVA CONST. ΔS I NEKORELIRANOST: VRIJEDI ZA VELIKA TRŽIŠTA

2) TRENUTNA VRIJEDNOST SADRŽI SVE INFORMACIJE O PROŠLOSTI

ANALIZOM OBLIKA KRETANJA DIONICA NE MOŽEMO SE OBOGATITI

DNEVNI PRINOSI

analiza cijene dionica S — nestacionarnost i umjetna koreliranost. ΔS se analiziraju, e.g. closing pricess

$$x_t = S_t + d_t - S_{t-1} \tag{1}$$

$$R_t = log(S_t + d_t) - log(S_{t-1}) \tag{2}$$

$$R'_t = (S_t + d_t - S_{t-1})/S_{t-1} \tag{3}$$

1) varijance rastu

2) i 3) praktički ekvivalentni

razlike:

$$R_{2t} = R_t + R_{t+1} \tag{4}$$

$$R'_{2t} = R'_t + R'_{t+1} + R'_t * R'_{t+1} \tag{5}$$

KARAKTERISTIKE MODELA

VREMENSKI NIZOVI MODELA I CIJENE IDENTIČNI

STATISTIČKA SVOJSTVA CIJENA (VARIJANCA ...)

JEDNOSTAVAN (BROJ PARAMETARA)

POSTOJANJE DISTRIBUCIJE U ANALITIČKOM OBLIKU

PRIMJER: WIENER PROCES (BLACK SCHOLES)

MODELI ZA OPIS DINAMIKE CIJENA DIONICA

stohastički proces, diskretan (kontinuiran) u vremenu, diskretna (kontinuirana) varijabla

Markovljev proces – samo danas odredjuje sutra

predikcije u terminima vjerojatnosti

Markovljev proces u suglasju sa slabom formom tzv. tržišne učinkovitosti — nemoguće je iz kretanja cijene zaključiti o cijeni sutra

WIENEROV PROCES ili Brownovo gibanje:

svojstvo 1)

$$\Delta S = \epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{6}$$

svojstvo 2)

ΔS za različita vremena neovisna

za Δt slijedi

$$< \Delta S = 0 > \qquad \sigma^2 = \Delta t \tag{7}$$

Nakon vremena $T = N\Delta t$

$$S(T) - S(0) = \Sigma_{n=1}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{8}$$

Varijanca, očekivanje $S(T) - S(0) =$????

ZA NORMALNE PROCESE VARIJANCE ADITIVNE

POOPćENI WIENEROV PROCES (DETERMINIZAM + STOHASTIKA):

$$\Delta S = a\ dt + b\ \epsilon \sqrt{\Delta t} \tag{9}$$

a i b — očekivanje i varijanca u jedinici vremena

$$\Delta S = a\ dt \tag{10}$$

$$S = S_0 + a\ t \tag{11}$$

Varijanca, očekivanje ΔS ???????

Varijanca, očekivanje $S(T) - S(0) =$????

ITOV PROCES:

$$dS = a(S,t)\ dt + b(S,t)\epsilon \sqrt{\Delta t} \tag{12}$$

PROBLEMI:

OČEKIVANI PRIRAST I RIZIK OVISE O TRENUTNOJ VRIJEDNOSTI CIJENE

$$\Delta S/S_0 = a\ \Delta t/S_0 \tag{13}$$

NAJKORIŠTENIJI MODEL ZA OPIS DINAMIKE CIJENA:

$$\Delta S = \mu\ S\ \Delta t + \sigma\ S\ \epsilon\ \sqrt{\Delta t} \tag{14}$$

MONTE CARLO SIMULACIJE:

STACIONARNI ARMA PROCESI

OČEKIVANJA $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_T\}$

i.i.d.

$\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_T\}$

$\epsilon_t \quad izN(0, \sigma^2)$

$\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = \{..., y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...\}$

I KOMPJUTORA

$\{y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, ..., y_t^{(I)}\}$

uzorak I realizacija varijable Y

bezuvjetna gustoća $f(y_t)$

OČEKIVANJE (SREDNJA VRIJEDNOST) VARIJABLE Y_t

$$E(Y_t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_t f(y_t) dy_t \tag{15}$$

$$E(Y_t) = lim_{I \to \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} Y_t^{(i)} \tag{16}$$

primjer

a)

$$Y_t = \mu + \epsilon_t \tag{17}$$

$$E(Y_t) = \mu \tag{18}$$

b)

$$Y_t = \beta\ t + \epsilon_t \tag{19}$$

$$E(Y_t) = \beta\ t \tag{20}$$

$$\sigma^2 = \gamma_{0t} = E(Y_t - \mu_t)^2 = \int (y_t - \mu_t)^2 f(y_t) dy_t \tag{21}$$

AUTOKOVARIJANCA

(drugi moment varijable Y)

$$\gamma_{j\ \ t} = E(Y_t - \mu_t)(Y_{t-j} - \mu_{t-j}) \tag{22}$$

struktura autokovarijance kao u kovarijance

$$Cov(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \tag{23}$$

$$\gamma_{j\ t} = lim_{I \to \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} (Y_t^{(i)} - \mu_t)(Y_{t-j}^{(i)} - \mu_{t-j}) \tag{24}$$

KOVARIJANTNA STACIONARNOST ILI SLABA KOVARIJANTNOST

slabo STACIONARAN — ni μ_t ni $\gamma_{j\ t}$ ne ovise o vremenu

$$E(Y_t) = \mu \tag{25}$$

$$E(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu) = \gamma_j \tag{26}$$

slijedi $\gamma_j = \gamma_{-j}$

STRIKTNA STACIONARNOST, JOINT DISTRIBUCIJA OD $(Y_t, Y_{t+j_1}, ..., Y_{t+j_n})$ NE OVISI O VREMENU T

ERGODIČNOST

srednja vrijednost (vremenskog) uzorka

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} y_t^1 \tag{27}$$

veza s srednjom vrijednošću uzorka preko pojma ergodičnosti prvog momenta Ako je Y_t stacionaran Gaussov process uvjet ergodičnosti za sve momente je

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| < \infty \tag{28}$$

Kovarijantno stacionaran proces je ergodičan u prvom momentu ako vrijedi

$$E(Y_t) = lim_{T\to\infty} 1/T \sum_i y_t \tag{29}$$

BIJELI ŠUM

$$E(\epsilon_t) = 0 \tag{30}$$

$$E(\epsilon_t^2) = \sigma^2 \tag{31}$$

$$E(\epsilon_t \epsilon_\tau) = 0 \tag{32}$$

striktni bijeli šum —- ϵ_t i ϵ_τ neovisni.

KORELACIJSKI PROCESI — AR i MA

MOVING AVERAGE (MA) PROCESS

MA(1)

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} \tag{33}$$

očekivanje i varijanca Y_t

$$E(Y_t) = \mu \tag{34}$$

$$E(Y_t - \mu)^2 = (1 + \theta^2)\sigma^2 \tag{35}$$

$$E(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu) = \theta\sigma^2 \tag{36}$$

Ako je ϵ Gaussov bijeli šum, MA(1) je ergodičan za sve momente (konačan broj kovarijanci)

j-ta autokorelacija $\rho_j = \gamma_j/\gamma_0$

AUTOKORELACIJA ρ_j je mjera korelacije ili veze izmedju Y_t i Y_{t-j} — koliko dugo se utjecaju pamte

za MA(1)

$$\rho_1 = \frac{\theta\sigma^2}{(1 + \theta^2)\sigma^2} \tag{37}$$

MA(q) proces

$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + ...\theta_q\epsilon_{t-q}$

MA(2)

neičezavajuće autokovarijance

$$\gamma_1 = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2 \tag{38}$$

$$\gamma_2 = \theta_2\sigma^2 \tag{39}$$

ergodičan u prvom momentu

ako je ϵ Gaussov process MA(2) ergodičan u svim momentima

AUTOREGRESIVNI PROCES

AR(1)

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \tag{40}$$

iteracija

uvjet za slabu stacionarnost $|\phi| < 1$

iteracijom kao $MA(\infty)$

$$Y_t = c(1 + \phi + \phi^2 + ...) + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + ... \tag{41}$$

$$E(Y_t) = c + \phi E(Y_{t-1}) \rightarrow \mu = c + \phi\mu \tag{42}$$

varijanca

$$\gamma_0 = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2/(1 - \phi^2) \tag{43}$$

j-ta autokovarijanca

$$\gamma_j = E(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu) = \phi^j(1 + \phi^2 + \phi^4 + ...)\sigma^2 \tag{44}$$

$$\rho_j = \gamma_j/\gamma_0 = \phi^j \tag{45}$$

geometrijski red za autokorelacijsku funkciju

utjecaj parametra ϕ na korelaciju

ARMA PROCESI

LAG OPERATORI — operator vremenskog pomaka?

OPERATOR VREMENSKOG NIZA — preslikava jedan niz u drugi

multiplikativni operator — $y_t = \beta x_t$

operator zbrajanja — $y_t = x_t + z_t$

OPERATOR POMAKA U VREMENU

$y_t = x_{t-1}$

$Lx_t = x_{t-1}$

$L^k x_t = x_{t-k}$

zadovoljava ista algebarska pravila kao multiplikativni operator

$y_t = (aL + bL)Lx_t$

$y_t = ax_{t-1} + bx_{t-2}$

$aL + bL^2$ — operatorski polinom

PRIMJENA:

AR(2) process

$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$

$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)y_t = c + \epsilon_t$

uvjet stabilnosti jednadžbe diferencija:

$(1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2) = 0$

korijeni izvan jedinične kružnice

AR(2) — proces kovarijantno stacionaran

$(1 - \lambda_1 L)^{-1} = 1 + \lambda_1^1 L + \lambda_1^2 + ...$

$(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) y_t = \epsilon_t$

$y_t = (1 - \lambda_1 L)^{-1} (1 - \lambda_2 L)^{-1} \epsilon_t$

$(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \{ \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 L} - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2 L} \}$

$y_t = \{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 + \lambda_1 L + ...) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (1 + \lambda_2 L + ...) \} \epsilon_t$

računanje očekivanja

pretpostavimo stacionarnost

$E(Y_t) = c + \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2}) + E(\epsilon_t)$

$\mu = c + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu$

$(Y_t - \mu) = \phi_1 (Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t$

pomnožimo s Y_{t-j}

$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2}, \ j = 1, 2, ...$

struktura jednadžbe kao u procesa AR(2)

autokorelacije

$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \rho_{j-2} \ j = 1, 2, ...$

$j = 1 \quad \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$

$j = 2 \quad \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$

varijanca:

$E(Y_t - \mu)^2 = \phi_1 E(Y_{t-1} - \mu)(Y_t - \mu) + \phi_2 E(Y_{t-2} - \mu)(Y_t - \mu) + E(\epsilon_t)(Y_t - \mu)$

$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2$

$\gamma_0 = \phi_1 \rho_1 \gamma_0 + \phi_2 \rho_2 \gamma_0 + \sigma^2$

$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1-\phi_2)((1-\phi_2)^2 - \phi_1^2)}$

FUNKCIJA IZVODNICE AUTOKOVARIJANCI

svani process Y_t prati niz autokovarijanci $\{\gamma_j\}$

ako je $\Sigma_j|\gamma_j| < \infty$

$$g_Y(z) = \Sigma_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_j z^j \tag{46}$$

ako z leži na jediničnoj kružnici

POPULACIJSKI SPEKTAR PROCESA Y

$$s_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\Sigma_i\gamma_j \exp(-i\omega j) \tag{47}$$

MA(1) proces:

$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} = c + (1+\theta L)\epsilon$

$g_Y(z) = \theta\sigma^2 z^{-1} + ((1+\theta^2)\sigma^2)z^0 + \theta\sigma^2 z^1 = \sigma^2(1+\theta z)(1+\theta z^{-1})$

$MA(q)$ proces:

$Y_t = \mu + (1 + \theta_1 L + ... + \theta_q L^q)\epsilon_t$

$g_Y(z) = \sigma^2(1+\theta_1 L + ...\theta_q z^q)(1+\theta_1 z^{-1} + ... + \theta_q z^{-q})$

MA(∞) proces:

$Y_t = \mu + \psi(L)\epsilon_t$

$g_Y(z) = \sigma^2\psi(z)\psi(z^{-1})$

AR(1)

$Y_t - \mu = (1-\phi L)^{-1}\epsilon_t$

METODA MAKSIMALNE VJERODOSTOJNOSTI

služi za procjenu parametara procesa

1. korak: odredjivanje funkcije vjerodostojnosti.

2.korak: traženje parametara za koje je vjerojatnost najveća

$L = L(\theta, X_1, X_2, ..., X_n)$

MLE od θ je θ koji maksimizira L

DISKRETN VARIJABLA:

geometrijska distribucija $p = (1-\theta)\theta^X$

$L = P(X_1)P(X_2)P(X_n)$

$log(L) = nln(1-\theta) + ln(\theta)\Sigma X_i$

$log(L)' = 0$

$\tilde{\theta} = \frac{\tilde{X}}{1+\tilde{X}}$

KONTINUIRANA VARIJABLA

Gaussova:

$ln(L) = \Sigma_i ln(P(X_i))$

$ln(L) = -0.5nln(2\pi) - 0.5n\sigma^2$

$-0.5(1/\sigma^2)\Sigma_i(X_i-\mu)^2$

$\frac{\partial ln(L)}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial ln(L)}{\partial \mu} = 0$

$\tilde{\mu} = \Sigma X_i/n$

$\tilde{\sigma}^2 = 1/n\Sigma_i(X_i-\tilde{\mu})^2$

problemi: nelinearnosti, vezane jednadžbe, numeričke metode

ARMA(p,q)

$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t + ... + \phi_q \epsilon_{t-q}$ ϵ je bijeli šum

Neka je $\theta \equiv (c, \phi_i, \theta_i, \sigma^2)'$ vektor populacijskih parametara

uzorak T elemenata $(y_1, .., y_T)$

AR(1)

$\theta \equiv (c, \phi, \sigma^2)$

kolika je vjerojatnost prvog elementa?

pogledajmo očekivanja AR(1) procesa

ako je ϵ_t Gaussova i Y_t je Gaussova

gustoća vjerojatnosti prve varijable:

$f_{Y_1}(y_1;\theta) \propto \frac{1}{E(Y_1-\mu)^2}\exp(-\frac{[y_1-E(Y_1)]^2}{2E(Y_1-\mu)^2})$

distribucija druge varijable? kondicijalno na prvu

$Y_2 = c + \phi Y_1 + \epsilon_2$

Y_2 iz $N(c + \phi y_1, \sigma^2)$

zajednička gustoća distribucije za uzorak od T elemenata

$f(y_i;\theta) = f(y_1,\theta)\Pi_{i=1}^T f(y_t|y_{t-1;\theta})$

$\mathcal{L} = lnf(y_1;\theta) + \Sigma_i lnf(y_t|y_{t-1};\theta)$

KONDICIONALNA PROCJENA MAKSIMALNE VJERODOSTOJNOSTI

pojednostavljenje

prva se varijabla tretira kao deterministička

$$lnf(y_t, ..., y_2|y_1;\theta) = \tag{48}$$

$$-((T-1)/2)(ln(2\pi) + ln\sigma^2) - \tag{49}$$

$$\Sigma_{t=2}^T \frac{(y_t - c - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \tag{50}$$

maksimizacija c i ϕ ekvivalentna minimizaciji

$\Sigma_{t=2}(y_t - c - \phi y_{t-1})^2$

procjena varijance

$\tilde{\sigma}^2 = \Sigma_{t=2}^T \frac{(y_t - \tilde{c} - \tilde{\phi} y_{t-1})^2}{T-1}$

PROCJENA MAKSIMALNE VJERODOSTOJNOSTI

MA(1) kao i kod AR(1), izračun jednostavniji za MA(1) ako uvjetujemo početne vrijednosti ϵ

$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$

ϵ_t iz $N(0, \sigma^2)$

Neka $\theta = (\mu, \theta, \sigma^2)$ označuje populacijske parametre koje procjenjujemo. Ako ϵ_{t-1} poznajemo (nije slučajan)

$Y_t|\epsilon_{t-1} \;\; N((\mu + \theta\epsilon_{t-1}), \sigma^2)$

$f(y_t|\epsilon_{t-1};\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(y_t-\mu-\theta\epsilon_{t-1})^2}{2\sigma^2})$

Neka je $\epsilon_0 = 0$. Kako je niz $\{y_t\}$ poznat, vrijedi

$\epsilon_1 = y_1 - \mu$

UOČIMO DA U PROCEDURI μ PROCIJENJUJEMO

nastavimo li proceduru, iz $\epsilon_0 = 0$ slijedi iteracijom niz $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_T\}$

$\epsilon_t = y_t - \mu - \theta\epsilon_{t-1}$

kondicijalna gustoća za t-observaciju

$f(y_t|\epsilon_{t-1};\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-\epsilon_t^2}{2\sigma^2})$

vjerodostojnost uzorka — produkt pojedinačnih gustoća

$$f(y_T, y_{T-1}, y_1|\epsilon_0, \theta) = f(y_1|\epsilon_0 = 0;\theta) * \tag{51}$$

$$\Pi_{t=2}^{T} f(y_t|y_{t-1}, ..., y_1, \epsilon_0 = 0;\theta) \tag{52}$$

kondicionalna log vjerodostojnost

$$\mathcal{L} = -\frac{T}{2}log(2\pi) - \frac{T}{2}log(\sigma^2) - \Sigma_t \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma^2}. \tag{53}$$

$\mathcal{L}$ je nelinearna funkcija μ i θ i observabli y_t NE INOVACIJA ϵ

numerička optimizacija

iteracijom:

$\epsilon_t = (y_t - \mu) - \theta(y_{t-1} - \mu) + ... + (-1)^{t-1}\theta^{t-1}(y_t - \mu) + (-\theta)^t\epsilon_0$

KONDICIONALNA FUNKCIJA VJERODOSTOJNOSTI ZA MA(q) PROCES

$\epsilon_0 = ... = \epsilon_{-q+1} = 0$

iz danih početnih vrijednosti iteracijom:

$\epsilon_t = y_t - \mu - \theta_1\epsilon_{t-1} - ...\theta_q\epsilon_{t-q}$

KONDICIONALNA FUNKCIJA VJERODOSTOJNOSTI ZA ARMA(p,q) PROCES

$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t + ... + \theta_q\epsilon_{t-q}$

cilj: procjenjitelj $\theta = (c, \phi_i, \theta_j, \sigma^2)'$

aproksimacija je naći funkciju vjerodostojnosti kondicionalno na početne vrijednosti y i ϵ

1.) opcija je za početne vrijednosti y i ϵ uzeti očekivanja: $y_s = c/(1 - \phi_1 - \phi_p)$ za $s = 0, -1, .., -p+1$ i $\epsilon_s = 0$ za $s = 0, -1, -q+1$. 2) opcija (Box, Jenkins) za početne vrijednosti y_s uzeti stvarne vrijednosti

NUMERIČKA OPTIMIZACIJA

KAKO ŠTO BRŽR PREBRISATI PARAMETARSKI PROSTOR

GRID SEARCH

AR(1): s 3 na 1 parametar

$$\mathcal{L}(\phi) = ...1/2\ log(1 - \phi^2) - 1/2\ (1 - \phi^2) y_1^2 - \tag{54}$$

$$1/2 \Sigma_{t=2}^{T} (y_t - \phi y_{t-1})^2 \tag{55}$$

recimo $T = 5, y_1 = 0.8, y_2 = 0.2, y_3 = -1.2, y_4 = -0.4, y_5 = 0$

$\phi = 0 - - - \mathcal{L} = -5.73; \phi = 0.1 - - - \mathcal{L} = -5.71$

subintervali

aprox rješenje —uvjet konvergencije

lokalni i globalni maksimumi

STEEPEST ASCENT — tražimo smjer najbržeg rasta

metoda ako imamo više parametara

početni a-parametarski vektor $\theta^{(0)}$

tražimo bolji procjenjitelj $\theta^{(1)}$ u a-dim prostoru unutar "radijusa" k

$\{\theta^{(1)} - \theta^{(0)}\}'\{\theta^{(1)} - \theta^{(0)}\} = k$

Lagrangean:

$J(\theta^{(1)}) =$

$\mathcal{L}(\theta^{(1)}) + \lambda(k - \{\theta^{(1)} - \theta^{(0)}\}'\{\theta^{(1)} - \theta^{(0)}\}$

$\frac{\partial J(\theta)}{\partial\theta}|_{\theta=\theta^{(1)}} = 0$

$\theta^{(1)} = \theta^{(0)} + 1/(2\lambda)\ g(\theta^{(1)})$

$\mathcal{L}(\theta) = -1.5\theta_1^2 - 2\theta_2^2$

očito je minimum u $\hat{\theta} = (0,0)'$

što daje metoda??

neka je $\theta^{(0)} = (-1,1)'$

često se u praksi derivacije traže numerički:

$g_i \approx 1/\Delta\{\mathcal{L}(...,\theta_i^{(0)} + \Delta, ...) - \mathcal{L}(...,\theta_i^{(0)}, ...)\}$

lokalni ekstremi

$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} + sg(\theta^{(m)})$

za mali smjer puno iteracija

pronadjimo globalni maksimum

$s = 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$ i 16

kriterij konvergencije, razmak medju susjednim θ

ponovimo proceduru za više inicijalnih $\theta^{(0)}$

metoda NEWTON-RAPHSON

(a) ako postoji druga derivacija $\mathcal{L}(\theta)$ (b) ako -1 pomnožen s matricom drugih derivacija je svugdje pozivno definiran

Neka vrijedi:

$g(\theta^{(0)}) = \frac{\partial\mathcal{L}(\theta)}{\partial\theta}|_{\theta=\theta^{(0)}}$

i neka vrijedi

$H(\theta^{(0)}) = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\theta\ \partial\theta'}|_{\theta=\theta^{(0)}}$

aproksimirajmo $\mathcal{L}(\theta)$ Taylorovim redom do drugog reda u razvoju oko $\theta^{(0)}$

$$\mathcal{L}(\theta) \approx \mathcal{L}(\theta^{(0)}) + [g(\theta^{(0)}]'[\theta - \theta^{(0)}] - \quad (56)$$

$$1/2(\theta - \theta^{(0)}]' H(\theta^{(0)})[\theta - \theta^{(0)}] \quad (57)$$

$g(\theta^{(0)}) = H(\theta^{(0)})(\theta - \theta^{(0)})$

$\theta^{(1)} = \theta^{(0)} + [H(\theta^{(0)})]^{-1} g(\theta^{(0)})$

iteracija

primjer

ASIMPTOTSKE STANDARDNE GREŠKE ZA PROCJENJITELJE

za dovoljno velike uzorke distribucija procjenjitelja $\hat{\theta}$ aproksimativno slijedi distribuciju:

$N(\theta_0, T^{-1}\mathcal{P}^{-1})$

gdje je $\theta^{(0)}$ praci parameteraski vektor. Matrica $\mathcal{P}$ se naziva *informacijska matrica* i procjenjuje se.

prvi procjenjitelj:

$\mathcal{P}_{2D} = -T^{-1}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\theta\partial\theta'}|_{\theta=\hat{\theta}}$

matrica varijanci - kovarijanci

$E(\hat{\theta}_0)(\hat{\theta} - \theta_0)' \approx [-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}]^{-1}$

drugi procjenjitelj:

$\mathcal{P}_{OP} = T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T}[h(\hat{\theta})][h(\hat{\theta})]'$

$h(\hat{\theta}) = \frac{\partial log(f(y_t|y_{t-i};\theta))}{\partial\theta}{}_{\theta=\hat{\theta}}$

$E(\hat{\theta} - \theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0) \approx [\Sigma[h(\hat{\theta}, \mathcal{Y}_t)][h(\hat{\theta}, \mathcal{Y}_t)]']^{-1}$

primjer:

REFERENCES