SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Krešimir Kumerički

Grupe, simetrije i tenzori u fizici

Bilješke za predavanja

Zagreb, 7. svibnja 2012.

Sadržaj

Predgovor

Ovo su nekompletne bilješke za predavanja iz kolegija *Teorija grupa* i *Simetrije u fizici* koje držim na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu studentima istraživačkog smjera studija fizike. One su na mjestima samo u obliku natuknica za predavača pa ih stoga ne treba doživljavati kao kompletan udžbenik namijenjen samostalnom učenju. Nadam se da svejedno mogu dobro poslužiti za pripremu ispita.

Dijelovi označeni zvjezdicom se mogu izostaviti pri prvom čitanju.

Krešimir Kumerički
U Zagrebu, 20. siječnja 2009.

Poglavlje 1

Grupe - opći pojmovi

1.1 Definicija grupe i primjeri

Definicija 1 (Grupa)
Grupa $(G, \circ)$ *je skup objekata* G *na kojem je definirana binarna operacija* $\circ$ *tako da su zadovoljena slijedeća svojstva:*

1) Zatvorenost: $g_1, g_2 \in G \;\Rightarrow\; g_1 \circ g_2 \in G$

2) Asocijativnost: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$

3) Egzistencija identiteta: $\exists e \quad | \quad g \circ e = e \circ g = g \quad \forall g \in G$

4) Egzistencija inverza: $\forall g \in G \;\; \exists g^{-1} \quad | \quad g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

Primjer 1 ($\mathbb{Z}$, +)
Lako se uvjeriti da skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ čini grupu obzirom na obično zbrajanje brojeva:

1) $n, m \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; n + m \in \mathbb{Z}$

2) n+(m+k)=(n+m)+k

3) 0+n=n   nula je identitet tj. "jedinični element"

4) n+(-n)=0

Primjer 2 ($\mathbb{Z}$, $\cdot$)
S druge strane, taj isti skup $\mathbb{Z}$ nije grupa obzirom na operaciju množenja. Zašto?

Primjer 3
Skup dvije matrice

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

čini grupu obzirom na uobičajeno množenje matrica. Promotrimo li pak skup *svih* 2×2 matrica vidimo da on *ne* čini grupu jer nije zadovoljen aksiom egzistencije inverza. Naime, neregularne matrice (one čija determinanta iščezava) nisu invertibilne. Međutim, ukoliko se ograničimo samo na skup regularnih 2×2 matrica dobivamo grupu koja se naziva *opća linearna grupa* u dvije dimenzije i označava grupno-teorijskom oznakom GL(2).

Grupu zovemo *Abelova (abelovska, komutativna)* ako $\forall g_1, g_2 \in G \quad g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$

Npr. $(\mathbb{Z}, +)$ je Abelova dok grupa GL(2) to nije.

Broj elemenata grupe nazivamo *red grupe*. Obzirom na njega razlikujemo:

- *Konačne grupe*. Primjer: $(\{1, -1\}, \cdot)$
- *Beskonačne diskretne grupe* koje imaju prebrojivo* beskonačan broj elemenata. Primjer: $(\mathbb{Z}, +)$
- *Beskonačne kontinuirane grupe* koje imaju neprebrojiv broj elemenata i čije elemente možemo zamisliti kao kontinuirani skup točaka. Ukoliko su zadovoljeni neki dodatni uvjeti, vidi Poglavlje 5, ove grupe se nazivaju Lieve grupe. Primjeri: $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, GL(2)

Primjer 4 (Grupa simetrija)
Skup svih transformacija simetrije tj. transformacija koje ostavljaju neki objekt nepromijenjen nužno tvore grupu.

1) zatvorenost: ako ni g_1 ni g_2 ne mijenjaju objekt, ne mijenja ga ni $g_2 \circ g_1$

2) asocijativnost je očita

3) identiteta - transformacija koja ne radi ništa ne mijenja objekt po definiciji

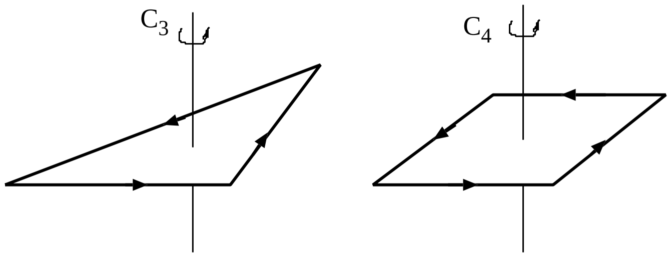
4) suprotna transformacija je isto simetrija

"Objekt" na kojeg djeluju transformacije grupe simetrija može biti nekakav realan fizikalni objekt poput kristala, ali može biti i nešto apstraktniji entitet poput kvantnomehaničke valne funkcije.

Važno je imati na umu da su sam pojam i svojstva grupe neovisni o tom objektu. Njega ćemo iskoristiti da identificiramo skup transformacija simetrije, da vizualiziramo pojedine transformacije i da fizikalno interpretiramo rezultate teorije grupa, ali nikad ne smijemo izgubiti iz vida da je grupa sasvim apstraktan matematički pojam.

*Beskonačan skup je *prebrojiv* ukoliko je moguće uspostaviti bijektivno preslikavanje između tog skupa i skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Npr. skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ jest prebrojiv, dok skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ to nije.

Primjer 5 (Ciklička grupa C_n)
Ciklička grupa C_n je grupa simetrija rotacija pravilnog poligona s n usmjerenih stranica.



Elementi grupe C_n su rotacije za kuteve $2\pi r/n$, $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$ oko osi koja okomito probada središte poligona. Usmjerenost stranica isključuje rotacije oko osi koje leže u ravnini poligona. (Iako je poligon ravninski lik ovdje ga zamišljamo u 3D prostoru.)

Specifično svojstvo cikličkih grupa je da je sve elemente grupe moguće dobiti uzastopnim množenjem jednog od njih sa samim sobom. Tako npr. uzastopnim množenjem rotacije za kut $2\pi/3$ sa samom sobom dobivamo ostale dvije rotacije koje sačinjavaju grupu C_3: rotaciju za $4\pi/3$ i rotaciju za 0 radijana. Ukoliko označimo "generirajuću" rotaciju grupe C_n (onu za kut $2\pi/n$) simbolom c onda možemo pisati

$$C_n = \{c, c^2, \ldots, c^n = e\} \tag{1.1}$$

odnosno grupu C_n možemo alternativno definirati kao grupu generiranu elementom c sa svojstvom $c^n = e$ i pisati kao definicioni izraz:

$$C_n = \mathrm{gp}(c)\ , \qquad c^n = e\ . \tag{1.2}$$

Treću mogućnost za definiciju ove i drugih grupa pruža nam grupna tablica množenja (poznata i kao Cayleyjeva tablica). Naime, obzirom da je apstraktna grupa potpuno određena time da se navede skup elemenata koji je sačinjavaju te time da se potpuno specificira kako se ti elementi množe (tj. kakva je binarna operacija u grupi), grupu C_3, npr., je moguće definirati naprosto kao grupu koja zadovoljava slijedeću tablicu množenja:

$g_1 \backslash g_2$	e	c	c^2
e	e	c	c^2
c	c	c^2	e
c^2	c^2	e	c

(1.3)

Grupne tablice množenja zadovoljavaju tzv. svojstvo latinskog kvadrata poznato i kao

Teorem 1 (Teorem o razmještaju)
Svaki element grupe se pojavljuje jednom i samo jednom u svakom stupcu ili retku grupne tablice množenja.

Dokaz: Zamislimo suprotno tj. da se u nekom retku dvaput pojavi isti element, recimo a. To znači da je a moguće dobiti množenjem prvog elementa iz tog retka, neka je to k, s dvama različitim elementima, recimo m i n: $km = a$ i $kn = a$. To bi značilo da je $km = kn$, a egzistencija inverza omogućuje "skraćivanje" ovakvih relacija tj. množenje slijeva s k^{-1} pa dobivamo $m = n$ što je kontradiktorno jer smo pretpostavili da su m i n različiti elementi. Slično bi bilo za ponavljanje istog elementa dvaput u istom stupcu.

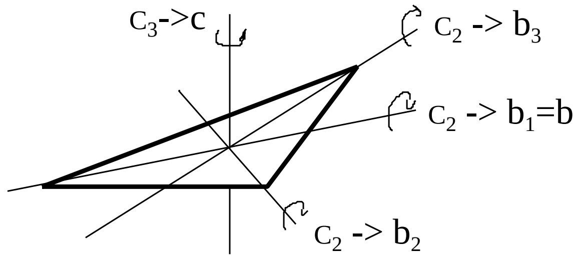
Treba uočiti da nam binarna operacija definirana tablicom množenja koja je u standardnom obliku gdje prvi redak i stupac odgovaraju jediničnom elementu i koja poštuje teorem o razmještaju automatski garantira zadovoljavanje tri aksioma grupe: *zatvorenost* (u tablici se pojavljuju samo elementi grupe), *egzistencija identiteta* (po konstrukciji prvog retka i stupca) i *egzistencija inverza* (u svakom retku se nužno pojavljuje i jedinični element i odgovarajući stupac je onda stupac inverza). Međutim, svojstvo *asocijativnosti* nije nužno zadovoljeno i treba ga provjeriti nekim drugim načinom†.

Ove dvije alternativne definicije (1.2) i (1.3) naglašavaju apstraktnu prirodu grupe (ne treba nam trokut kao objekt grupe simetrija).

Inače, C_n, za $n = 2, 3, 4, 6$ spada u kristalografske *točkaste grupe* kakvih ima ukupno 32‡. To su grupe prostornih simetrija savršenih beskonačnih periodičnih kristala koje ostavljaju jednu točku nepomičnom. (Za razliku od npr. translacije za konstantu rešetke koja je isto simetrija kristala, ali nijednu točku ne ostavlja na mjestu.)

Može se pokazati da jedini elementi tih grupa mogu biti kompozicije rotacija za 60° i 90° te inverzije $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$. (cf. Crystallographic restriction theorem)

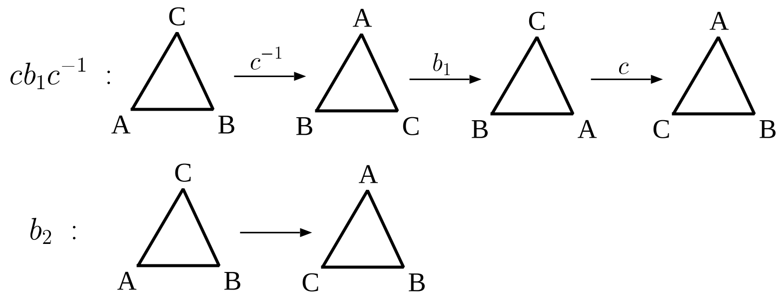
Primjer 6 (Dihedralna grupa D_n)
Dihedralna grupa D_n je grupa simetrija rotacija pravilnog poligona s n stranica. Prma slici



elementi grupe su rotacije e, c i c^2 baš kao kod grupe C_n, te dodatno rotacije b_1, b_2 i b_3 za kut π oko triju horizontalnih osi.

Uočimo sada neka svojstva množenja u toj grupi. Kao prvo, vrijedi da je $b_2 = cb_1c^{-1}$ tj. da su b_2 i b_1 međusobno *konjugirani* preko elementa c. Da je to tako vidi se iz slike:

†Eksplicitna provjera može biti mukotrpna. Od pomoći je procedura poznata kao Lightov test asocijativnosti.
‡U 3D prostoru. U 2D prostoru postoji 10, a u 1D prostoru samo dvije točkaste grupe.



Na sličan način se možemo uvjeriti da je $b_2 = b_1c$ i $b_3 = b_1c^2$, odnosno da c i $b \equiv b_1$ generiraju sve ostale transformacije

$$\mathrm{D}_3 = \{e, c, c^2, b, bc, bc^2\} \; . \tag{1.4}$$

To sugerira da bismo grupu D_3 mogli definirati kao

$$\mathrm{D}_3 = \mathrm{gp}(c, b) \; , \qquad c^3 = b^2 = e \; , \tag{1.5}$$

no ova definicija nije kompletna jer nam nedostaje još i pravilo za komutiranje elemenata (koje nam nije trebalo za grupu C_n koja je Abelova). Njega dobijemo tako da iskombiniramo dvije gore dobivene relacije: $b_2 = cb_1c^{-1} = bc$ i pomnožimo zdesna s c:

$$cb = bc^2 \tag{1.6}$$

Ova relacija sad omogućuje da proizvoljan umnožak elemenata grupe (npr. bcb^2c^5b svedemo na oblik $b^\alpha c^\beta$ gdje je $\alpha < 2$ i $\beta < 3$, tj. na jedan od elemenata iz (1.4). Za kompaktan zapis definicije grupe D_3 koji će se onda moći lako generalizirati i na ostale D_n grupe, množimo gornju komutacijsku relaciju (1.6) slijeva s b i zdesna s c i dobivamo $bcbc \equiv (bc)^2 = b^2c^3 = e$ pa možemo pisati

$$\mathrm{D}_3 = \mathrm{gp}(c, b) \; , \qquad c^3 = b^2 = (bc)^2 = e \tag{1.7}$$

Ova definicija se generalizira ovako (vidi zadatke)

$$\mathrm{D}_n = \mathrm{gp}(c, b) \; , \qquad c^n = b^2 = (bc)^2 = e \tag{1.8}$$

što onda možemo iskoristiti i da bismo definirali grupu D_2 poznatu i kao *Kleinova četvorna grupa* (njem. *Vierergruppe*), za koju nemamo odgovarajući poligon kao objekt grupe simetrija.

1.2 Podgrupe

Definicija 2 (Podgrupa)
Podgrupa H grupe G je neprazni podskup $H \subset G$ koji i sam tvori grupu obzirom na grupnu operaciju definiranu na G. Podgrupu $H \neq \{e\} \neq G$ zovemo prava *podgrupa i pišemo $H < G$.*

Primjer 7
C_2=$\{$e, b$\}$ i C_3=$\{$e, c, c$^2\}$ su prave podgrupe od D_3

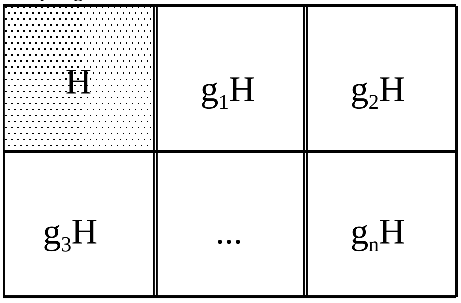
Primjer 8
Grupa translacija i točkasta grupa su podgrupe grupe prostornih simetrija kristala.

Definicija 3 (Susjedna klasa)
Lijeva susjedna klasa (engl. coset) podgrupe H obzirom na element $g \in G$ je skup

$$gH = \{gh \quad | \quad h \in H\}$$

Odnos pripadnosti elementa g_1 lijevoj susjednoj klasi obzirom na element g_2, $g_1 \in g_2H$, uspostavlja *relaciju ekvivalencije*[§] između ta dva elementa u grupi G, $g_1 \sim g_2$.

Susjedne klase po nekoj podgrupi H su međusobno disjunktne i sve imaju isti broj elemenata (jednak redu od H, zahvaljujući Teoremu o razmještaju) pa tako definiraju jednu particiju grupe G:



Promatrajući ovu sliku lako se uvjerimo u točnost Lagrangeovog teorema:

Teorem 2 (Lagrange)
Red podgrupe dijeli red grupe.

Definicija 4 (Kvocijentni skup)
Skup svih različitih lijevih susjednih klasa

$$G/H \equiv \{gH \quad | \quad g \in G\}$$

zove se lijevi kvocijentni skup grupe *G po podgrupi H.*

Potpuno analogno se definiraju desna susjedna klasa i desni kvocijentni skup.

[§]Općenito, *relacija ekvivalencije* je binarna relacija $a \sim b$ između elemenata nekog skupa koja ima slijedeća svojstva

(i) $a \sim a \quad \forall a$ (refleksivnost)

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (simetričnost)

(iii) $a \sim b$ i $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (tranzitivnost)

Primjeri relacija ekvivalencije su: "osoba a je rođena na isti dan kad i osoba b" ili "trokut a je sličan trokutu b", dok npr. "broj a je veći ili jednak broju b" nije relacija ekvivalencije jer nije simetrična. (Ona je antisimetrična. Binarna relacija na skupu koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se *relacija uređaja*.) Svaka relacija ekvivalencije cijepa skup na disjunktne *klase ekvivalencije*.

Primjer 9 (D_3)
Promotrimo podgrupu $H = \{e, c, c^2\}$ $=\mathrm{C}_3$ grupe $G = \mathrm{D}_3$. Dvije lijeve susjedne klase su

1) $eH = H = \{e, c, c^2\}$ i

2) $bH = \{b, bc, bc^2\}$,

a kvocijentni skup je $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3 = \{eH, bH\}$. Postoji i kvocijentni skup $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2$

Definicija 5 (Normalna podgrupa)
Podgrupa za koju vrijedi $gH = Hg$, $\forall g \in G$, zovemo normalna *ili* invarijantna.

Primjer 10 (D_3)
$G = D_3$, $H = C_3$. $bC_3 = C_3 b$, …(za ostale $g \in D_3$ trivijalno) Dakle, C_3 je normalna podgrupa od D_3. S druge strane $C_2 = \{e, b\}$ nije normalna jer npr. $cC_2 \neq C_2 c$.

Očito je da su za normalnu podgrupu H lijevi i desni kvocijentni skupovi identični $G/H = H\backslash\mathrm{G}$

Grupe koje nemaju normalnih podgrupa zovu se *jednostavne*, a one koje nemaju normalnih Abelovih podgrupa zovu se *polujednostavne*.

Kvocijentni skup po normalnoj podgrupi čini grupu obzirom na binarnu operaciju

$$(g_1 H)(g_2 H) = (g_1 g_2) H$$

Uvjerite se da su zadovoljeni aksiomi grupe.

Primjer 11 ($\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3$)
Tablica množenja u ovom kvocijentnom skupu je definirana relacijama

$$(eH)(eH) = eeH = eH \tag{1.9}$$
$$(eH)(bH) = bH \tag{1.10}$$
$$(bH)(eH) = bH \tag{1.11}$$
$$(bH)(bH) = eH \tag{1.12}$$

Lijevi i desni kvocijentni skupovi su jednaki

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_3/\mathrm{C}_3 &= \{\{e, c, c^2\}, \{b, bc, bc^2\}\} \\ \mathrm{C}_3\backslash\mathrm{D}_3 &= \{\{e, c, c^2\}, \{b, cb = bc^2, c^2 b = bc\}\} = D_3/C_3 \end{aligned}$$

i imaju grupnu strukturu jednaku grupi C_2.

S druge strane

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2 &= \{\{e, b\}, \{c, cb = bc^2\}, \{c^2, c^2 b = bc\}\} \\ \mathrm{C}_2\backslash\mathrm{D}_3 &= \{\{e, b\}, \{c, bc\}, \{c^2, bc^2\}\} \neq \mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2 \end{aligned}$$

i $\mathrm{D}_3/\mathrm{C}_2$ nije grupa.

Definicija 6 (Konjugirani elementi)
Dva elementa a i b grupe G su konjugirani *ukoliko postoji* $g \in G \quad | \quad a = gbg^{-1}$.

Konjugacija je također relacija ekvivalencije:

(i) $a = e^{-1}ae \;\Rightarrow\; a \sim a$

(ii) $a = g^{-1}bg \;\Rightarrow\; b = g^{-1}a(g^{-1})^{-1}$

(iii) $a = gbg^{-1}$, $b = hch^{-1}$,
$a = ghch^{-1}g^{-1} = (gh)c(gh)^{-1}$, $gh \in G$

Konjugacija (baš kao i svaka relacija ekvivalencije) definira particiju skupa na klase.

$$\text{klasa od } a = \{b \quad | \quad b = gag^{-1}, \quad g \in G\}$$

Klasa od $e = \{e\}$ što povlači da klase, izuzev ove trivijalne, nisu podgrupe.

Za Abelove grupe svaki element je klasa za sebe.

Normalne podgrupe zadovoljavaju $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$. Slijedi da su one sastavljenje od *cijelih* klasa konjugacije.

Primjer 12 ($\mathbf{D_3}$)
Klase konjugacije od D_3 su:

- (e)
- (c, c^2)
- (b, bc, bc^2)

i odgovaraju rotacijama za različite kuteve. Konjugirajući elementi preslikavaju međusobno osi rotacije. Normalna podgrupa C_3 se sastoji od cijelih klasa (prve dvije), dok podgrupa $C_2 = \{e, b\}$ nema to svojstvo i nije normalna.

1.3 Homomorfizam i izomorfizam grupa

Definicija 7 (Homomorfizam)
Neka su G i H grupe, a $f : G \to H$ preslikavanje koje komutira s grupnom operacijom tj. za koje vrijedi

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in G \; .$$

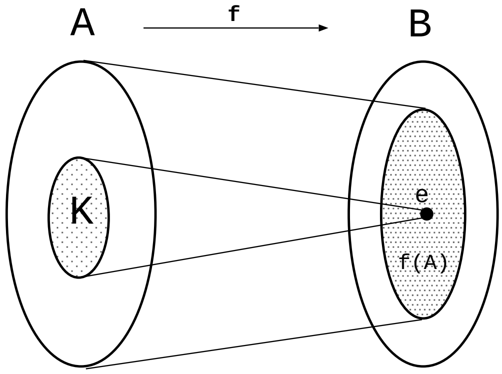
Onda kažemo da je f homomorfizam *grupe G u grupu H.*

Homomorfizam koji je i bijekcija zovemo *izomorfizam* i pišemo $A \cong B$ ili $A = B$.

Izomorfne grupe su s apstraktnog stanovišta jednake (imaju istu tablicu množenja).

Primjer 13 (C_2)
Grupa C_2 je izomorfna grupama $(\{1, -1\}, \cdot)$ i $\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}, \cdot\right)$.

Slika homomorfizma $f(A)$ (skup svih elemenata u B koji imaju original u A) je podgrupa od B: $f(A) < B$ (DZ: Uvjerite se u to.)



Slika $f(e_A)$ jediničnog elementa e_A iz A je jedinični element e_B u B jer množenjem relacije

$$f(e_A)f(b) = f(e_A b) = f(b)$$

s desna s $f(b)^{-1}$ dobivamo

$$f(e_A) = f(b)f(b)^{-1} = e_B \ .$$

No moguće je da se i drugi elementi iz A osim jediničnog preslikavaju u jedinični element u B. *Kernel* homomorfizma je skup svih elemenata od A koji se preslikavaju u jedinični element iz B.

$$K \equiv \ker(f) \equiv \{k \in A \mid f(k) = e_B\} \ .$$

Kernel od $f : A \to B$ je normalna podgrupa od A. (DZ: Uvjerite se u to.)

Teorem 3 (Teorem o izomorfizmu)
Ako je $f : G \to G'$ homomorfizam s kernelom K, onda vrijedi

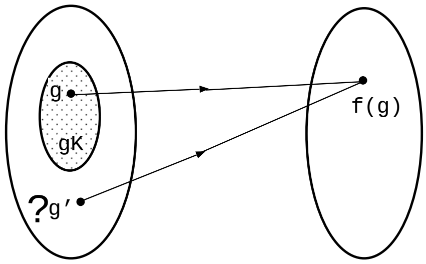
a) Svaki element susjedne klase gK se preslikava u isti element $f(g)$.

b) Slika homomorfizma $f(G)$ je izomorfna kvocijentnoj grupi po kernelu G/K.

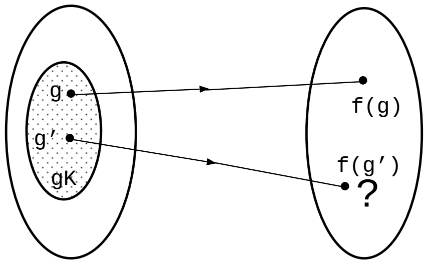
(Skup G/K je grupa jer je K normalna podgrupa.)

Dokaz*: Pridruživanje je $f(g) \leftrightarrow gK$. Pokažimo da je to pridruživanje dobro definirano i bijekcija te da čuva grupnu strukturu.

- $f(g) \mapsto gK$ je dobro definirano jer je gK jedinstven: $f(g) = f(g') \Rightarrow f(g'g^{-1}) = f(g')f(g^{-1}) = f(g)f(g)^{-1} = e \Rightarrow g'g^{-1} \equiv k \in K, g' = kg \Rightarrow gK = g'K$ (Zadnja implikacija slijedi iz toga da $\forall k_1 \in K, gk_1 = g'k^{-1}k_1 \in g'K$)

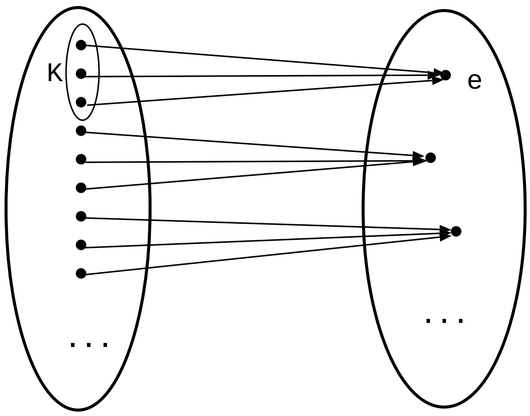


- $gK \mapsto f(g)$ je dobro definirano jer ne ovisi o izboru elementa g iz K: $g, g' \in gK \Rightarrow g'g^{-1} \in K \Rightarrow \Rightarrow f(g'g^{-1}) = e \Rightarrow f(g')f(g^{-1}) = e \Rightarrow f(g') = f(g)$



- injekcija u oba smjera $\Rightarrow$ bijekcija

- Čuvanje grupne strukture: f(g)f(g') se preslikava u (gK)(g'K) jer f(g)f(g')=f(gg')=gg'K=(gK)(g'K)



Jedan korolar ovog teorema je da je svaki element g' iz G' slika istog broja elemenata iz G (zato jer susjedne klase moraju imati isti broj elemenata). Drugi korolar je da je f izomorfizam ako i samo ako je kernel $K = \{e\}$.

Zadaci

1.1 Dokažite da su jedinični i inverzni element grupe jedinstveni.

1.2 Konstrukcijom grupne tablice množenja pokažite da postoji samo jedna grupa reda 3.

1.3 Na isti način kao u prošlom zadatku pokažite da postoje samo dvije grupe reda 4.

1.4 Grupa je Abelova ako i samo ako je njena grupna tablica množenja simetrična. Dokažite da i za grupe koje nisu Abelove razmještaj jediničnih elemenata u tablici mora biti simetričan.

1.5 Dokažite da je grupa u kojoj je svaki element samom sebi inverz nužno Abelova.

1.6 Uvjerite se da je grupa simetrija pravilnog poligona s n neusmjerenih stranica izomorfna grupi $\mathrm{D}_n = \mathrm{gp}(c, b) \quad c^n = b^2 = (bc)^2 = e$. (Naputak: Odredite transformacije poligona koje odgovaraju elementima c i b, pa se uvjerite da one zadovoljavaju $c^n = b^2 = (bc)^2 = e$. Usporedite broj elementa grupa.)

1.7 Centar Z grupe G je skup svih elemenata koji komutiraju sa svakim elementom grupe tj. $Z = \{z \in G \quad | \quad zg = gz \forall g \in G\}$. Pokažite da je Z normalna Abelova podgrupa od G.

1.8 Odredite klase konjugacije grupe D_4.

1.9 Pokažite da su sve grupe s prostim brojem elemenata ciklične.

1.10 *Red* elementa a grupe G je najmanji n takav da je $a^n = e$. Pokažite da je red svih elemenata jedne klase konjugacije isti.

1.11 Postoji li netrivijalni homomorfizam s grupe D_4 na grupu D_3?

1.12 Pokažite da je kvocijentna grupa $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_e$ izomorfna grupi C_2, gdje je $\mathbb{Z}_e$ grupa parnih cijelih brojeva.

1.13 Promotrite grupu nesingularnih kvadratnih $n \times n$ matrica $G = \{M\}$. Pokažite da je $f(M) = \det M$ homomorfizam.

Poglavlje 2

Reprezentacije grupa

2.1 Vektorski prostori i operatori na njima

Definicija 8 (Vektorski prostor)
Vektorski prostor (ili linearni prostor) V nad poljem F je aditivna grupa (grupna operacija je zbrajanje vektora $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$) na kojoj je definirana operacija množenja skalarom *iz F tako da su zadovoljeni aksiomi:*

1) Zatvorenost: $a\boldsymbol{x} \in V \quad \forall a \in F,\ \boldsymbol{x} \in V$

2) Kvaziasocijativnost: $a(b\boldsymbol{x}) = (ab)\boldsymbol{x} \quad \forall a, b \in F,\ \boldsymbol{x} \in V$

3) Egzistencija jedinice: $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad$ za $1 \in F$ *i* $\forall \boldsymbol{x} \in V$

4) Distributivnost zbrajanja u F: $(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x} \quad \forall a, b \in F,\ \boldsymbol{x} \in V$

5) Distributivnost zbrajanja u V: $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y} \quad \forall a \in F,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

- Iz aksioma slijedi da je zbrajanje vektora u V komutativno tj. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

- Polje F je obično $\mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$ pa govorimo o *kompleksnom* ili *realnom* vektorskom prostoru.

- *Baza* = skup $\{\boldsymbol{e}_i\}$ linearno neovisnih vektora koji razapinju V tj. svaki vektor iz V se može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\{\boldsymbol{e}_i\}$

- *Dimenzija* vektorskog prostora = broj vektora njegove baze

Primjer 14 (3D euklidski prostor)
"Klasičan" realni vektorski prostor. Kartezijeva baza: $\boldsymbol{e}_1 = \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{e}_2 = \hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{e}_3 = \hat{\boldsymbol{z}}$

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Primjer 15 (Hilbertov prostor kvantnomehaničkih stanja H atoma)
- Schrödingerova jednadžba: $H\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x})$

- Rješenja za vodikov atom $\psi_{nlm}(\boldsymbol{x})$ (stacionarna stanja), predstavljaju bazu beskonačnodimenzionalnog Hilbertovog vektorskog prostora mogućih kvantnomehaničkih stanja vodikovog atoma.

- Vektor u tom prostoru je proizvoljna superpozicija stacionarnih stanja:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} a_{nlm} \psi_{nlm}(\boldsymbol{x})$$

- a_{nlm} - proizvoljni kompleksni koeficijenti (Ovo je dakle kompleksan vektorski prostor.)

- alternativna "baza": $\psi_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ u kojoj proizvoljno stanje promatramo ne kao superpoziciju svojstvenih stanja energije, već kao superpoziciju svojstvenih stanja položaja elektrona.*

Definicija 9 (Linearni operator)
Operator $T : V \to V$ na vektorskom prostoru V sa svojstvom

$$T(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = aT\boldsymbol{x} + bT\boldsymbol{y}$$

$\forall a, b \in F,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, *je* linearan.

- U datoj bazi $\{\boldsymbol{e}_i\}$, operator T možemo prikazati kao matricu s elementima T_{ij} definiranu relacijom $T\boldsymbol{e}_j = \sum_i T_{ij}\boldsymbol{e}_i \equiv T_{ij}\boldsymbol{e}_i$, odnosno relacijom $T_{ij} \equiv \boldsymbol{e}_i T \boldsymbol{e}_j$.

- Onda je djelovanje na vektor $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$ dano s $(T\boldsymbol{x})_i = T_{ij} x_j$.

- Ovdje smo definirali tzv. Einsteinovu sumacijsku konvenciju po kojoj se sumiranje po dvaput ponovljenom indeksu podrazumijeva i znak sume se izostavlja.

Primjer 16 (Operator rotacije u euklidskom prostoru)

$$R_{z,\theta}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Primjer 17 (Hamiltonijan)
$H\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x})$

Definicija 10 (Skalarni produkt)
Skalarni produkt na vektorskom prostoru V je preslikavanje $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ sa svojstvima:

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$

*Ova "baza" sugerira da je prostor neprebrojivo beskonačno dimenzionalan, ali to nije slučaj jer je *separabilan* — svaki je vektor moguće proizvoljno dobro aproksimirati kao linearnu kombinaciju vektora prebrojivo beskonačne baze. Cf. Reed and Simon, Vol. I

2) $(\boldsymbol{z}, a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0\,, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ *i* $a, b \in \mathbb{C}$.

- Posljedica definicije: $(a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = a^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. (Moguća je i alternativna definicija skalarnog produkta kod koje je $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y}) = a^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, ali ona se u fizici rijetko rabi.)

- Primjeri: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ u 3D euklidskom prostoru ili $(\psi_1, \psi_2) = \int \psi_1^*(\boldsymbol{x})\psi_2(\boldsymbol{x})d^3x$ u Hilbertovom prostoru kvantnomehaničkih stanja.

- Skalarni produkt omogućuje prirodnu definiciju *norme* vektora kao $\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)}$.

- Vektorski prostor s definiranom operacijom skalarnog produkta se zove *unitarni prostor*. Alternativni nazivi: pre-Hilbertov, euklidski prostor.

- Ortonormirana baza vektorskog prostora je baza $\{\boldsymbol{e}_i\}$ takva da je $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ i uvijek ju je moguće naći u unitarnom prostoru.

Definicija 11 (Unitarni operator)
Unitarni operator U je operator takav da je $(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

- Kažemo da unitarni operator čuva skalarni produkt. Obzirom da su skalarni produkt i norma vektora u kvantnomehaničkom Hilbertovom prostoru stanja povezani sa vjerojatnostima, te kako je očuvanje vjerojatnosti prirodan zahtjev na operatore transformacije kvantnomehaničkih stanja, ti će operatori tipično biti reprezentirani unitarnim operatorima.

- U ortonormiranoj bazi unitarni operator je predstavljen unitarnom matricom tj. matricom sa svojstvom $U^\dagger U = 1$ gdje je $U^\dagger \equiv U^{T^*}$ hermitski konjugirana matrica.

Definicija 12 (Hermitski konjugirani operator)
Hermitski konjugirani operator operatoru D je operator $D^\dagger$ definiran tako da vrijedi $(D\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, D^\dagger\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

- U ortonormiranoj bazi hermitski konjugirani operator je predstavljen hermitski konjugiranom matricom.

Definicija 13 (Hermitski operator)
Operator H se naziva hermitski ako vrijedi $(H\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, H\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. Takav operator je u ortonormiranoj bazi prikazan hermitskom matricom za koju vrijedi $H^\dagger = H$.

- Hermitski konjugirani operator operatora D se naziva i adjungirani operator operatoru D (engl. *adjoint*), a hermitski operator se naziva i auto-adjungirani (engl. *self-adjoint*). Zapravo postoji suptilna matematička razlika između hermitskog i auto-adjungiranog operatora, ali fizičari je obično zanemaruju.

Teorem 4
Svojstvene vrijednosti hermitskog operatora su realne.

Dokaz: Neka je $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ za $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}^\dagger$. Skalarnim množenjem s $\boldsymbol{x}$ imamo $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, iz čega slijedi $\lambda^* = \lambda$.

- Ovo svojstvo se odražava u činjenici da su kvantnomehanički operatori koji odgovaraju opservabilnim fizikalnim veličinama redovito hermitski.

- I unitarne i hermitske matrice T se mogu dijagonalizirati transformacijom $S^{-1}TS = D$, gdje je S unitarna matrica.

2.2 Definicija reprezentacije i osnovna svojstva

Definicija 14 (Reprezentacija grupe)
Reprezentacija grupe $G = \{g_i\}$ je homomorfizam s G na grupu linearnih operatora $\Gamma = \{D(g_i)\}$, na nekom vektorskom prostoru V.

- Dakle, reprezentacija je preslikavanje $G \to \Gamma$, gdje se pojedini elementi preslikavaju kao $g_i \mapsto D(g_i)$.

- Operatori $D(g_i)$ su pak preslikavanja $D(g_i) : V \to V$, gdje se pojedini vektori preslikavaju kao $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = D(g_i)\boldsymbol{x}$.

- Kolokvijalno se pojam "reprezentacija" zna odnositi ne samo na gornji homomorfizam već i na grupu Γ, pa čak i na vektorski prostor V.

- *Dimenzija* reprezentacije je dimenzija vektorskog prostora V na koji operatori djeluju.

- Kako se operatori mogu u nekoj bazi predstaviti kao kvadratne matrice u literaturi se često rabi alternativna definicija reprezentacije kao preslikavanja na grupu matrica.

- Iz uvjeta homomorfizma

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2)$$

slijede razne stvari poput činjenice da je jedinični element uvijek reprezentiran jediničnom matricom: $D(g)D(e) = D(ge) = D(g) \;\Rightarrow\; D(e) = 1$.

- Uobičajena oznaka za operatore iz reprezentacije je slovo D od njemačke riječi "Darstellung" (reprezentacija). Primjenu teorije reprezentacija grupa na fiziku je u velikoj mjeri razvio E. P. Wigner.

- Ukoliko je grupa operatora Γ *izomorfna* grupi G, reprezentaciju zovemo *vjerna*

Primjer 18 (REP C$_3$ na 3D euklidskom prostoru)
$\mathrm{C}_3 = \{e, c, c^2\}$. Kao reprezentirajuće operatore možemo uzeti operatore rotacije — tako smo i došli do grupe C_3: $D(c) =$ rotacija za $2\pi/3$ oko z-osi.

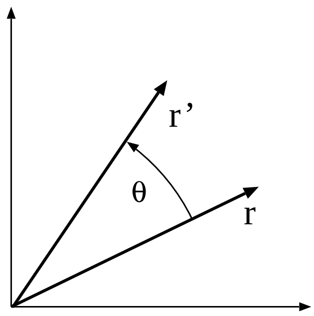
† Egzistencija takvog vektora slijedi iz fundamentalnog teorema algebre

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aktivne transformacije: mijenjaju se vektori, baza ostaje ista

- Pasivne transformacije: vektori ostaju isti, baza se mijenja

- Ako se ne kaže drukčije, naše će transformacije biti aktivne (taj je pristup "fizikalniji")



$$D(c) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) & 0 \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$D(c^2) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D(c)^2$$

- Ovo naravno nije jedina REP. Mogli smo uzeti rotacije za iste kuteve oko bilo koje druge osi.

Primjer 19 (REP C_3 na vektorskom prostoru stanja H atoma)
- $\psi'(\boldsymbol{x}) = D(c)\psi(\boldsymbol{x})$ $D(c)$=?

- Neka je $\psi(\boldsymbol{x}) = \psi_{nlm}(\boldsymbol{x})$. Dakle, gledamo što se događa sa stacionarnim stanjima.

$$\psi_{nlm}(\boldsymbol{x}) \overset{c}{\mapsto} \psi'_{nlm}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{l'=0}^{n'-1} \sum_{m'=-l'}^{l'} D_{(nlm)(n'l'm')}(c)\psi_{n'l'm'}(\boldsymbol{x})$$

- Neka je $D(c)$ rotacija za $2\pi/3$ oko z-osi.

- Rotacija čuva energiju ($n' = n$) i moment impulsa ($l' = l$), tj. jedino može promijeniti projekciju momenta impulsa m tako da imamo

$$D_{(nlm)(n'l'm')}(c) = \delta_{nn'}\delta_{ll'}D^{(l)}_{mm'}(c)$$

$$\psi'_{nlm}(\boldsymbol{x}) = \sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{mm'}(c)\, \psi_{nlm'}(\boldsymbol{x})$$

- Npr. za $l = 1$ i za bilo koji n (vidjet ćemo u 5. poglavlju)

$$D^{(1)}_{mm'}(c) = \delta_{mm'} e^{-i2\pi m/3} = \begin{pmatrix} e^{-i2\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i2\pi/3} \end{pmatrix}$$

- Rotacija oko z-osi ne mijenja niti m.

- $D^{(l)}_{mm'}(g)$, $g \in \mathrm{C}_3$ su $(2l+1) \times (2l+1)$ matrice (tzv. Wignerove rotacijske matrice) i čine jednu REP grupe C_3

- Za svaki l imamo drugačiju reprezentaciju $\Rightarrow$ beskonačno mnogo reprezentacija

- Da bismo naučili konstruirati takve reprezentacije treba nam formalna teorija reprezentacija grupa.

- Npr. svaka grupa G ima tzv. *trivijalnu* reprezentaciju

$$D(g) = 1 \quad \forall g \in G$$

gdje je 1 jedinična matrica na vektorskom prostoru proizvoljne dimenzionalnosti ($\Rightarrow$ beskonačno reprezentacija) $\rightarrow$ redukcija na IRREPse.

- Jednodimenzionalne reprezentacije su posebno jednostavne jer kompozicija operatora (množenje matrica) postaje množenje brojeva.

- Za konačne grupe 1D REP imaju svojstvo $|D(g)| = 1$. Naime, red n svakog elementa je konačan: $g^n = e \Rightarrow D(g^n) = D(g)^n = D(e) = 1 \Rightarrow D(g)$ je n-ti korijen jedinice pa može biti samo

$$D(g) = e^{i2\pi k/n} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \Rightarrow |D(g)| = 1$$

2.3 Ekvivalentne reprezentacije

Definicija 15 (Ekvivalentne REP)
Dvije REP $\Gamma_1 = \{D^{(1)}\}$ i $\Gamma_2 = \{D^{(2)}\}$ su ekvivalentne *ako postoji konstantni nesingularni operator S takav da je*

$$D^{(1)}(g) = S D^{(2)}(g) S^{-1} \quad \forall g \in G$$

(S ne ovisi o g)

- S — operacija sličnosti $\Rightarrow$ "slične REP"

- Provjeriti da je ovo relacija ekvivalencije.

- Pokazat ćemo da su ekvivalentne REP zapravo ista REP izražena u drugoj bazi. (Slično kao što su konjugirane rotacije rotacije oko istog kuta, ali različitih osi.)

- $D : V \to V$

- $D : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{v}$

- V ima neku bazu $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$

- $\boldsymbol{u} = \sum_i u_i \boldsymbol{e}_i \equiv u_i \boldsymbol{e}_i$ (Einsteinova sumacijska konvencija)

- Linearni operator je potpuno definiran svojim djelovanjem na vektore baze:

- $D\boldsymbol{e}_j =$ (lin. komb. od $\boldsymbol{e}_j$) $= D_{ij}\boldsymbol{e}_i$

- Ovaj operator sad djeluje na proizvoljni vektor ovako:
$D\boldsymbol{u} = D(u_j \boldsymbol{e}_j) = u_j D_{ij} \boldsymbol{e}_i$

- Ako pišemo $D\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$, onda je
$v_i = D_{ij} u_j$, ili u matričnom obliku $v = Du$

- U nekoj drugoj bazi $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ operator D ima neke druge komponente:

- $D\boldsymbol{f}_j = D'_{ij}\boldsymbol{f}_i$

- $v'_i = D'_{ij} u'_j$

- No, i vektori stare baze su vektori pa se mogu izraziti kao
$\boldsymbol{e}_i = S_{ji}\boldsymbol{f}_j$

- $\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i = u_i S_{ji} \boldsymbol{f}_j$

- $u'_j = u_i S_{ji}$; $v'_j = v_i S_{ji}$

- U matričnom obliku: $v' = Sv$; $v = S^{-1}v'$

- $v' = Sv = SDu = SDS^{-1}u'$

- $\Rightarrow$ $D' = SDS^{-1}$ Ekvivalentne reprezentacije se sastoje od istih operatora, ali izraženih u različitim bazama. (Zapravo smo pokazali da u drugoj bazi operator D izgleda kao SDS^{-1}. Idući unatrag dobijemo ono što tražimo.)

- Jednodimenzionalne reprezentacije su zapravo brojevi koji automatski komutiraju pa slijedi da su takve reprezentacije ili identične ili neekvivalentne.

- Da bismo identificirali da li su dvije reprezentacije ekvivalentne nije nužno tražiti transformaciju S. Postoje elegantnije metode poput upotrebe karaktera reprezentacija (vidi odjeljak 3.1).

2.4 Zbroj i produkt reprezentacija

Direktni zbroj reprezentacija

Kvadratnu matricu oblika

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & A_n \end{pmatrix}$$

gdje su A_i kvadratne matrice matrice zovemo *blok-dijagonalna* ili *blok* matrica.

- Produkt dviju matrica iste blok-strukture:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_nC_n \end{pmatrix}$$

ima istu blok strukturu kao i te matrice.

- Promotrimo sada dvije reprezentacije grupe G: $\Gamma_1 = \{D^{(1)}(g)\}$ dimenzije d_1 i $\Gamma_2 = \{D^{(2)}(g)\}$ dimenzije d_2. Tada je skup matrica

$$\Gamma = \{D(g)\} = \left\{ \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \right\}$$

također reprezentacija grupe G.

- Dokaz:

$$D(g)D(h) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^{(1)}(h) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(h) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D^{(1)}(g)D^{(1)}(h) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g)D^{(2)}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{(1)}(gh) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(gh) \end{pmatrix} = D(gh)$$

zahvaljujući gornjem svojstvu množenja blok matrica i činjenici da su Γ_1 i Γ_2 reprezentacije.

- Rezultirajuću reprezentaciju zovemo *direktni zbroj* reprezentacija Γ_1 i Γ_2 i pišemo

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$$

- Dimenzija zbroja je zbroj dimenzija: $d = d_1 + d_2$

- Možemo zbrajati proizvoljan broj reprezentacija:

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n$$

- Vektorski prostor na koji djeluje zbroj reprezentacija je $V = V_1 \oplus V_2$ — prostor razapet vektorima $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ gdje je $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ jedna baza od V_1, a $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ jedna baza od V_2.

- Primjer: z-pravac $\oplus$ xy-ravnina = 3D euklidski prostor

- Primjer: vektorski prostor stacionarnih vezanih stanja vodikovog atoma ψ_{nlm} $\oplus$ vektorski prostor dvočestičnog stanja nevezanog elektrona i protona (cca. produkt dva ravna vala ako zanemarimo interakciju)

- Vidjet ćemo da su zanimljive one reprezentacije koje se ne mogu prikazati kao zbroj manjedimenzionalnih reprezentacija.

Direktni produkt reprezentacija

Kroneckerov ili *direktni produkt* kvadratnih matrica A i B je kvadratna matrica $C = A \otimes B$ čije su komponente

$$C_{ij,kl} = A_{ik} B_{jl}$$

-Npr, neka su A i B dvodimenzionalne matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Onda je njihov direktni produkt matrica

$$C = A \otimes B = A = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

- Dimenzija produkta je produkt dimenzija.

- Vrijedi $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

- (Dokaz ovoga vidi u [1])

- Ako imamo dvije reprezentacije grupe G: Γ_1 i Γ_2, onda je i skup $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2 = \{D(g)\} = \{D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g)\}$ također REP od G:

- $D(g)D(h) = (D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g))(D^{(1)}(h) \otimes D^{(2)}(h)) = (D^{(1)}(g)D^{(1)}(h)) \otimes (D^{(2)}(g)D^{(2)}(h)) = D^{(1)}(gh) \otimes D^{(2)}(gh) = D(gh)$

- Ako Γ_1 djeluje na vektorskom prostoru V_1 razapetom vektorima $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, a Γ_2 na vektorskom prostoru V_2 razapetom vektorima $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, onda $\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ djeluje na vektorskom prostoru $V = V_1 \otimes V_2$ razapetom vektorima $\{e_i \otimes f_j, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$, dimenzije $d = mn$.

- Npr. u QM ako imamo dva vodikova atoma koja ne djeluju jedan na drugog (kao u npr. H_2 molekuli) njihove će valne funkcije biti vektori u dva Hilbertova prostora: $\psi_1(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{H}_1$ i $\psi_2(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{H}_2$. Združeni sustav ta dva atoma možemo promatrati kao jedan vektor $\psi_1(\boldsymbol{x})\psi_2(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ gdje je baza od ovog direktnog produkta Hilbertovih prostora razapeta vektorima $(\psi_{nlm}(\boldsymbol{x})\psi_{n'l'm'}(\boldsymbol{x}))$. Ako atomi djeluju jedan na drugog, valna funkcija će biti $\psi(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

2.5 Reducibilnost reprezentacija

Definicija 16 (Reducibilna REP)
Reprezentacija Γ grupe G koja djeluje na vektorskom prostoru V je reducibilna *ukoliko postoji netrivijalni potprostor V_1 od V koji je invarijantan na Γ, tj.*

$$D(g)V_1 \subset V_1 \quad \forall g \in G \, .$$

- Tada u bazi $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{m+n}\}$, gdje je baza od V_1 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$, reprezentacija poprima oblik

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & C(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

gdje je $D^{(1)}(g)$ $m \times m$, $D^{(2)}(g)$ $n \times n$, a $C(g)$ $m \times n$ matrica, te dim $V = m + n$ i dim $V_1 = m$.

- Obratno, ako postoji baza u kojoj reprezentacija poprima gornji oblik, reprezentacija je reducibilna.

- $\Gamma_1 = \{D^{(1)}\}$ i $\Gamma_2 = \{D^{(2)}\}$ su također REP od G.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
D(g)D(h) &= \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & C(g) \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(1)}(h) & C(h) \\ 0 & D^{(2)}(h) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D^{(1)}(g)D^{(1)}(h) & D^{(1)}(g)C(h) + C(g)D^{(2)}(h) \\ 0 & D^{(2)}(g)D^{(2)}(h) \end{pmatrix} \\
&= D(gh) \quad \text{jer je } \Gamma \text{ REP} \\
&= \begin{pmatrix} D^{(1)}(gh) & C(gh) \\ 0 & D^{(2)}(gh) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Odakle slijedi

$$\begin{aligned}
D^{(1)}(gh) &= D^{(1)}(g)D^{(1)}(h) \\
D^{(2)}(gh) &= D^{(2)}(g)D^{(2)}(h)
\end{aligned}$$

tj. Γ_1 i Γ_2 su REPs.

Primjer 20 (REP C_3 na 3D euklidskom prostoru)

$$D(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall g \in \mathrm{C}_3$$

2D prostor V_1 razapet vektorima $\hat{\boldsymbol{x}}$ i $\hat{\boldsymbol{y}}$ je invarijantan na $\Gamma \;\Rightarrow\; \Gamma$ je reducibilna.

- Štoviše, $C(g) = 0$ u ovom primjeru tj. vektorski prostor je rastavljiv na direktnu sumu dva potprostora koja su oba invarijantna. To nas vodi na pojam potpune reducibilnosti.

Definicija 17 (Potpuno reducibilna REP)
Ako pored V_1 postoji i drugi invarijantni potprostor V_2 tako da je $V = V_1 \oplus V_2$ tada reprezentaciju Γ možemo rastaviti na direktni zbroj $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ i kažemo da je ona potpuno reducibilna.

Teorem 5 (Maschke)
Sve reducibilne reprezentacije konačne grupe su i potpuno reducibilne.

Dokaz u dva koraka:
1) Svaka REP konačne grupe je ekvivalentna nekoj unitarnoj REP
2) Svaka *unitarna* reducibilna REP je potpuno reducibilna

Korak 1: Definiramo "grupni" skalarni produkt dvaju vektora iz V na slijedeći način:

$$\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \equiv \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \big(D(g)\boldsymbol{x}, D(g)\boldsymbol{y}\big) \ ,$$

gdje je n red grupe G, a (,) uobičajeni skalarni produkt na V. Sumacija ide preko svih elemenata grupe G. Grupni skalarni produkt { , } zadovoljava sve aksiome skalarnog produkta. (Provjerite!) Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
\{D(h)\boldsymbol{x}, D(h)\boldsymbol{y}\} &\overset{(\text{def.})}{=} \frac{1}{n} \sum_{g} \big(D(g)D(h)\boldsymbol{x}, D(g)D(h)\boldsymbol{y}\big) \\
&\overset{(D \text{ je rep.})}{=} \frac{1}{n} \sum_{g} \big(D(gh)\boldsymbol{x}, D(gh)\boldsymbol{y}\big) \\
&= gh \to k \ ; \quad \text{teorem o razmještaju} \ ; \quad \sum_{g} \to \sum_{k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k} \big(D(k)\boldsymbol{x}, D(k)\boldsymbol{y}\big) \\
&= \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}
\end{aligned}$$

Dakle, operatori $D(g)$ su unitarni obzirom na grupni skalarni produkt { , }. No, nas nas zanima unitarnost obzirom na obični skalarni produkt (,). Uzmimo sada da je

$$\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{e}_i\} \quad \text{ortonormirana baza obzirom na} \quad (\ ,\ ) \\
&\{\boldsymbol{f}_i\} \quad \text{ortonormirana baza obzirom na} \quad \{\ ,\ \}
\end{aligned}$$

i S operator koji povezuje baze: $S\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{f}_i$. Tada je

$$\begin{aligned}\{S\boldsymbol{x}, S\boldsymbol{y}\} &= \{Sx_i\boldsymbol{e}_i, Sy_j\boldsymbol{e}_j\} \\ &= x_i^* y_j \underbrace{\{\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j\}}_{=\delta_{ij}=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)} \\ &= (x_i\boldsymbol{e}_i, y_j\boldsymbol{e}_j) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\end{aligned}$$

tj. S povezuje grupni i obični skalarni produkt. Ako sada pomoću ovog operatora S definiramo ekvivalentnu reprezentaciju $U(g) \equiv S^{-1}DS$ imamo

$$\begin{aligned}\big(U(g)\boldsymbol{x}, U(g)\boldsymbol{y}\big) &= \big(S^{-1}D(g)S\boldsymbol{x}, S^{-1}D(g)S\boldsymbol{y}\big) \\ &= \{D(g)S\boldsymbol{x}, D(g)S\boldsymbol{y}\} \qquad [S \text{ povezuje skalarne produkte}] \\ &= \{S\boldsymbol{x}, S\boldsymbol{y}\} \qquad [D(g) \text{ je unitaran obzirom na grupni skalarni produkt}] \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad [S \text{ povezuje skalarne produkte}]\end{aligned}$$

Dakle $U(g)$ je unitarna reprezentacija.

Korak 2: Treba pokazati da je reducibilna unitarna reprezentacija uvijek potpuno reducibilna. Ako je $U(g)$ reducibilna to znači da postoji V_1 takav da $\forall \boldsymbol{x} \in V_1$ i $\forall g\ U(g)\boldsymbol{x} \in V_1$.

Izaberimo sada ortonormiranu bazu $\{\boldsymbol{e}_i\}$ tako da $\{\boldsymbol{e}_i, i = 1, \ldots, n\}$ razapinju V_1, a $\{\boldsymbol{e}_i, i = n+1, \ldots, n+m\}$ su preostali vektori koji kompletiraju bazu od V. Vektori $\{\boldsymbol{e}_i, i = n+1, \ldots, n+m\}$ razapinju V_2 — ortogonalni komplement od V_1.

Da bi se pokazala potpuna reducibilnost reprezentacije $U(g)$ treba pokazati da je i V_2 invarijantan na djelovanje reprezentacije tj. da $\forall \boldsymbol{y} \in V_2$ i $\forall g$ vrijedi $U(g)\boldsymbol{y} \in V_2$.

Zbog unitarnosti $U(g)$ vrijedi $(U(g)\boldsymbol{y}, U(g)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, za sve $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ pa onda i posebno za $\boldsymbol{x} = U(g)^{-1}\boldsymbol{x}' \in V_1$ i $\boldsymbol{y} \in V_2$. Dakle, $(U(g)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{y}, U(g)^{-1}\boldsymbol{x}') = 0$ zbog ortogonalnosti $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{x}$. No zbog invarijantnosti V_1 i $\boldsymbol{x}'$ je element od V_1. Dakle iz $(U(g)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}') = 0$ i usljed proizvoljnosti $\boldsymbol{y} \in V_2$ i $\boldsymbol{x}' \in V_1$ slijedi da je i V_2 invarijantan. Q.E.D.

- Osim za konačne grupe ovaj teorem vrijedi i za kontinuirane (Lieve) grupe ako imaju neko od slijedećih svojstava

- unitarnost (u drugom koraku dokaza nismo koristili konačnost)
- kompaktnost, $(1/g)\sum_g \to \int_g dg$
- povezanost, nekompaktnost i polujednostavnost (cf. [5], p.79)

Definicija 18 (Ireducibilna reprezentacija)
Reprezentacija Γ na vektorskom prostoru V je ireducibilna *(IRREP) ako V nema invarijantnih potprostora izuzev $\{0\}$ i samog sebe.*

- Identifikacija svih mogućih IRREPsa date grupe te rastav proizvoljne reprezentacije na direktni zbroj IRREPsa

$$\Gamma = \sum_i \oplus \Gamma_i$$

su nam glavni zadaci za slijedeće poglavlje.

Zadaci

2.1 Konstruirajte tri različite jednodimenzionalne reprezentacije grupe C_3.

2.2 Pokažite da je $\Gamma^* = \{D(g)^*\}$ reprezentacija ako je $\Gamma = \{D(g)\}$ reprezentacija.

2.3 Zbrajajući dvije 1D reprezentacije od C_2:

$$\Gamma_1 = \{1, 1\} \qquad i \qquad \Gamma_2 = \{1, -1\} \tag{2.2}$$

konstruirajte 2D reprezentaciju od C_2.

2.4 Dvije 2D reprezentacije od od C_2 su

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Konstruirajte njihov direktni zbroj i produkt.

2.5 Pokažite da

$$D(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

generira 2D reprezentaciju grupe C_3. Pokažite da je ova reprezentacija ireducibilna nad poljem realnih brojeva.

2.6 Uvjerite se da grupa $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}, \cdot)$ može biti vjerno reprezentirana na 2D vektorskom prostoru reducibilnom reprezentacijom

$$\Gamma = \{D(g)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ln g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pokažite da ova reprezentacija nije potpuno reducibilna.

2.7 Pet funkcija $f(x, y)$

$$\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$$

čine bazu peterodimenzionalnog vektorskog prostor V. Neka je $\Gamma = \{D(g)\}$ reprezentacija grupe D_3 na V definirana uobičajenim transformacijama dvodimenzionalnih vektora (x, y), kao u (2.1). To npr. znači:

$$\begin{aligned} D(c) : x^3y &\mapsto \left(x \cos\frac{2\pi}{3} - y \sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 \left(x \sin\frac{2\pi}{3} + y \cos\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{16}\, x^4 - \frac{1}{2}\, x^3y - \frac{3\sqrt{3}}{8}\, x^2y^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}\, y^4 \end{aligned}$$

itd.

a) Odredite matricu $D(b)$ u gornjoj bazi.

b) Odredite matricu $D(c)$ u gornjoj bazi..

c) Pokažite da je Γ reducibilna tako što ćete identificirati invarijantni potprostor od V.

2.8 Neka je P operator projekcije na potprostor $V_1 \subset V$ (dakle operator sa svojstvima $P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ za $\boldsymbol{v} \in V_1$ i $P\boldsymbol{w} = 0$ za $\boldsymbol{w}$ iz ortogonalnog komplementa od V_1 u V. Oćito je $P^2 = P$. Pokažite da je reprezentacija $\Gamma = \{D(g)\}$

- reducibilna ako i samo ako je $PD(g)P = D(g)P$, $\forall g \in G$, te
- potpuno reducibilna ako i samo ako je $PD(g) = D(g)P$, $\forall g \in G$.

Primijenite ovo na zadatak 6.

Poglavlje 3

Svojstva ireducibilnih reprezentacija

3.1 Schurove leme i relacije ortogonalnosti

Sva ključna svojstva ireducibilnih reprezentacija slijede iz dvije Schurove leme.

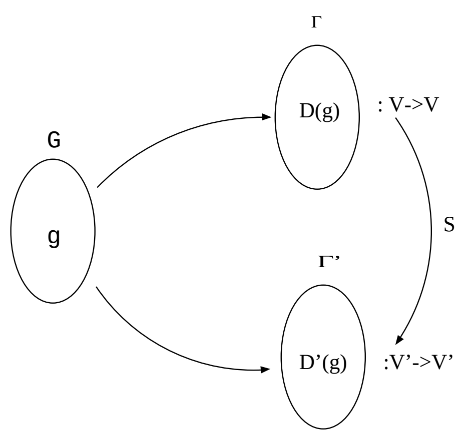
Teorem 6 (Prva Schurova lema)
Neka operator S povezuje dvije ireducibilne reprezentacije $\Gamma = \{D(g)\}$ i $\Gamma' = \{D'(g)\}$:

$$SD(g) = D'(g)S \quad \forall g \in G \ .$$

Tada je ili $S = 0$ ili je S invertibilan i imamo

$$D(g) = S^{-1}D'(g)S$$

tj. dvije su reprezentacije ekvivalentne. (Mogućnost da je S singularan, ali ne i nul-operator je isključena.)



Dokaz*:

-$S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in V'$

-$S(V) = \{S\boldsymbol{x} \quad | \quad x \in V\}$ je potprostor od V' (Sva potrebna svojstva $S(V)$ nasljeđuje od V', a zatvorenost i egzistencija inverza su posljedice linearnosti operatora S.)

-$D'(g)S\boldsymbol{x} = SD(g)\boldsymbol{x} \in S(V) \ \Rightarrow\ S(V)$ je invarijantni potprostor od V'

-Kako je $\{D'(g)\}$ IRREP, $\Rightarrow\ S(V) = \{\mathbf{0'}\}$ ili $S(V) = V'$

1) $S(V) = \{\mathbf{0'}\} \ \Rightarrow\ S = 0$

2) $S(V) = V'$ tj. S je surjekcija – Promotrimo Ker(S)

- Ker(S) je potprostor od V (trivijalno, linearnost od S)
- $\boldsymbol{k}$ ∈Ker(S) $\Rightarrow\ SD(g)\boldsymbol{k} = D'(g)S\boldsymbol{k} = \mathbf{0'} \ \Rightarrow\ D\boldsymbol{k}$ ∈Ker(S) $\Rightarrow$ Ker(S) je invarijantni potprostor; $\{D(g)\}$ je IRREP $\Rightarrow$ Ker(S)= $\{\mathbf{0}\}$ ili Ker(S)=V
- Ker(S)= V ne može biti jer onda ne bi bilo $S(V) = V'$ već $S(V) = \mathbf{0'}$
- $\Rightarrow$ Ker(S)= $\{\mathbf{0}\}$ pa je S i injekcija te ima inverz $\Rightarrow\ D(g) = S^{-1}D'(g)S$

Teorem 7 (Druga Schurova lema)
Operator koji komutira sa svim operatorima neke ireducibilne reprezentacije je nužno proporcionalan jediničnom operatoru (identiteti).

$$D(g)S = SD(g) \quad \forall g \in G \ \Rightarrow\ S = \lambda 1$$

Dokaz:*

- $\exists \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \quad | \quad S\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ (Egzistencija barem jednog takvog vektora je ne sasvim trivijalan rezultat iz linearne algebre: Egzistenciju garantira postojanje rješenja karakteristične jednadžbe $\det(S - \lambda 1) = 0$, što je opet garantirano fundamentalnim teoremom algebre, za $\lambda \in \mathbb{C}$.)

- $\Rightarrow\ (S - \lambda 1)\boldsymbol{x} = 0 \ \Rightarrow\ (S - \lambda 1)$ je singularna matrica (neki vektor $\neq \mathbf{0}$ preslikava u $\mathbf{0'}$ pa nije injekcija)

- No, $[S - \lambda 1, D(g)] = 0 \ \Rightarrow\ S - \lambda 1 = 0$ po prvoj lemi. Slijedi $S = \lambda 1$.

Relacije ortogonalnosti

Promotrimo sada dvije IRREPs: Γ_α i Γ_β. Ako je $\alpha \neq \beta$ podrazumijevamo da su reprezentacije neekvivalentne.

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)} &: V^{(\alpha)} \to V^{(\alpha)} \\ D^{(\beta)} &: V^{(\beta)} \to V^{(\beta)} \\ A &: V^{(\beta)} \to V^{(\alpha)} \qquad \text{proizvoljni operator} \end{aligned}$$

Definirajmo matricu:

$$B \equiv \sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(g) A D^{(\beta)}(g^{-1}) ,$$

gdje je A proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija. Pokazat ćemo da B zadovoljava pretpostavke Schurovih lema. Uzimimo proizvoljni element $h \in G$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
D^{(\alpha)}(h)B &= \sum_{g} D^{(\alpha)}(h) D^{(\alpha)}(g) A D^{(\beta)}(g^{-1}) \\
&= \sum_{g} D^{(\alpha)}(hg) A D^{(\beta)}(g^{-1}) \\
&= (\text{zamjenom } hg \equiv g' \,,\; g^{-1} = g'^{-1}h) \\
&= \sum_{g'} D^{(\alpha)}(g') A D^{(\beta)}(g'^{-1}h) \\
&= \sum_{g'} D^{(\alpha)}(g') A D^{(\beta)}(g'^{-1}) D^{(\beta)}(h) \\
&= B D^{(\beta)}(h)
\end{aligned}$$

U slučaju $\alpha \neq \beta$ (Γ_α i Γ_β nisu ekvivalentne), iz prve Schurove leme slijedi da je $B = 0$. Ako je pak $\alpha = \beta$, tj. $D^{(\alpha)}(h) = D^{(\beta)}(h)$ onda iz druge Schurove leme slijedi $B = \lambda 1$. Ove se dvije tvrdnje mogu kompaktno ujediniti u relaciju

$$B = \sum_{g} D^{(\alpha)}(g) A D^{(\beta)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta} 1 ,$$

odnosno, po komponentama,

$$\sum_{g} D_{ir}^{(\alpha)}(g) A_{rs} D_{sl}^{(\beta)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta} 1_{il}$$

A je bila proizvoljna matrica. Uzmimo sada konkretnije na mjesto A matricu $A^{(j,k)}$ koja je svugdje nula osim što joj je element $A_{jk}^{(j,k)} = 1$:

$$A^{(j,k)} = \begin{array}{cc} & \cdots k \cdots \\ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} & \begin{pmatrix} & \cdot & \\ & \cdot & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_{rs}^{(j,k)} = \delta_{rj} \delta sk$$

Upotrebom te matrice u gornjoj relaciji dobivamo

$$\sum_{g} D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{kl}^{(\beta)}(g^{-1}) = \lambda_{jk}^{(\alpha)} \delta^{\alpha\beta} 1_{il} .$$

Sada treba odrediti λ_{jk}. Stavimo ovdje $\alpha = \beta$ i uzmimo trag po il indeksima

$$\sum_g D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{ki}^{(\alpha)}(g^{-1}) = \lambda_{jk}^{(\alpha)} \delta^{\alpha\alpha} \dim(V^{(\alpha)}) \equiv \lambda_{jk}^{(\alpha)} d_\alpha$$

S druge strane, to je također jednako

$$\sum_g D(g^{-1}g)_{kj} = \sum_g 1_{kj} = \delta_{kj} \sum_g = \delta_{kj} n \ .$$

Ovdje je n red grupe G. Slijedi da je

$$\lambda_{jk}^{(\alpha)} = \frac{n}{d_\alpha} \delta_{kj} \ ,$$

što daje *temeljni teorem o ortogonalnosti* matrica ireducibilnih reprezentacija:

$$\sum_g D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{kl}^{(\beta)}(g^{-1}) = \frac{n}{d_\alpha} \delta^{\alpha\beta} \delta_{il} \delta_{kj} \ .$$

Nadalje, uvijek možemo uzeti da je $D^{(\alpha)}(g)$ unitarna matrica

$$\sum_g D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{lk}^{(\beta)}(g)^* = \frac{n}{d_\alpha} \delta^{\alpha\beta} \delta_{il} \delta_{kj} \ .$$

Stavimo ovdje $\alpha = \beta$ i promotrimo skup od d_α^2 vektora $\boldsymbol{x}_{ij}$ iz novog n-dimenzionalnog vektorskog prostora, čije su komponente dane komponentama matrica reprezentacije:

$$\boldsymbol{x}_{ij} \equiv (D_{ij}^{(\alpha)}(g_1), D_{ij}^{(\alpha)}(g_2), \ldots, D_{ij}^{(\alpha)}(g_n))$$

(Ne miješati ovaj prostor s V^α koji je dimenzije d_α!) Zbog

$$\sum_g D_{ij}^{(\alpha)}(g) D_{lk}^{(\alpha)}(g)^* = (\boldsymbol{x}_{lk}, \boldsymbol{x}_{ij}) = \frac{n}{d_\alpha} \delta_{il} \delta_{kj}$$

vektori $\boldsymbol{x}_{ij}$ su međusobno ortogonalni.

Za neku drugu ireducibilnu reprezentaciju $\Gamma_{(\alpha')}$ imamo novih $d_{\alpha'}^2$ vektora koji su ortogonalni međusobno, ali i obzirom na prvih d_α^2 vektora. Treća IRREP daje novih $d_{\alpha''}^2$ itd. No, maksimalan broj ortogonalnih vektora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru je n

$$\sum_\alpha d_\alpha^2 \leq n$$

pa kako je svaka IRREP barem 1D imamo $\sum_\alpha d_\alpha \leq n$ tj. broj IRREPsa je manji ili jednak broju elemenata grupe..

Štoviše, vrijedi (vidi literaturu):

$$\sum_\alpha d_\alpha^2 = n$$

Da bismo odredili broj IRREPsa grupe, treba nam pojam *karaktera* reprezentacije.

Definicija 19 (Karakter reprezentacije)
Karakter χ *reprezentacije* $\Gamma = \{D(g)\}$ *grupe* G *je skup* $\chi = \{\chi(g) = \mathrm{Tr}\, D(g) \quad | \quad g \in G\}$.

Svojstva:

- $\mathrm{Tr}\, SD(g)S^{-1} = \mathrm{Tr}\, D(g)$ - zbog cikličnosti traga $\Rightarrow$ ekvivalentne REP imaju iste karaktere

- Bez dokaza: vrijedi i obrat: isti karakteri $\Rightarrow$ ekvivalentne REP (Ali taj obrat se ne poopćuje na beskonačne kontinuirane grupe, osim ukoliko nisu kompaktne, vidi [5] p. 302)

- $\chi(g) = \mathrm{Tr}\, D(g) = \mathrm{Tr}\, D(h)D(g)D^{-1}(h) = \mathrm{Tr}\, D(hgh^{-1}) \to$ konjugirani elementi imaju iste karaktere (Oprez: Treba razlikovati karakter reprezentacije χ od njegove komponente $\chi(g)$ koju isto često zovemo karakter — karakter elementa.)

- za unitarnu REP $\chi(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\, D(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\, D^\dagger = \chi^*(g)$

Teorem o ortogonalnosti $/\delta_{ij}\delta_{kl}$

$$\sum_g \chi^{(\alpha)}(g)\chi^{(\beta)}(g)^* = \frac{n}{d_\alpha}\delta^{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{ki} = \frac{n}{d_\alpha}\delta^{\alpha\beta}d_\alpha = n\delta^{\alpha\beta}$$

Definiramo li skalarni produkt karaktera

$$(\chi, \phi) \equiv \frac{1}{n}\sum_g \chi(g)\phi(g)^* = (\phi, \chi) ,$$

imamo

$$(\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}) = \delta^{\alpha\beta}$$

tj. karakteri neekvivalentnih IRREPsa su ortonormirani.

Neka je sada k_i broj elemenata u i-toj klasi konjugacije grupe G. Tada, budući da su karakteri svih elemenata jedne klase konjugacije isti imamo

$$(\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i^{(\alpha)}\chi_i^{(\beta)*} = \delta^{\alpha\beta} .$$

što je iskaz ortogonalnosti vektora u k-dimenzionalnom vektorskom prostoru, gdje su sada vektori

$$\boldsymbol{\chi}^{(\alpha)} = (\chi_1^{(\alpha)}, \chi_2^{(\alpha)}, \ldots, \chi_k^{(\alpha)})$$

Svaka IRREP daje jedan takav k-dimenzionalni vektor. Istim logičkim slijedom kao i ranije ova ortogonalnost vodi na zaključak da je broj IRREPsa manji ili jednak broju klasa konjugacije. Štoviše, vrijedi (vidi literaturu) ortogonalnost vektora:

$$\boldsymbol{\chi}_i = (\chi_i^{(\alpha)}, \chi_i^{(\beta)}, \ldots)$$

tj.

$$\frac{1}{n}\sum_\alpha k_i \chi_i^{(\alpha)}\chi_j^{(\alpha)*} = \delta_{ij}$$

što na isti način daje suprotnu nejednakost da je broj klasa konjugacije manji ili jednak broju IRREPsa. Dakle, broj IRREPsa je upravo jednak broju klasa konjugacije!

3.2 Tablice karaktera

Tablica karaktera neke grupe je tablica strukture

	Klase konjugacije
IRREPs	χ

Ona često daje dovoljno informacija za praktične primjene, a može se pomoću slijedećih pravila konstruirati i bez eksplicitnog poznavanja matrica reprezentacije.

Pravila za konstrukciju tablice karaktera

1. Broj ireducibilnih reprezentacija jednak je broju klasa konjugacije grupe. Iz ovoga slijedi da tablica ima jednak broj redova i stupaca. Broj klasa pronalazimo "pješke," analizom grupe.

2. $\sum_\alpha d_\alpha^2 = n$ često ima jedinstveno rješenje koje određuje dimenzionalnosti d_α ireducibilnih reprezentacija.

3. Jedinični element grupe je klasa za sebe, a reprezentiran je uvijek jediničnom matricom $D^{(\alpha)}(e) = 1$ čiji je karakter $\chi^{(\alpha)}(e) = d_\alpha$. Ovo određuje jedan (konvencionalno prvi) stupac tablice.

4. Uvijek postoji trivijalna jednodimenzionalna ireducibilna reprezentacija $D(g) = \chi(g) = 1\ \forall g \in G$. Dakle jedan red (konvencionalno prvi) se sastoji od samih jedinica.

5. Za jednodimenzionalne reprezentacije vrijedi $D(g) = \chi(g)$ pa sami karakteri reprezentiraju grupu i njihovo množenje mora odražavati množenje odgovarajućih elemenata grupe.

6. $$\sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i^{(\alpha)} \chi_i^{(\beta)*} = n\delta^{\alpha\beta}$$

   (*Redovi* tablice su ortogonalni i, kad se uzmu u obzir težinski faktori k_i, normirani su na n)

7. $$\sum_{\alpha=1}^{k} k_i \chi_i^{(\alpha)} \chi_j^{(\alpha)*} = n\delta_{ij}$$

   (*Stupci* tablice su ortogonalni i, kad se uzmu u obzir težinski faktori k_i, normirani su na n)

Pravila je najbolje primjenjivati po redu jer su ona s većim rednim brojem teža za primjenu i rjeđe nužna za kompletiranje tablice.

Primjer 21 (D_3)
Klase konjugacije su (vidi raniji primjer iz odjeljka 1.2):

$K_1 = \{e\}$

$K_2 = \{c, c^2\}$

$K_3 = \{b, bc, bc^2\}$

1. pravilo $\Rightarrow$ 3 IRREPsa

2. $\Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{3} d_\alpha^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = n = 6$
$\Rightarrow$ $d_1 = d_2 = 1, d_3 = 2$

3. $\Rightarrow$ prvi stupac: 1, 1, 2

4. $\Rightarrow$ prvi red: 1, 1, 1

	K_1	$2K_2$	$3K_3$
Γ_1			
Γ_2			
Γ_3			

5. $\chi^{(2)}(b)\chi^{(2)}(c) = \chi^{(2)}(bc), \chi(b) = \chi(bc)$
$\Rightarrow$ $\chi(c) = 1$
$\chi(b)\chi(b) = \chi(b^2) = \chi(e) = 1$ $\Rightarrow$ $\chi(b) = \pm 1$

6. Kad bi bilo $\chi^{(2)}(b) = 1$ prva dva reda bi bila jednaka, a ne ortogonalna. $\Rightarrow$ $\chi^{(2)}(b) = -1$.

$\sum_{i=1}^{3} k_i \chi_i^{(3)} \chi_i^{(1)*} = 2 + 2a + 3b = 0$
$\sum_{i=1}^{3} k_i \chi_i^{(3)} \chi_i^{(2)*} = 2 + 2a - 3b = 0$
$\Rightarrow$ $a = -1, b = 0$

- obično se za označavanje IRREPsa i klasa koriste kristalografske oznake iz priloga.

	E	$2C_3$	$3C_2$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

Primjer 22 (C_3)
Abelova grupa, svaki element je klasa : e, c, c^2

Dakle, tri klase i $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = n = 3$ pa su sve tri IRREP 1D.

Prvi red i prvi stupac: sve jedinice

5. pravilo: $\chi(c)^3 = \chi(c^3) = \chi(e) = 1$ $\Rightarrow$ $\chi(c) = \exp(2\pi ik/3), k = 0, 1, 2$

$\chi(c) = 1, \omega = e^{2\pi i/3}, \omega^2$

	E	$c = C_3$	$c^2 = C_3^2$
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	ω	ω^2
$D^{(3)}$	1	ω^2	ω

- provjeriti ortogonalnost

$\omega^2 = \omega^* \;\Rightarrow\; D^{(2)}$ i $D^{(3)}$ su kompleksno konjugirane reprezentacije. (Sve smo to već vidjeli ranije u vježbama.)

Zgodno je uočiti da neabelovska grupa D_3 ima i dvodimenzionalnu, dakle matričnu, ireduciblinu reprezentaciju. To je logično jer neabelovsko svojstvo ne može biti vjerno reprezentirano jednodimenzionalnim reperezentacijama.

3.3 Dekompozicija reducibilnih reprezentacija

Uzmimo neku reprezentaciju Γ. Po definiciji,

$$\Gamma = \Gamma^{(1)} \oplus \Gamma^{(2)} \oplus \cdots = \sum_{\alpha} a_\alpha \Gamma^\alpha$$

gdje su Γ^α IRREPsi i gdje je a_α *multiplicitet* (broj pojavljivanja) IRREPsa Γ^α u Γ.

Tr / $\Rightarrow\; \chi_i = \sum_\alpha a_\alpha \chi_i^{(\alpha)} \quad \forall i$

$\sum_{i=1}^k k_i \chi_i^{(\beta)*} / \;\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^k k_i \chi_i \chi_i^{(\beta)*} = \sum_\alpha a_\alpha \sum_{i=1}^k k_i \chi_i^{(\alpha)} \chi_i^{(\beta)*} = \sum_\alpha a_\alpha n \delta^{\alpha\beta} = n a_\beta$

$$a_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i \chi_i^{(\alpha)*} = (\chi^{(\alpha)}, \chi)$$

Primjer 23 (REP Γ_V od D_3 na 3D euklidskom prostoru)
Pod Γ_V misli se "vektorska" REP, tj. REP koja djeluje na pravim 3D vektorima, za razliku od "nepravih" aksijalnih pseudovektora. $D^V(e) = \mathrm{diag}(1,1,1)$

$D^V(c) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D^V(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ - rotacija za π oko y

... je reducibilna reprezentacija. Koji je njen rastav na IRREPse? $\chi = (3, 0, -1)$

$a_{A_1} = (\chi, \chi^{(A_1)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 k_i \chi_i \chi_i^{(A_1)*} = \frac{1}{6}(1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1) = 0$

$a_{A_2} = (\chi, \chi^{(A_2)}) = \frac{1}{6}(1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)) = 1$

$a_E = (\chi, \chi^{(E)}) = \frac{1}{6}(1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot 0) = 1$

$\Gamma_V = A_2 \oplus E$

Koji su invarijantni potprostori?

$V^{(A_2)}$ je očito razapet vektorom $\hat{\boldsymbol{z}}$, a $\hat{\boldsymbol{x}}$ i $\hat{\boldsymbol{y}}$ razapinju 2D potprostor $V^{(E)}$. (Primijetite razliku prema C_3 kod koje je svaki vektor $\boldsymbol{v} = a\hat{\boldsymbol{z}}$ invarijantan. $\rightarrow$ dipolni momenti.)

Direktan zbroj dviju IRREPsa je po definiciji reducibilna REP. Što je s direktnim produktom?

Pokazali smo ranije da je direktan produkt dviju reprezentacija $\Gamma^{(1)} \otimes \Gamma^{(2)}$ grupe G također reprezentacija grupe G. Ona je u općenitom slučaju reducibilna:

$$\Gamma^{(\alpha)} \otimes \Gamma^{(\beta)} = \sum \oplus\, a_\gamma \Gamma^{(\gamma)} \qquad \text{- Clebsch-Gordanov razvoj}$$

Karakter direktnog produkta je produkt karaktera (očito ako pogledamo matrični izgled direktnog produkta). $\Rightarrow$

$$a_\gamma = (\chi^{(\gamma)}, \chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)})$$

Primjer 24 ($E \otimes E$ u D_3)
$\chi(E) = (2, -1, 0) \;\Rightarrow\; \chi(E \otimes E) = (4, 1, 0)$

$a_{A_1} = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0) = 1$

$a_{A_2} = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 0) = 1$

$a_E = \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0) = 1$

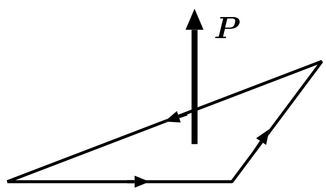
$E \otimes E = A_1 \oplus A_2 \oplus E$

3.4 Primjena: *Dipolni momenti kristala*

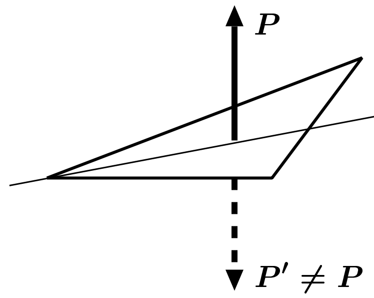
Da bi kristal mogao imati permanentni magnetski ili električni dipolni moment te veličine moraju biti invarijantne na grupu G simetrije kristala.

Dipolni momenti su *vektori* 3D euklidskog vektorskog prostora. Slijedi da je za egzistenciju dipolnih momenata nužno postojanje vektora invarijantnih na djelovanje grupe.

Npr. za kristal s C_3 simetrijom vektor $\boldsymbol{P}$ je invarijantan i to može biti smjer dipolnog momenta takvog kristala. $\boldsymbol{P} \neq 0$ ne narušava C_3 simetriju.



S druge strane, veća D_3 simetrija ukida takvu mogućnost. b-rotacija mijenja $\boldsymbol{P} \to -\boldsymbol{P}$ pa bi $\boldsymbol{P} \neq 0$ narušilo simetriju.



Simetrični kristal ne može "proizvesti" nesimetrični dipolni moment.

Grupno-teorijski iskaz ovog: *Reprezentacija grupe G na vektorskom prostoru (potencijalnih) vektora dipolnog momenta mora biti trivijalna tj. identiteta*:

$$D(g) = 1 \quad \forall g \in G \, .$$

Dakle, da bi kristal mogao imati $\boldsymbol{P} \neq 0$, reprezentacija grupe G na 3D euklidskom vektorskom prostoru mora u svojoj dekompoziciji na IRREPse sadržavati identitetu.

Vidjeli smo u prošlom odjeljku da je REP Γ_V od D_3 na 3D euklidskom vektorskom prostoru

$$\Gamma_V = A_2 \oplus E \, .$$

Nema A_1 (identitete) $\Rightarrow$ nema dipolnog momenta.

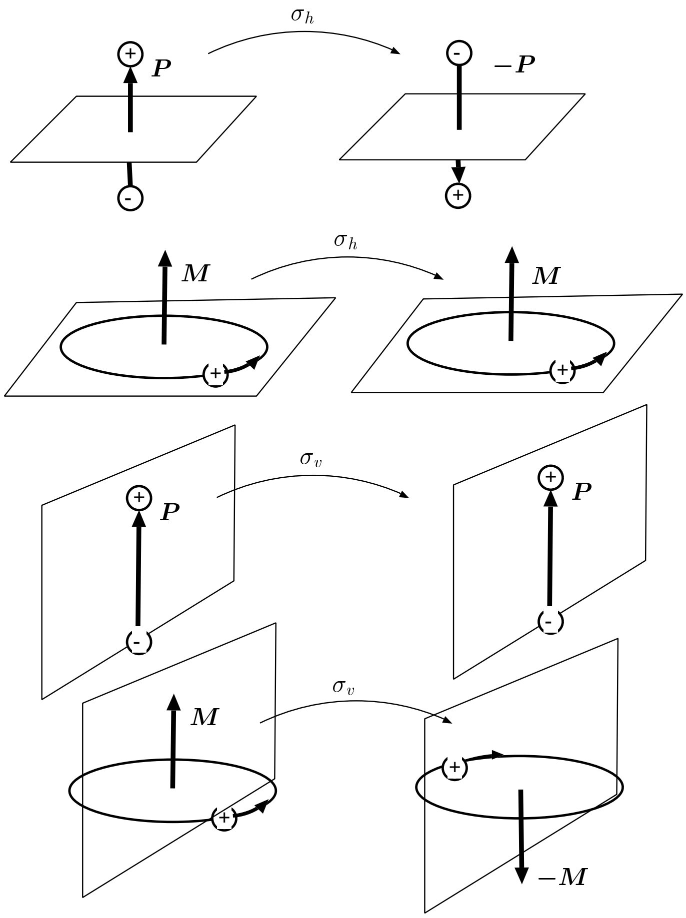
S druge strane, za C_3 imamo (D.Z.)

$$\Gamma_V = A_1 \oplus E \, .$$

$\Rightarrow$ postoji mogućnost dipolnog momenta.

Aksijalni vektori

Kad grupa pored rotacija sadrži i refleksije (σ, S_n, i) treba uzeti u obzir činjenicu da je magnetski moment $\boldsymbol{M}$ aksijalni vektor (vidi Dodatak 3.7) koji se pri takvim transformacijama ponaša obrnuto od običnog (polarnog) vektora električnog dipolnog momenta:



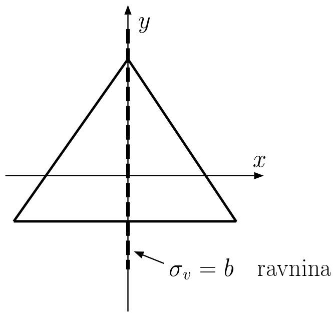
(D.Z. Razmislite zašto ogledalo izvrće lijevo-desno, a ne i gore-dolje? kad je $\sigma_{v_{\text{ogledalo u } x-z \text{ ravnini}}} : (x, y, z) \to (x, -y, z)$?)

Primjer 25 (Kristal s C_{3v} simetrijom)
Grupa C_{3v} je izomorfna grupi D_3, jedino što b nije rotacija za $\pi/2$ oko horizontalne osi već refleksija oko vertikalne ravnine koja sadrži C_3 os.

Reprezentacija elemenata e, c i c^2 je kao na strani 18,

$$D(c) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

s karakterima $\chi^V(e) = \dim\Gamma_V = 3$, $\chi^V(c) = 0$, a ako osi izberemo kao na slici



onda je

$$D^V(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s karakterom $\chi^V(b) = 1$.

(Za D_3 grupu bi bilo $D^V(b) = diag(-1, 1, -1)$, s karakterom $\chi^V(b) = -1$.)

Kako je grupa izomorfna grupi D_3 ima istu tablicu karaktera (usput, obrat ne vrijedi, Q i T_d imaju iste tablice, a nisu izomorfne). Dakle, imamo:

	E	$2C_3$	$3C_2$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0
Γ_V	3	0	1

Iz ovog onda slijedi

$$\Gamma_V = A_1 \oplus E$$

- U rastavu se javlja A_1 $\Rightarrow$ moguć je permanentni *električni* dipolni moment.

Za aksijalne vektore, reprezentacije elemenata e, c, c^2 su iste kao i gore, ali za $D^A(b)$ imamo suprotno od $D^V(b)$:

$$D^A(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

s karakterom $\chi^A(b) = -1$. (Oblik matrice se može naći i iz razmatranja djelovanja σ_v na aksijalni vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ gdje su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ pravi vektori: $\sigma_v : (a_x, a_y, a_z) \to (-a_x, a_y, a_z)$, $\sigma_v : (b_x, b_y, b_z) \to (-b_x, b_y, b_z) \Rightarrow \sigma_v : (c_x, c_y, c_z) \to (c_x, -c_y, -c_z)$.)

Dakle, ukupni karakter je $\chi^A = (3, 0, -1)$ odnosno

$$\Gamma_A = A_2 \oplus E$$

Tu nema identitete A_1 pa ne može biti ni permanetnog *magnetskog* dipolnog momenta.

3.5 Primjena: *Degeneracija i cijepanje energijskih nivoa*

Transformacije u kvantnoj mehanici:

$$\psi' = U\psi \qquad \text{za stanja — vektore}$$
$$A' = U^{-1}AU \qquad \text{za operatore}$$

U — operator transformacije. Kvantnomehanički sustav, zadan hamiltonijanom H_0, je *simetričan* obzirom na skup transformacija $\{U(g_1), U(g_2), \ldots, U(g_n)\}$ ako transformacije ne mijenjaju hamiltonijan (on, možemo reći, putem Schrödingerove jednadžbe definira "izgled" sustava)

$$U^{-1}(g)H_0U(g) = H_0 \quad \forall g \in \{g_1, \ldots, g_n\} \ .$$

Ekvivalentno, tada $U(g)$ i H_0 komutiraju:

$$H_0U(g) = U(g)H_0 \quad \forall g \in \{g_1, \ldots, g_n\} \ .$$

Skup svih operatora s ovim svojstvom čini grupu (provjerite!) tj. reprezentaciju grupe $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ na prostoru kvantnomehaničkih stanja.

Stanje sustava s dobro definiranom energijom $\psi_n(\boldsymbol{x})$ zove se *stacionarno stanje* i dano je kao rješenje vremenski neovisne Schrödingerove jednadžbe

$$H_0\psi_n(\boldsymbol{x}) = E_n\psi(\boldsymbol{x}) \ .$$

Energija transformiranih stanja $\psi'_n(\boldsymbol{x}) = U(g)\psi_n(\boldsymbol{x})$ je odgovarajuća svojstvena vrijednost hamiltonijana

$$H_0\psi'_n(\boldsymbol{x}) = H_0U(g)\psi_n(\boldsymbol{x}) = U(g)H_0\psi_n(\boldsymbol{x}) = U(g)E_n\psi_n(\boldsymbol{x}) = E_n\psi'_n(\boldsymbol{x}) \ .$$

Dakle sva stanja $\psi'_n(\boldsymbol{x}) = U(g)\psi_n(\boldsymbol{x})$, $\forall g$ imaju istu energiju E_n. Pojavu kad više stanja ima istu energiju nazivamo *degeneracija*.

Skup stanja $\{U(g)\psi_n(\boldsymbol{x}) \,|\, g \in G\}$ dobivenih transformacijama datog stanja $\psi_n(\boldsymbol{x})$ razapinje potprostor vektorskog prostora svih stanja sustava. On je po definiciji invarijantan na djelovanje reprezentacije $\{U(g)\}$. Također, reprezentacija $\{U'(g)\}$ dobivena redukcijom reprezentacije $\{U(g)\}$ na ovaj potprostor je ireducibilna što slijedi iz načina na koji smo konstruirali potprostor. Takav potprostor naziva se *multiplet**.

Dakle, poznavajući sve IRREPse grupe simetrija nekog kvantnomehaničkog sustava možemo odrediti mogućnosti degeneracije njegovih stanja — one su jednake dimenzionalnostima IRREPsa.

Primjer 26 (oktahedralna grupa O)
- IRREPsi: $\underbrace{A_1, A_2}_{1D}, \underbrace{E}_{2D}, \underbrace{T_1, T_2}_{3D}$

- $\Rightarrow$ očekujemo jedno-, dvo- i trostruko degenerirane nivoe.

*Često ze izraz multiplet koristi i za samu bazu ovog potprostora.

$$\psi_{T_1,1}, \psi_{T_1,2}, \psi_{T_1,3}$$

$$\psi'_{A_2}$$

$$\psi_{A_1}$$

$$\psi_{E,1}, \psi_{E,2}$$

$$\psi_{A_2}$$

ψ'_{A_2} i ψ_{A_2} su linearno neovisne funkcije. Pronađemo li neki nivo s prevelikom degeneracijom, npr

$$\psi_{E,1}, \psi_{E,2}, \psi_{A_1}$$

to gotovo uvijek znači da nismo dobro identificirali grupu simetrija tj. da sustav ima veću simetriju nego što smo mislili.

Primjer 27 (Vodikov atom)
Stacionarna stanja su $\psi_{nlm}(\boldsymbol{x})$. G=SO(3) — sferna simetrija. U 6. poglavlju ćemo vidjeti da su multipleti oblika

$$\{\psi_{nl(-l)}, \psi_{nl(-l+1)}, \ldots, \psi_{nll}\} \qquad (2l+1 \text{ stanja}) \ .$$

$\Rightarrow$ očekujemo $(2l+1)$-struko degenerirane nivoe za svaki l. No, znamo da je zapravo degeneracija n^2-struka. Svaka ljuska ima n^2 stanja energije

$$E_n \propto \frac{1}{n^2} \qquad \text{neovisno o } l$$

"Slučajna" degeneracija nivoa s različitim l. U 6. poglavlju ćemo vidjeti da je razlog tome postojanje veće simetrije SO(4)=SO(3)⊗SO(3).

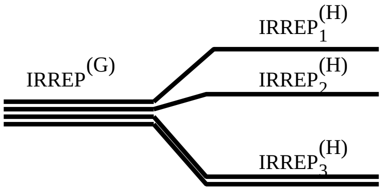
Cijepanje energijskih nivoa

Zamislimo sada da neka smetnja V promijeni hamiltonijan

$$H_0 \to H = H_0 + V \ ,$$

tako da je ukupni hamiltonijan H invarijantan na manju grupu $H < G$. (Npr. slabo električno polje u Starkovom efektu mijenja Hamiltonijan vodikovog atoma tako da mu doda član proprocionalan električnom polju i od originalne sferne simetrije preostaje samo aksijalna.)

IRREPsi od G nisu nužno i IRREPsi od H. Smanjenje broja transformacija $U(h)$, $h \in H$ može učiniti da neki potprosotri postanu invarijantni iako nisu bili invarijantni na potpun skup transformacija $U(g)$, $g \in G$. Tako su neke IRREPs od G reducibilne obzirom na H i nema razloga da nivoi koji odgovaraju dotičnim IRREPsima od G ostanu degenerirani



Poznavajući dekompoziciju $IRREP^{(G)}$ na $IRREP^{(H)}$

$$IRREP^{(G)} = (\text{reducibilna REP})^{(H)} = IRREP_1^{(H)} \oplus IRREP_2^{(H)} \oplus \cdots$$

možemo odrediti strukturu cijepanja. Za određivanje iznosa cijepanja koriste se metode kvantnomehaničkog računa smetnje.

Primjer 28 (Cijepanje T-nivoa tetrahedralne grupe T)
Karakter T-nivoa tetrahedralne grupe je

	E	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3'$
T	3	-1	0	0

Neka npr. sada kristal doživi fazni prijelaz tako da se simetrija smanji a) $T \to D_2$ ili b) $T \to C_{3v}$. Pogledajmo što se događa s gornjim četverostruko degeneriranim nivoom.

a)

	E	C_2^z	C_2^y	C_2^x
A_1	1	1	1	1
B_1	1	1	-1	-1
B_2	1	-1	1	-1
B_3	1	-1	-1	1
T	3	-1	-1	-1

Uobičajenim metodama dekompozicije reducibilnih reprezentacija dobivamo:

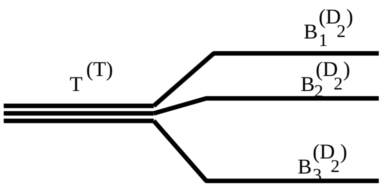
$$T = a_1 A_1 \oplus b_1 B_1 \oplus b_2 B_2 \oplus b_3 B_3$$

$$a_1 = \frac{1}{n} \sum_k \chi^{(A_1)}(k) \chi^{(T)^*}(k) = \frac{1}{4}\big(1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)\big) = 0$$

$b_1 = b_2 = b_3 = 1$

$$\Rightarrow \ T = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$$

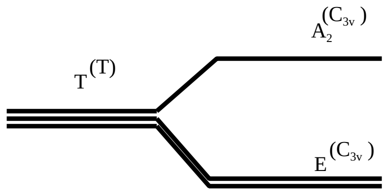
Dakle degeneracija je potpuno ukinuta



b) Isti postupak daje

$$T = A_2 \oplus E \ ,$$

tj. degeneracija je samo djelomično ukinuta.



3.6 Dodatak: *Kristalografske oznake*

Ireducibilne reprezentacije $\Gamma^{(\alpha)}$ se obično označavaju velikim slovima i to tako da se 1D reprezentacije označavaju slovima A i B, 2D reprezentacije slovom E, 3D reprezentacije slovom T itd. Par kompleksno konjugiranih 1D reprezentacija se smatra jednom 2D reprezentacijom (jer ih povezuje vremenska inverzija) tako da se one udružuju vitičastom zagradom i označavaju s E.

Klase konjugacije se obično označavaju simbolom mC_n gdje je m broj elemenata klase, a C_n tipični predstavnik klase označen Schönfliesovim simbolom:

E	=	identiteta
C_n	=	rotacija za $2\pi/n$
σ	=	refleksija preko ravnine
σ_h	=	refleksija preko "horizontalne" ravnine tj. ravnine okomite da os najveće rotacijske simetrije
σ_v	=	refleksija preko "vertikalne" ravnine tj. ravnine koja sadrži os najveće rotacijske simetrije
σ_d	=	refleksija preko "dijagonalne" ravnine tj. ravnine koja sadrži os najveće rotacijske simetrije i raspolavlja kut između dvije C_2 osi okomite na tu os. (Specijalni slučaj σ_v.)
S_n	=	rotacija za $2\pi/n$ kombinirana s refleksijom preko ravnine okomite na os te rotacije (Ove dvije operacije komutiraju.)
i	=	S_2 = inverzija $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$

Točkaste grupe kristala se označavaju slijedećim Schönfliesovim oznakama:

C_n	=	grupe s jednom C_n osi simetrije
C_{nv}	=	grupe s jednom C_n osi i n σ_v refleksijskih ravnina
C_{nh}	=	C_n os, σ_h refleksija + dodaci
S_n	=	S_n os
D_n	=	C_n os i n C_2 osi okomitih na nju
D_{nd}	=	elementi od D_n i σ_d ravnine refleksije
D_{nh}	=	elementi od D_n i σ_h ravnina refleksije
T	=	tetrahedralna grupa
O	=	oktahedralna grupa
$\cdots$		$\cdots$ itd. vidi literaturu

3.7 Dodatak: *Aksijalni vektori (pseudovektori)*

Aksijalni ili *pseudovektori* su objekti koji se pri rotacijama transformiraju isto kao i obični (tzv. *polarni*) vektori, ali pri refleksijama i inverzijama imaju još i dodatnu promjenu predznaka.

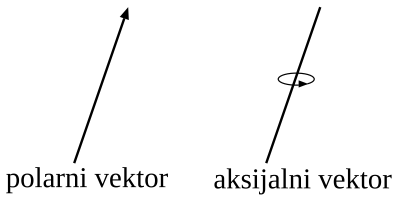
Inverzija običnim vektorima u 3D euklidskom prostoru mijenja predznak $i : \boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ i može se reprezentirati dijagonalnom matricom $i = -1 = \mathrm{diag}(-1, -1, -1)$.

No, vektorski produkt dvaju polarnih vektora, npr. vektora položaja $\boldsymbol{r}$ i impulsa $\boldsymbol{p}$ posljedično *ne mijenja* predznak:

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \xrightarrow{i} (-\boldsymbol{r}) \times (-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{L} \; ,$$

što znači da je $\boldsymbol{L}$ (moment impulsa) aksijalni vektor. (U fizici su veličine koje opisuju rotacije, poput momenta impulsa ili momenta sile, često reprezentirane aksijalnim vektorima. Isto vrijedi za veličine vezane uz magnetizam koji je obično rezultat kruženja (mikro ili makro) struja.)

Da bi se naglasila njihova različitost, ponegdje u literaturi se aksijalne vektore ne crta kao usmjerene crte (strelice), već kao crte s "aksijalnim strelicama" (cf. [7] p. 186)



Slično definiramo *pseudoskalarne* veličine kao one koje su skalari obzirom na rotacije, ali mijenjaju predznak pri refleksijama i inverzijama. Npr. miješani produkt polarnih vektora je pseudoskalar:

$$P = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{r}_2 \xrightarrow{i} -(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{r}_2 = -P$$

Magnetski moment, definiran kao $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{J} dV$ za gustoću struje J, odnosno kao $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2} q \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{v}$ za točkasti naboj q, je dakle aksijalni vektor.

Za još detalja o pseudovektorima i drugim pseudo-veličinama vidi npr. [8].

Zadaci

3.1 Konstruirajte 2D IRREP grupe D_3 koja djeluje na $x - y$ ravnini i provjerite temeljni teorem o ortogonalnosti.

3.2 Pokažite da su sve IRREP Abelovih grupa jednodimenzionalne.

3.3 Pokažite da je nužan i dovoljan uvjet ireducibilnosti reprezentacije Γ s karakterima χ_i tzv. Frobeniusov kriterij

$$\sum_i k_i |\chi_i|^2 = n \ ,$$

gdje je k_i broj elemenata u klasi konjugacije i.

3.4 Konstruirajte tablicu karaktera za grupu D_4

3.5 Pokažite da je direktni produkt dvije 1D IRREP uvijek IRREP.

3.6 Izrazite reprezentaciju Γ grupe C_{4v} koja ima karaktere

$$\chi(E) = 5 \ , \quad \chi(C_2) = 1 \ , \quad \chi(C_4) = -1 \ , \quad \chi(\sigma_v) = 1 \ , \quad \chi(\sigma_d) = -3 \ ,$$

kao zbroj IRREPsa.

Poglavlje 4

Simetrije u klasičnoj i kvantnoj mehanici

4.1 Transformacije i tenzori

Definicija 20
Fizikalna veličina je invarijantna *na neku transformaciju ako se pri toj transformaciji ne mijenja.*

Jednadžba koja opisuje fizikalni sustav je kovarijantna *na neku transformaciju ako se pri toj transformaciji njen* oblik *ne mijenja.*

Primjer: masa i naboj su invarijantne na rotacije.

Primjer: Newtonove jednadžbe za sustav dva tijela koja gravitiraju

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \tag{4.1}$$

$$m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = G \frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \tag{4.2}$$

su kovarijantne pri rotacijama. Uvjerimo se u to. Rotiramo za neki kut:

$$(\boldsymbol{r}_1)_i \to (\boldsymbol{r}'_1)_i = \sum_j R_{ij}(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta)(\boldsymbol{r}_1)_j \ , \qquad \text{(po komponentama)}$$

$$\text{tj.} \qquad \boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}'_1 = R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta)\boldsymbol{r}_1 \ , \qquad \text{(matrično)}$$

i isto za $\boldsymbol{r}_2$.

Ovdje je $R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta)$ standardna matrica rotacije u trodimenzionalnom prostoru, npr. za rotaciju oko z-osi

$$R(\hat{\boldsymbol{z}}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{4.3}$$

Sada iz (4.1) slijedi da je u transformiranim koordinatama jednadžba za npr. $\boldsymbol{r}_1'$

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1' &= m_1R\ddot{\boldsymbol{r}}_1 \\
&= G\frac{m_1m_2}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}(R\boldsymbol{r}_2 - R\boldsymbol{r}_1) \\
&= G\frac{m_1m_2}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1') \\
&= G\frac{m_1m_2}{|\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{r}_1'|^3}(\boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1') \ ,
\end{aligned}$$

i isto za $\boldsymbol{r}_2'$, gdje smo radi jednostavnosti prestali pisati argumente matrice rotacije $R = R(\boldsymbol{n}, \theta)$. Dakle, jednadžbe zarotiranog sustava imaju isti oblik (kovarijantne su) premda su konkrentne vektorske veličine u njima različite tj. $\boldsymbol{r}_{1,2}' \neq \boldsymbol{r}_{1,2}$.

Ova i daljnja diskusija podrazumijevaju da govorimo o *aktivnim* transformacijama koje djeluju na sam fizikalni sustav. U *pasivnom* pristupu u kojem transformiramo samo koordinatni sustav ovako napisane jednadžbe su *invarijantne* jer ako $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{F}$ promatramo kao elemente vektorskog prostora, a ne kao trojke koordinata tih vektora u nekoj bazi, onda rotacija koordinatnog sustava ne mijenja same vektore i ono sto je onda *kovarijantno* je zapis tih jednadžbi po komponentama:

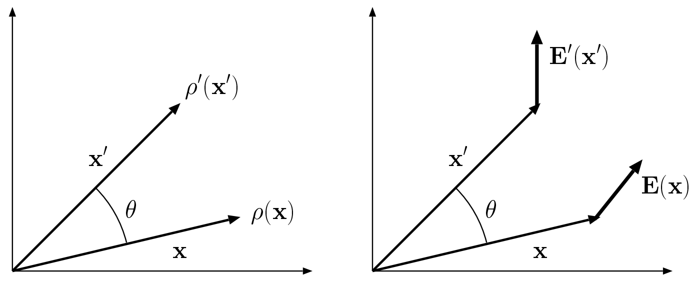
$$m\ddot{x}_i = F_i \ .$$

Kako prepoznajemo kovarijantne jednadžbe?

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &\quad \text{ima oblik} \quad \text{vektor=vektor + vektor} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho &\quad \text{ima oblik} \quad \text{skalar=skalar}
\end{aligned}$$

Što je skalar? Što je vektor?

Za razmatranje kovarijantnosti jednadžbi pri rotacijama određujuće svojstvo vektora nije to što je on opisan trojkom brojeva ili to što je on element nekog vektorskog prostora već je ključno na koji se način on transformira pri rotacijama:



$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{r}) \to \rho'(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}) \quad &: \quad \text{skalar} \\ E_i(\boldsymbol{r}) \to E_i'(\boldsymbol{r}') = \sum_j R_{ij} E_j(\boldsymbol{r}) \quad &: \quad \text{vektor} , \end{aligned}$$

gdje je R_{ij} ista matrica (poput (4.3)) koja rotira vektor položaja $\boldsymbol{r}$.

Ovo se poopćuje na veličine sa složenijim transformacijskim svojstima, *tenzore*.

Definicija 21
Tenzor n-tog ranga *(pri rotacijama) jest veličina* $\mathbb{T}$ *koja se transformira kao*

$$\mathbb{T}_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\boldsymbol{r}) \to \mathbb{T}'_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\boldsymbol{r}') = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \ldots R_{i_n j_n} \mathbb{T}_{j_1 j_2 \ldots j_n}(\boldsymbol{r}) .$$

Primjeri:

- skalari su tenzori nultog ranga
- vektori su tenzori prvog ranga.
- "Ohmov zakon" u neizotropnom sredstvu (npr. kristalu):

  $$j_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j$$

  σ_{ij} — tenzor električne vodljivosti (tenzor drugog ranga)
- $F_{\mu\nu}$ — tenzor elektromagnetskog polja (tenzor drugog ranga, ali obzirom na Lorentzove transformacije)
- Zakrivljenost n-dimenzionalnih ploha se standardno opisuje tzv. Riemannovim tenzorom R_{abcd} (tenzor četvrtog ranga)

Komponente tenzora drugog ranga možemo prikazati matricom.

Tenzorsko svojstvo je vezano uz tip transformacije. Tako postoje npr. Lorentzovi vektori (četvero-vektori), izovektori, itd. Kad se tip transformacije ne specificira misli se na rotacije (gornji vektori su vektori obzirom na rotacije).

Da bi jednadžba bila kovarijantna svi njeni članovi se moraju transformirati na isti način. (Kažemo: moraju se transformirati kovarijantno.) To znači da moraju pripadati istoj reprezentaciji grupe transformacija. ("Pripadati" u smislu da na svakog djeluje ista reprezentacija. Nisu oni sami reprezentacije!)

Napomena: Pojmovi kovarijantnosti i kontravarijantnosti komponenata vektora i tenzora koje srećemo u teoriji relativnosti ("gornji" i "donji" indeksi, vidi sljedeći odjeljak), a zapravo potječu iz diferencijalne geometrije nemaju veze s ovom kovarijantnosti. To su samo homonimi.

Kakve su posljedice kovarijantnosti jednadžbi gibanja na njihova rješenja?

Pojedina rješenja sama za sebe naravno nisu invarijantna, ali kovarijantnost jednadžbi gibanja implicira da transformacijom rješenja dobijemo također dobro rješenje.

Primjer: dva gravitirajuća tijela s reduciranom koordinatom $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. Rješenje jednadžbi gibanja je funkcija $\boldsymbol{r}(t)$ — elipsa u prostoru. Međutim, translatirana elipsa $\boldsymbol{r}_{1,2}(t) + \boldsymbol{a}$ i zarotirana elipsa $R\boldsymbol{r}_{1,2}(t)$ su isto dobra rješenja za svaki $\boldsymbol{a}$ i R u što se lako uvjerimo uvrštavanjem u Newtonove jednadžbe.

To da translacijom (rotacijom) rješenja također dobijemo rješenje je posljedica homogenosti (izotropije) prostora.

Provedemo li unatrag ovaj logički sljed vidimo da homogenost (izotropija) prostora zahtjeva da jednadžbe gibanja budu kovarijantne obzirom na translacije (rotacije).

Protuprimjer: vremenska inverzija (diskretna grupa = Z_2)
S jedne strane gornje Newtonove jednadžbe su kovarijantne i obzirom na vremensku inverziju. I stvarno, vremenski invertirano rješenje dvaju gravitirajućih tijela u gibanju je također dobro rješenje tj. mogući slučaj u prirodi. No, vremenska inverzija plina koji slobodno izlazi iz plinske boce nije moguć događaj što ukazuje na to da priroda nije simetrična na vremensku inverziju i jednadžbe koje opisuju ekspanziju plina ne bi smjele biti kovarijantne na takvu inverziju. Koje su to jednadžbe? ($\rightarrow$Problem strijele vremena.)

4.2 Tenzori kao matematički strojevi*

Tenzore možemo promatrati kao neku vrstu *matematičkih strojeva* čiji "input" su jedan ili više vektora, a "output" vektor ili skalar.

Praktično, problemi kojima se bavimo se gotovo uvijek daju formulirati u obliku "*Znamo te i te vektore koji opisuju sustav. Koliki je s ili $\boldsymbol{v}$ tog sustava?*", gdje su s i $\boldsymbol{v}$ neki zanimljivi skalari ili vektori (energija, impuls, položaj, ...).

Označimo tip tenzora $\mathbb{T}$ s uređenim parom $(0, n)$ ukoliko $\mathbb{T}$ predstavlja stroj čiji input je n vektora, a output skalar, a s $(1, n)$ ukoliko je output vektor. Takav stroj možemo skicirati kao

$$\mathbb{T}(\underbrace{\_\_, \_\_, \_\_, \ldots}_{n\times}) \,, \tag{4.4}$$

gdje su "$\_\_$" mjesta gdje treba staviti konkretne vektore koje će onda stroj "preraditi" u rezultirajući skalar ili vektor

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots) = s \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{v} \,. \tag{4.5}$$

Na primjer, klasični vektor *sile* možemo interpretirati kao $(0, 1)$ tenzor $\mathbb{SILA}(\_\_)$

sa svojstvom da kad mu u njegov slot stavimo vektor brzine dobijemo skalar snage:

$$\mathbb{SILA}(\boldsymbol{v}) = P \tag{4.6}$$

gdje je unutranji "mehanizam" stroja dan jednadžbom $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$.

Primjer $(0,2)$ tenzora je metrički tenzor $\mathbb{G}(\_\_,\_\_)$, čiji je mehanizam takav da kad u njegove slotove stavimo dva vektora dobijemo njihov skalarni produkt:

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \ . \tag{4.7}$$

Ono što se često naziva tenzorom drugog ranga (matrica brojeva) su samo komponente tenzora u nekoj bazi, koje se dobiju kad se pravom apstraktnom tenzoru u njegove input slotove stave jedinični bazni vektori, npr,

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = g_{ij} \ . \tag{4.8}$$

Tenzor gustoće vodljivosti iz prošlog odjeljka je dakle tipa $(1,1)$, odnosno $\sigma(\_\_)$, jer imamo $\sigma(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{j}$, dakle jedan vektor kao input i drugi kao output.

Totalno antisimetrični tenzor (Levi-Civita) u tri dimenzije je tenzor oblika $(1,2)$, u svom obliku u kojem nam daje vektorski produkt dvaju vektora

$$\mathbb{LEVICIVITA}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \ , \tag{4.9}$$

ali on može biti u obliku $(0,3)$ kad daje mješani produkt triju vektora

$$\mathbb{LEVICIVITA}'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \ , \tag{4.10}$$

gdje ta dva oblika nisu identična.

U elektrodinamici (koja je teorija koja poštuje specijalnu teoriju relativnosti), javlja se $(1,1)$ tenzor $\mathbb{FARADAY}$, ali koji nije tenzor obzirom na rotacije već obzirom na relativističke transformacije u četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog. Taj tenzor daje četverovektor Lorentzove sile kad mu se kao input stavi četverovektor brzine $\mathbb{FARADAY}(\boldsymbol{u}) = F_{\mathrm{Lorentz}}$, odnosno u uobičajenom zapisu po komponentama $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $F^{\mu}_{\mathrm{Lorentz}} = dp^{\mu}/d\tau = eF^{\mu}_{\nu}u^{\nu}$.

Apstraktna indeksna notacija

Indeksi na tenzorima najčešće označavaju kompenente tog tenzora u nekoj bazi, vidi (4.8). Međutim, moguće ih je upotrebljavati i samo kao zamjenu za ove slotove koji su nespretni za zapisivanje.

Tako npr. za $(0,n)$ tenzor imamo korespondenciju

$$\mathbb{T}(\_\_,\_\_,\_\_,\dots) \longrightarrow T_{abc\dots} \ , \tag{4.11}$$

gdje se vektori onda zapisuju kao V^a i npr. $T_{ab}V^aV^b$ je broj (skalar) dobiven "kontrakcijom" tenzora drugog ranga sa dva vektora, uz konvenciju da se kontrakcija uvijek radi s jednim gornjim i jednim donjim indeksom. Tenzor $(1,n)$

tipa bi onda bio $T^a_{bcd\ldots}$, a vektor V^a je tenzor $(1,0)$ tipa (input je ništa ili broj, a output je vektor).

Promotrimo sada objekt $\mathbb{G}(\boldsymbol{V}, \_\_)$, tj, metrički tenzor s popunjenim jednim slotom, tj. $g_{ab}V^a$. Očito je da taj objekt, ako ga kontrahiramo s još jednim vektorom W^b, daje skalar. Dakle riječ je o tenzoru tipa $(0,1)$, kojeg stoga možemo skraćeno zapisati kao V_a.

Dakle tek taj objekt V_a, koji nije isto što i V^a, se može skalarno množiti s vektorima da bi se dobio skalar. To što u praksi u trodimenzionalnom vektorskom prostoru množimo skalarno vektore međusobno je samo zato što je u tom prostoru metrički tenzor jednak jediničnom

$$g = \mathrm{diag}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pa je *po komponentama* V^a jednak V_a.

U četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ pa V^a i V_a više nisu ista stvar, ali to ne moramo jako naglašavati; dovoljno je pri skalarnom množenju paziti na predznake: $g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu = a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$.

No, u općenitom zakrivljenom prostoru s općenitim metričkim tenzorom moramo strogo razlikovati vektor V^a i objekt V_a (za kojeg postoji i specijalno ime: *1-forma*). Npr. u Hilbertovom prostoru Diracov “ket” $|\alpha\rangle$ je vektor, a “bra” $\langle\alpha|$ je 1-forma. Više o ovome vidi u knjigama iz diferencijalne geometrije.

Literatura: Misner, Thorne and Wheeler, *Gravitation*,

4.3 Kvantna mehanika u Diracovoj notaciji*

Fizikalno stanje $\leftrightarrow$ vektor u Hilbertovom prostoru: $|\alpha\rangle$ — tzv. "ket". (Zapravo "zraka" $c|\alpha\rangle, c \in \mathbb{C}$.)

α stoji za sve kvantne brojeve koji su potrebni za potpuno određenje stanja. Npr, za vodikov atom $|\alpha\rangle = |n,l,m\rangle$.

$\langle\alpha|$ — "bra" dualni vektor

$\langle\alpha|\beta\rangle$ — skalarni produkt

$\langle\alpha|\beta\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle$

Opservabla (veličina koja se eksperimentalno određuje i ima analogon u klasičnoj fizici) $\leftrightarrow$ hermitski operator na Hilbertovom prostoru: $A = A^\dagger$.

Ako su $|a\rangle$ svojstveni vektori od A sa svojstvenim vrijednostima a, tj.

$$A|a\rangle = a|a\rangle\ ,$$

onda mjerenje klasične veličine koja odgovara operatoru A, na sustavu opisanom vektorom $|\alpha\rangle$, s vjerojatnošću $|\langle a|\alpha\rangle|^2$ ima ishod a, nakon čega sustav "skače" u stanje $|a\rangle$.

Očekivana vrijednost mjerenja veličine koja odgovara operatoru A, na sustavu opisanom vektorom stanja $|\alpha\rangle$ je $\langle\alpha|A|\alpha\rangle$.

Svi svojstveni vektori nekog hermitskog operatora čine jednu bazu Hilbertovog prostora:

$$\sum_a |a\rangle\langle a| = 1$$

Npr. svi vektori $|\boldsymbol{r}\rangle$ čine jednu tzv. koordinatnu bazu. Schrödingerova valna funkcija $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ su zapravo komponente vektora stanja $|\alpha\rangle$ prikazane u koordinatnoj bazi:

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) = \langle\boldsymbol{r}|\alpha\rangle$$

Operatori transformacije fizikalnog sustava (tj. odgovarajućeg vektora stanja) moraju biti unitarni i linearni (ili antiunitarni i antilinearni) (*Wignerov teorem*).

$$\begin{aligned}
\textit{unitarnost}:&\ \langle U\alpha|U\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle && \text{(očuvanje vjerojatnosti)}\\
\textit{linearnost}:&\ U\big(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\big) = c_1U|\alpha\rangle + c_2U|\beta\rangle && \text{(princip superpozicije)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{antiunitarnost}:&\ \langle U\alpha|U\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*\\
\textit{antilinearnost}:&\ U\big(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\big) = c_1^*U|\alpha\rangle + c_2^*U|\beta\rangle
\end{aligned}$$

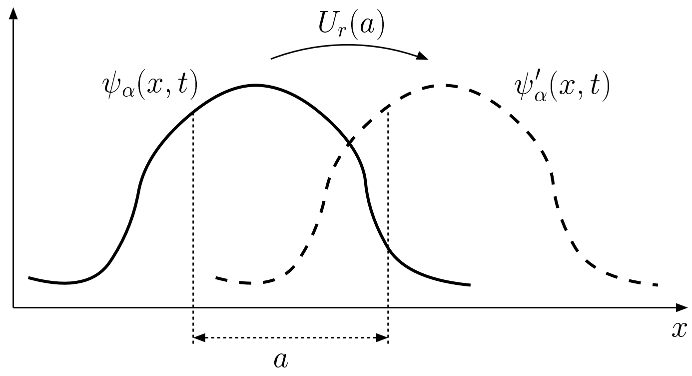
To je posljedica zahtjeva za očuvanjem vjerojatnosti:

$$\begin{gathered}
|\alpha'\rangle = U|\alpha\rangle\\
\langle\alpha'|\alpha'\rangle = \langle U\alpha|U\alpha\rangle = \langle\alpha|U^\dagger U|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle\\
\Rightarrow\ U^\dagger U = 1
\end{gathered}$$

4.4 Prostorne transformacije kvantnomehaničkih sustava

(Iz pedagoških razloga, u ovom odjeljku ćemo kvantnomehanička stanja opisivati uobičajenim valnim funkcijama $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$, a ne apstraktnim Diracovim ketovima $|\alpha\rangle$.)

4.4.1 Kontinuirane prostorne translacije*



Tražimo $U_r(a)$ takav da je

$$\psi'_\alpha(x,t) = U_r(a)\psi_\alpha(x,t) \ .$$

Imamo (iz crteža):

$$\psi'_\alpha(x,t) = \psi_\alpha(x-a,t) \tag{4.12}$$

$$\psi_\alpha(x-a,t) = U_r(a)\psi_\alpha(x,t) \qquad \text{(transf. je aktivna)} \tag{4.13}$$

Lijevu stranu jednadžbe razvijemo u Taylorov red i zbrojimo:

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(x-a,t) &= \psi_\alpha(x,t) - a\frac{\partial\psi_\alpha(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2\psi_\alpha(x,t)}{\partial x^2} - \dots \\
&= \left(1 - a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \dots\right)\psi_\alpha(x,t) \\
&= e^{-a\partial/\partial x}\psi_\alpha(x,t)
\end{aligned}$$

Usporedbom vidimo da je operator translacije u 1D:

$$U_r(a) = e^{-a\partial/\partial x}$$

odnosno, u 3D,

$$U_r(\boldsymbol{a}) = e^{-\boldsymbol{a}\cdot\nabla}$$

Poznavajući kvantnomehaničku korespondenciju $-i\hbar\nabla \leftrightarrow \boldsymbol{p}$ imamo konačno

$$U_r(\boldsymbol{a}) = e^{-(i/\hbar)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}} \ . \tag{4.14}$$

($e^{-\boldsymbol{a}\cdot\nabla}$ je operator translacije u koordinatnoj reprezentaciji, a $e^{-(i/\hbar)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}}$ vrijedi u svakoj reprezentaciji.)

4.4.2 Prostorne translacije - Blochov teorem*

Kristal je sustav atoma koji je invarijantan na translacije za bilo koji vektor oblika:

$$\boldsymbol{t_n} \equiv n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2 + n_3\boldsymbol{a}_3 \qquad n_{1,2,3} \in \mathbb{Z} \ , \tag{4.15}$$

gdje su $\boldsymbol{a}_{1,2,3}$ tzv. *primitivni vektori* koji definiraju jediničnu ćeliju kristalne rešetke. Prilikom izračuna valne funkcije elektronskog oblaka u kristalu pogodno je zahtijevati da ona zadovoljava tzv. *Born-von Karmanove periodičke rubne uvjete*:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r} + N_1\boldsymbol{a}_1) = \psi(\boldsymbol{r} + N_2\boldsymbol{a}_2) = \psi(\boldsymbol{r} + N_3\boldsymbol{a}_3) \ , \tag{4.16}$$

gdje su $N_{1,2,3}$ neki fiksni vrlo veliki ($N_{1,2,3} \gg 1$) prirodni brojevi*.

To dalje znači da operatori translacije zadovoljavaju

$$U_r(N_j\boldsymbol{a}_j) = U_r(0) = 1 \qquad j = 1, 2, 3 \tag{4.17}$$

i odgovarajuća translacijska grupa simetrija ima $N \equiv N_1N_2N_3$ elemenata. Kako translacije komutiraju ova grupa je Abelova što znači da ima N ireducibilnih reprezentacija koje su sve jednodimenzionalne (cf. npr. Zadatak 3.2). Elementi grupe su generirani translacijom za primitivne vektore $U_r(\boldsymbol{a}_j)$ pa tako imamo

$$U_r(\boldsymbol{a}_1)^{N_1} = 1 \tag{4.18}$$

$$U_r(\boldsymbol{a}_1) = \exp\Big\{ - 2\pi i\, \frac{p_1}{N_1} \Big\} \qquad p_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, N_1 - 1\} \ , \tag{4.19}$$

tj. translacija za $\boldsymbol{a}_1$ može biti reprezentirana s N_1 različitih operatora. Općenita translacija za vektor $\boldsymbol{t_n}$ (4.15) može onda biti reprezentirana jednodimenzionalnim operatorima oblika

$$U_r(\boldsymbol{t_n}) = U_r(n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2 + n_3\boldsymbol{a}_3) \tag{4.20}$$

$$= U_r(\boldsymbol{a}_1)^{n_1} U_r(\boldsymbol{a}_2)^{n_2} U_r(\boldsymbol{a}_3)^{n_3} \tag{4.21}$$

$$= \exp\Big\{ - 2\pi i\Big(\frac{n_1p_1}{N_1} + \frac{n_2p_2}{N_2} + \frac{n_3p_3}{N_3} \Big)\Big\} \ , \tag{4.22}$$

tj. s N različitih operatora kako i očekujemo za grupu s N IRREPsa. Svaka od tih IRREPsa se onda može označiti s trojkom brojeva (p_1, p_2, p_3) gdje svaki od brojeva p_j može poprimiti bilo koju vrijednost iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, N_j - 1\}$. Operator translacije $U_r(\boldsymbol{t_n})$ je u konkretnom IRREPsu (p_1, p_2, p_3) reprezentiran operatorom/brojem (4.22).

Umjesto trojke (p_1, p_2, p_3) za označavanje IRREPsa se obično upotrebljavaju vektori $\boldsymbol{k}$ definirani na slijedeći način. Prvo definiramo tzv. vektore *recipročne rešetke* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ putem zahtjeva:

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3 \ . \tag{4.23}$$

Sada vektor $\boldsymbol{k}$ koji odgovara IRREPsu (p_1, p_2, p_3) definiramo kao

$$\boldsymbol{k} \equiv \frac{p_1}{N_1}\boldsymbol{b}_1 + \frac{p_2}{N_2}\boldsymbol{b}_2 + \frac{p_3}{N_3}\boldsymbol{b}_3 \ . \tag{4.24}$$

Iz (4.24), (4.23) i (4.22) slijedi da je operator translacije za $\boldsymbol{t_n}$ u IRREPsu $\boldsymbol{k}$ dan s

$$U_r^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{t_n}) = e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{t_n}} \ , \tag{4.25}$$

*Ovakav zahtjev zamišlja topologiju kristala kao hiper-torusa, što je dovoljno realistično jer nas ionako topologija ili površinska svojstva kristala ovdje ne zanimaju, već samo svojstva "bulk" materijala poput specifičnog toplinskog kapaciteta ili električne vodljivosti. (Specifični toplinski kapacitet bakra je isti bez obzira da li je riječ o ravnoj žici, petlji, ploči ili pak torusu.)

i odsad N različitih $\boldsymbol{k}$-ova (4.24) labelira IRREPse. Vidimo da dimenzija $\boldsymbol{k}$ odgovara valnom broju, tj. impulsu podijeljenom s Planckovom konstantom.

Djelovanje ovih operatora translacije na valne funkcije u datom IRREPsu mora biti kao i kod svih operatora translacije (4.13)

$$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{t_n}}\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{t_n}) \ . \tag{4.26}$$

Kako je riječ o običnim brojevima (a ne recimo diferencijalnim operatorima) dobili smo razmjerno jednostavan uvjet koje valne funkcije u kristalu moraju zadovoljavati da bi bile svojstvene funkcije operatora translacije. Takve funkcije se nazivaju *Blochove funkcije*, a $\boldsymbol{k}$ je Blochov valni vektor. Zašto su one zanimljive?

Kao prvo, ako ih (bez gubitka općenitosti) zapišemo u obliku

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{4.27}$$

onda odmah iz (4.26) dobijemo uvjet

$$u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{t_n}) \ , \tag{4.28}$$

dakle Blochove funkcije su oblika $e^{+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$, gdje je $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ periodička funkcija na rešetci. Isto,

S druge strane, operator translacije na rešetci komutira s Hamiltonijanom

$$[H, U_r^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{t_n})] = 0 \ . \tag{4.29}$$

Komutiranje s kinetičkim dijelom je trivijalno jer su i kinetički dio hamiltonijana i operator translacije funkcije samo impulsa. Komutiranje s potencijalom je posljedica periodičnosti $V(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{t_n})$. (Pokažite ovo!) Posljedica komutiranja dvaju operatora je da oni imaju zajedničke svojstvene funkcije. To onda povlači

Blochov teorem: Valne funkcije periodičke rešetke mogu se izabrati kao Blochove funkcije.

Ovo onda olakšava rješavanje Schrödingerove jednadžbe za rešetku jer je potrebno naći samo funkcije $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ za svaki $\boldsymbol{k}$, a njihova periodičnost umnogome pojednostavljuje taj zadatak. Vidi fiziku čvrstog stanja za primjere. U fizici čvstog stanja se također obično izvodi Blochov teorem. Ovdje je naglasak dan na grupnoteorijski pristup tj. korespondenciju s reprezentacijama grupe translacija.

4.4.3 Vremenske translacije*

Slično kao kod prostorne imamo

$$\psi'_\alpha(x,t) = \psi_\alpha(x,t-\tau) = U_t(\tau)\psi_\alpha(x,t)$$

I opet Taylorovim razvojem

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x,t-\tau) &= \psi_\alpha(x,t) - \tau\frac{\partial\psi_\alpha(x,t)}{\partial t} + \dots \\ &= e^{-\tau\partial/\partial t}\psi_\alpha(x,t)\end{aligned}$$

Sada korespondencijom $i\hbar\partial/\partial t \leftrightarrow H$ imamo

$$U_t(\tau) = e^{(i/h)H\tau} \ ,$$

ali ovo vrijedi samo za H konstantan u vremenu (kakav on jest u većini nama zanimljivih slučajeva). Za diskusiju vidi Sakurai, sect. 2.1.

Vremenska evolucija Vremenska translacija daje sustav koji ima isto ponašanje u vremenskom trenutku $t+\tau$ kao originalni sustav u trenutku t. Vremenska *evolucija* nekog sustava se isto može dobiti iz ovog gore, ako primijetimo da je

$$\psi_\alpha(x, t-\tau) = e^{(i/h)H\tau}\psi_\alpha(x,t)$$

pa zamjenom $\tau \equiv t - t'$ imamo

$$\psi_\alpha(x, t') = e^{-(i/h)H(t'-t)}\psi_\alpha(x,t)$$

Vrijedi dakle

$$U_{\text{evolucija}}(t'-t) = U^{-1}_{\text{translacija}}(t'-t) = U_{\text{translacija}}(t-t') \ .$$

Očuvane veličine Promotrimo operator A takav da je $[H, A] = 0$. Neka je $\psi(x,t)$ svojstveno stanje od A tj.

$$A\psi(x,t) = a\psi(x,t)$$

Tada to isto stanje nakon vremena $(t'-t)$ zadovoljava

$$A\psi(x,t') = Ae^{-(i/h)H(t'-t)}\psi(x,t) = e^{-(i/h)H(t'-t)}A\psi(x,t) = a\psi(x,t')$$

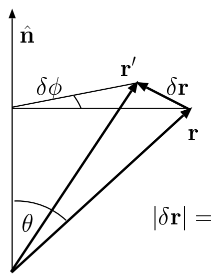
tj. A je očuvana veličina. Npr. za slobodnu česticu $H = p^2/2m \ \Rightarrow$

$$[H, p] = \frac{1}{2m}[p^2, p] = 0$$

i impuls je očuvan.

Veličine koje komutiraju s Hamiltonijanom su očuvane u vremenu.

4.4.4 Rotacije



$$|\delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|\sin\theta\,\delta\phi = |\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{r}|\,\delta\phi$$

Infinitezimalna rotacija je (vidi sliku):

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta\phi\,\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r} \ .$$

To znači da, po analogiji s translacijama, valna funkcija zarotiranog sustava treba zadovoljavati

$$\begin{aligned}
\psi'_\alpha(\boldsymbol{r},t) &= \psi_\alpha(R(\hat{\boldsymbol{n}},\delta\phi)^{-1}\boldsymbol{r},t) \\
&= \psi_\alpha(\boldsymbol{r} - \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r},t) \\
&= \psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) - (\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r}) \cdot \nabla\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \\
&= \psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) - \frac{i}{\hbar}(\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{p}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{L} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\delta\phi\right)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}$$

Rotaciju za konačni kut dobijemo kompozicijom N rotacija za $\delta\phi/N$ gdje $N \to \infty$:

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{L} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\delta\phi\right)^N = e^{-(i/\hbar)\boldsymbol{L}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi} \qquad (4.30)$$

Izotropija prostora povlači očuvanje momenta impulsa: $[H, L_i] = 0$.

Operatori L_i, $i = x, y, z$ zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \qquad \text{i ciklične zamjene} \qquad (4.31)$$

4.5 Spin*

Klasična fizika → različita transformacijska svojstva pri rotacijama → *tenzori.*

Kakva je situacija u kvantnoj mehanici?

Promotrimo rotaciju vektora valnih funkcija:

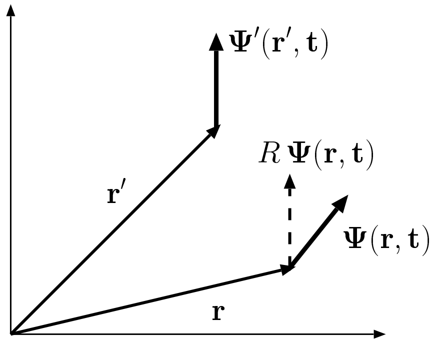
$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r},t) \equiv (\psi_x(\boldsymbol{r},t), \psi_y(\boldsymbol{r},t), \psi_z(\boldsymbol{r},t))$$

Ovakav vektor će nam biti zanimljiv npr. pri razmatranju čestice koja se vrti oko svoje osi i kod koje nas ne zanima samo njen položaj u prostoru već i njena orijentacija.

Kao i ranije, tražimo operator s djelovanjem

$$\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t) \ ,$$

gdje je $\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{r},t)$ valna funkcija zarotiranog sustava.



Iz slike vidimo:

$$\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{r}', t) = R\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t)$$
$$\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{r}, t) = R\boldsymbol{\Psi}(R^{-1}\boldsymbol{r}, t)$$

pa imamo, slično kao kod rotacije jednokomponentne funkcije:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \delta\phi)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) &= R\boldsymbol{\Psi}(R(\hat{\boldsymbol{n}}, \delta\phi)^{-1}\boldsymbol{r}, t) \\
&= \boldsymbol{\Psi}(R(\hat{\boldsymbol{n}}, \delta\phi)^{-1}\boldsymbol{r}, t) + \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\Psi}(R(\hat{\boldsymbol{n}}, \delta\phi)^{-1}\boldsymbol{r}, t) \\
&= \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r} - \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r}, t) + \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) + O(\delta\phi^2) \\
&= \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{i}{\hbar}(\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L})\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) + \delta\phi\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) + O(\delta\phi^2)
\end{aligned}$$

Imamo dodatni član $\delta\phi\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t)$ kojeg ćemo drugačije napisati pomoću tripleta matrica definiranih na slijedeći način:

$$(S_j)_{ik} = i\hbar\epsilon_{ijk} \quad j = 1, 2, 3 \, .$$

Konkretno

$$S_1 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = i\hbar X_1 \tag{4.32}$$

$$S_2 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\hbar X_2 \tag{4.33}$$

$$S_3 = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\hbar X_3 \tag{4.34}$$

Uz tako definirane matrice imamo

$$\begin{aligned}
[\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\Psi}]_i &= \epsilon_{ijk}\hat{n}_j\Psi_k \\
&= -\frac{i}{\hbar}\hat{n}_j(S_j)_{ik}\Psi_k \\
&= -\frac{i}{\hbar}(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{S})_{ik}\Psi_k \, ,
\end{aligned}$$

što znači

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}, t) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\delta\phi\right) \Psi(\boldsymbol{r}, t)$$

odnosno, za konačne rotacije:

$$\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi) = e^{-(i/\hbar)(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi} \tag{4.35}$$

Matrice S_i također zadovoljavaju komutacijske relacije angularnog momenta.

$\boldsymbol{S}$ - intrinsični angularni moment (spin)

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ - ukupni angularni moment

Za izolirani sustav $[H, \boldsymbol{J}] = 0$, ali moguće je da je $[H, \boldsymbol{L}] \neq 0$, $[H, \boldsymbol{S}] \neq 0$, npr. pri vezanju spina i orbite u atomu. (Elektron usljed orbitiranja "vidi" magnetsko polje jezgre koje interagira s njegovim magnetskim momentom.)

Vidimo da se trokomponentna valna funkcija transformira drugačije od jednokomponentne. Koje su još mogućnosti? Treba nam općenita teorija reprezentacija grupe rotacija u kvantnoj mehanici.

Zadaci

4.1 Pokažite da je operator translacije kvantnomehaničkog stanja, $U_r(\boldsymbol{a}) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}\}$ unitaran. Razmotrite situaciju u koordinatnoj reprezentaciji gdje je $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$. Zašto ovaj i ne kvari unitarnost?

4.2 Neka $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu. Pokažite da će prostorno translatirana $\psi(\boldsymbol{r}, t)' = U_r(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{r}, t)$ također zadovoljavati Schrödingerovu jednadžbu ako i samo ako je $[H, \boldsymbol{p}] = 0$

4.3 Koristeći fundamentalne kvantnomehaničke komutatore

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \;, \qquad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \;,$$

te svojstva Levi-Civita tenzora, izračunajte komutacijske relacije angularnog momenta $[L_i, L_j]$.

4.4 Pokažite da operatori spina S_i također zadovoljavaju komutacijske relacije angularnog momenta.

4.5 Pokažite da je $[\boldsymbol{J}^2, J_i] = 0$.

Poglavlje 5

Lieve grupe

5.1 Kontinuirane grupe

- *Konačne grupe* imaju binarnu operaciju (tablicu množenja) koja zadovoljava četiri aksioma.

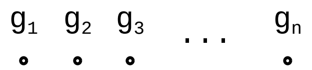
- elementima pridružujemo operatore → REPs i IREPS → moćni teoremi

- dokazi teorema o REPs su zasnovani na svojstvu konačnosti grupe

- Što ćemo s beskonačnim grupama (rotacija, translacija, Lorentzove transf.)?

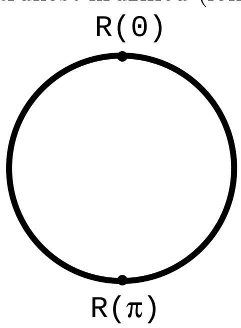
Pristup:

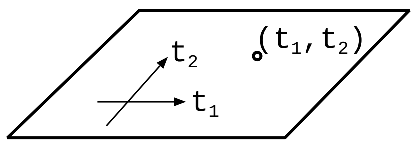
- elementima konačne grupe možemo pridružiti konačan skup točaka u nekom prostoru → *grupni prostor*



- za *kontinuirane beskonačne grupe* grupni prostor je tzv. *mnogostrukost* tj. prostor lokalno sličan $\mathbb{R}^n$.

- Npr. grupa rotacija oko neke osi $G = \{R(\theta)|\theta \in [0, 2\pi)\}$ ima kao grupnu mnogostrukost kružnicu (lokalno slična $\mathbb{R}^1$)





- Npr. grupa translacija u ravnini: $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ ima kao grupnu mnogostrukost ravninu $= \mathbb{R}^2$

- Elemente grupe označavamo s n realnih brojeva (tzv. *parametara*) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koji određuju odgovarajuću točku na grupnoj mnogostrukosti, te govorimo o *n-parametarskoj grupi.*

- element grupe: $g(a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv g(a)$ (Npr. $R(\theta)$)

- Aksiomi grupe:

1) Zatvorenost: $g(c) = g(a)g(b) \in G$

umjesto tablice množenja imamo funkciju $\phi : G \times G \to G \quad c = \phi(a, b)$

2) Asocijativnost $g(a)[g(b)g(c)] = [g(a)g(b)]g(c) \;\Rightarrow\; \phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c)$

3) Identiteta: $\exists a^0 \quad | \quad g(a^0)g(a) = g(a)g(a^0) = g(a) \quad \forall a$

- reparametrizacijom mnogostrukosti možemo izabrati $a^0 = (0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, $g(0) = e \;\Rightarrow\; \phi(0, a) = \phi(a, 0) = a$

4) Inverz: $\forall a \quad \exists \bar{a} \quad | \quad g(a)g(\bar{a}) = g(\bar{a})g(a) = g(0) = e$

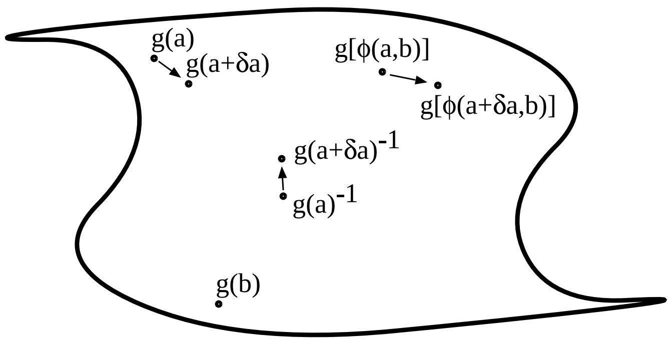
- $g(\bar{a}) = g(a)^{-1}$

- $\bar{a} = \psi(a) \quad \psi : G \to G$

Zasad nismo zatražili nikakvu povezanost između grupnih i topoloških svojstava grupe.

Definicija 22 (Lieva grupa)
Lieva grupa je kontinuirana grupa za koju su funkcije kompozicije (ϕ) i inverza(ψ) analitičke. (Često se još zahtijeva i povezanost s jedinicom.)

Zahtjev da su te funkcije analitičke (te da je mnogostrukost analitička) daje Lievim grupama mnoštvo važnih svojstava.



Kontinuiranost grupe (preciznije, analitičnost mnogostrukosti) se ogleda u činjenici da je element $g(a)$ “blizu” elementa $g(a + \delta a)$ dok analitičnost funkcije kompozicije znači da je $\phi(a + \delta a, b)$ ”blizu” $\phi(a, b)$ tj. te su vrijednosti povezane Taylorovim redom.

Tako Lieve grupe spajaju ideje iz algebre i geometrije.

5.2 Lieve algebre

Neka su matrice $M(a) \equiv M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ elementi n-parametarske Lieve grupe.

Za infinitezimalno male parametre $a_i \to \epsilon_i \ll 1$, zahvaljujući analitičnosti možemo razviti oko $a_i = 0$:

$$M(\epsilon) = M(0) + \sum_{i=i}^{n} \epsilon_i \frac{\partial M(a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_i}\bigg|_{a_1=\ldots=a_n=0} + 0(\epsilon^2)$$

$$\frac{\partial M(a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_i}\bigg|_{a_1=\ldots=a_n=0} = \text{const}(a_1, \ldots) \equiv X_i \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{- generatori grupe}$$

- generatora ima koliko i parametara

$$M(\epsilon_i) = 1 + \epsilon_i X_i \qquad \text{- infinitezimalne transformacije}$$

- Želimo pokazati kako je struktura i REPs čitave grupe skoro sasvim određena generatorima grupe tj. infinitezimalnom okolinom jediničnog elementa (ne gubimo ništa ograničavajući se na generatore, a njih je lakše proučavati).

- Ne stignemo sve dokazati već ćemo većinu rezultata samo ilustrirati na primjeru grupe SO(3)

- rotacije oko z-osi — jednoparametarska podgrupa od SO(3):

$$\left\{ R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \middle| \quad \phi \in [0, 2\pi) \right\} \subset \text{SO}(3)$$

$$X_3 = \frac{\partial R_3(\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- infintezimalna rotacija: $R_3(\epsilon) = 1 + \epsilon X_3$

- Kompozicija N infinitezimalnih rotacija:

$$[R_3(\epsilon)]^N = (1 + \epsilon X_3)^N = \left(1 + \frac{(N\epsilon)X_3}{N}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty, (N\epsilon)\to\phi]{} e^{\phi X_3}$$

$$\exp\left\{\phi\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(Ovo smo eksplicitno eksponencirali na vježbama.)

$\rightarrow$ konačni (dakle svaki) element jednoparametarske podgrupe od SO(3) dobivamo eksponencijacijom generatora

- Nadalje, u skladu s Eulerovim teoremom iz mehanike* svaka SO(3) rotacija pripada nekoj jednoparametarskoj podgrupi (podgrupu čine sve rotacije oko te iste osi), što znači da se svi elementi SO(3) mogu se dobiti eksponencijacijom generatora

-X_1, X_2, X_3=? ovise o parametrizaciji grupnog prostora

- Mogli bismo konstruirati opći element SO(3) grupe kao kompoziciju tri Eulerove rotacije i onda deriviranjem po 3 Eulerova kuta dobiti tri generatora grupe. No, ima i lakši put koji će olakšati traženje generatora drugih Lievih grupa koje se pojavljuju u fizici. (Usput, pristup preko Eulerovih rotacija je problematičan jer su one singularne oko jedinice.):

SO(3) je grupa svih 3×3 matrica R sa svojstvima $RR^T = 1$ i $\det R = 1$

- $R(\epsilon) = 1 + \epsilon X \;\Rightarrow\; RR^T = (1 + \epsilon X)(1 + \epsilon X^T) = 1 + \epsilon(X + X^T) + 0(\epsilon^2) = 1$

$\Rightarrow\; X^T = -X \;\Rightarrow\; X$ je antisimetrična 3×3 matrica (čime je uvjet $\det R = 1$ automatski ispunjen - vidi $\det R = e^{\theta \mathrm{Tr} X}$ sa vježbi

- skup $\mathcal{A}$ svih antisimetričnih 3×3 matrica generira grupu SO(3)

- No, taj skup je i vektorski prostor: $X_1, X_2 \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; (\alpha X_1 + \beta X_2) \in \mathcal{A} \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- dim($\mathcal{A}$)=3

- Uobičajenu bazu čine generatori jednoparametarskih podgrupa rotacija oko x, y i z osi

$$X_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad X_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad X_3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

- $e^{\phi \boldsymbol{X}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}$ je onda općeniti element grupe SO(3)

- Vektorski prostor je bogatija struktura od grupe što generatore čini zanimljivijim nego same elemente grupe.

- No postoji i dodatno važno svojstvo: Neka su $X, Y \in \mathcal{A}$.

*Svaki pomak krutog tijela kod kojeg jedna točka ostaje nepomična je ekvivalentan *jednoj* rotaciji oko fiksne osi koja prolazi kroz tu točku.

$[X,Y]^T = (XY-YX)^T = Y^TX^T - X^TY^T = YX - XY = -[X,Y] \;\Rightarrow\; [X,Y] \in \mathcal{A}$

- Dakle, $\mathcal{A}$ je zatvoren ne samo obzirom na linearne kombinacije već i obzirom na komutatore svojih elemenata $\rightarrow$ *Lieva algebra*

Definicija 23 (Lieva algebra)
Lieva algebra $\mathcal{A}$ je vektorski prostor na kojem je definiran Liev produkt dvaju elemenata $[X,Y]$ (ne mora biti komutator) sa svojstvima

1) zatvorenost: $[X,Y] \in \mathcal{A} \quad \forall X,Y \in \mathcal{A}$

2) distributivnost: $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z] \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C} \rightarrow$ *kompleksna L.a.*$)$

3) antisimetrija: $[X,Y] = -[Y,X]$

4) Jacobijev identitet: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

Za vektorske prostore matrica, gdje je Liev produkt definiran kao komutator $[X,Y] = XY - YX$, svojstva 2–4 su automatski ispunjena.

Teorem (Ado): Svaka apstraktna Lieva algebra je izomorfna nekoj Lievoj algebri matrica s komutatorom kao Lievim produktom. *(Bez dokaza.)*

Dakle, ograničavajući se na Lieve grupe *matrica* ništa ne gubimo na općenitosti.

- Lieve algebre ponekad označavamo isto kao i Lieve grupe, ali malim slovima: X_1, X_2 i X_3 su baza Lieve algebre so(3).

$X_i, i = 1,2,\ldots,\dim(\mathcal{A})$ - baza vektorskog prostora $\Rightarrow$ $[X_i, X_j] \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ $[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k \quad i,j = 1,2,\ldots,\dim(\mathcal{A})$

C^k_{ij} - *strukturne konstante*

Primjer 29 (strukturne konstante od SO(3))
$[X_i, X_j] = 0$ za $i = j$

$[X_1, X_2] = X_3$

$[X_2, X_3] = X_1$

$[X_3, X_1] = X_2$

$C^k_{ij} = 0$ ako su bilo koja dva indeksa ista

$C^3_{12} = C^1_{23} = C^2_{31} = 1$

$C^3_{21} = C^1_{32} = C^2_{13} = -1$

Digresija: *Levi-Civita pseudotenzor*

Levi-Civita ili totalno antisimetrični pseudotenzor trećeg reda definiran je svojim komponentama ϵ_{ijk} tako da je

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } (i,j,k) \text{ parna permutacija od } (1,2,3), \\ -1 & \text{ako je } (i,j,k) \text{ je neparna permutacija od } (1,2,3), \\ 0 & \text{inače, tj. ako su dva ili sva tri indeksa ista.} \end{cases}$$

Npr. $\epsilon_{231} = 1$, $\epsilon_{213} = -1$, $\epsilon_{221} = 0$, itd. Pomoću Levi-Civita tenzora, komutacijske relacije algebre SO(3) pišemo

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k$$

Levi-Civita tenzor je od velike pomoći u računima (vidi vježbe). Za definiciju pojma "tenzor" vidi poglavlje 4, no tenzorsko svojstvo Levi-Civita tenzora će nam u praksi biti nebitno.

Lieva algebra $\mathcal{A}'$ je *homomorfna* Lievoj algebri $\mathcal{A}$ ako postoji operator $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tako da je

$$[S(X), S(Y)] = S([X,Y]) \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}$$

Ako je S još i bijekcija $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ su *izomorfne*.

Primjer 30 (Lieva algebra grupe SU(2))
čine je sve antihermitske[†] 2×2 matrice s tragom nula Baza je

$$\{-i\frac{\sigma_1}{2}, -i\frac{\sigma_2}{2}, -i\frac{\sigma_3}{2}\}$$

gdje su $\sigma_{1,2,3}$ tri Paulijeve matrice:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Ova tri generatora zadovoljavaju iste komutacijske relacije kao i matrice SO(3) algebre

$$\left[-i\frac{\sigma_1}{2}, -i\frac{\sigma_2}{2}\right] = -i\frac{\sigma_3}{2} \qquad \text{itd.}$$

pa je $X_i \to -i\sigma_i/2$ $(i = 1,2,3)$ izomorfizam. so(3)=su(2).

(D.Z. Uvjerite se da je su(2) *realna* Lieva algebra, dakle algebra nad poljem $\mathbb{R}$, premda su elementi matrica općenito kompleksni.)

Pojmovi REP i IRREP za Lieve grupe imaju isto značenje kao i za konačne grupe (dakle to je grupa operatora na nekom vektorskom prostoru homomorfna grupi). Lievim algebrama možemo također pridijeliti njihove vlastite reprezentacije.

Zapravo, cijela dosadašnja diskusija je i bila o *reprezentacijama* grupe/algebre SO(3) na 3D euklidskom vektorskom prostoru.

[†] A je antihermitska ako je $A^\dagger = -A$

Definicija 24 (Casimirov operator)
Ako je skup $\{L_i, i = 1, 2, ...\}$ *baza Lieve algebre onda se polinom u* L_i *koji komutira sa svim elemetnima te algebre naziva* Casimirov operator.

- Posebno su zanimljivi kvadratični Casimirovi operatori.

Primjer 31
$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -21$

Schurova lema (vrijedi i za Lieve grupe) traži da Casimirov operator bude proporcionalan jediničnom što je onda zgodno za označavanje IRREPSa.

5.3 Veza Lievih grupa i Lievih algebri*

U slučaju grupe SO(3) smo, zahvaljujući Eulerovom teoremu, vidjeli da *svaki* element grupe možemo prikazati kao eksponencijal jednog elementa iz Lieve algebre so(3).

Pitanje je da li se ovo poopćava na proizvoljnu Lievu grupu.

Odgovor je: Skoro, ali ne sasvim. Vrijedi *(bez dokaza)*:

1) Svakoj Lievoj grupi jednoznačno pripada neka Lieva algebra. Svaki se element iz neke male (ne nužno infinitezimalne!) okoline jediničnog elementa grupe može prikazati u obliku e^{tX} gdje je t realni parametar, a X element te Lieve algebre.

2) Ako je Lieva grupa kompaktna, onda se "mala okolina" proširuje na čitavu komponentu povezanosti jedinice.

kompaktna = parametri variraju po zatvorenim intervalima
Npr. SO(3) je kompaktna, a grupa translacija nije. SO(n) i SU(n) su kompaktne, a najzanimljivije su nam za QM.

komponenta povezanosti jedinice = svi elementi grupe koji se kontinuiranom linijom u grupnoj mnogostrukosti mogu povezati s jediničnim elementom
Npr. sve obične rotacije su u komponenti povezanosti jedinice, dok refleksije nisu.

Što se *strukture* grupe tiče tj. njene "tablice množenja", važnu ulogu ima formula

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \exp\left\{ A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\Big(\big[A,[A,B]\big] + \big[B,[B,A]\big] \Big) + \cdots \right\} \\ &= f(A, B, [A,B]) \qquad \textit{(Baker-Campbell-Hausdorff ili BCH formula)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ovaj red konvergira u određenoj okolini jedinice (ne nužno infinitezimalnoj!) u kojoj onda algebra *potpuno* određuje grupu.

(D.Z. Provjerite BCH formulu.)

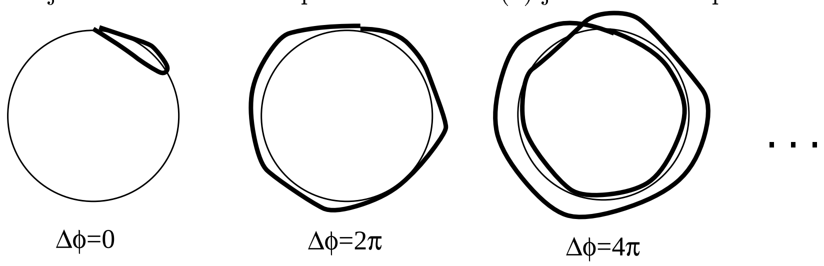
Pitanje: Da li istoj Lievoj algebri mogu pripadati različite Lieve grupe?

Primjer grupa SO(3) i SU(2) koje imaju istu algebru sugerira da je to moguće. (Ako SO(3) i SU(2) nisu izomorfne grupe, a vidjet ćemo na vježbama da nisu.)

Da bismo precizno opisali vezu između Lievih grupa s istom algebrom, treba nam pojam *povezanosti*

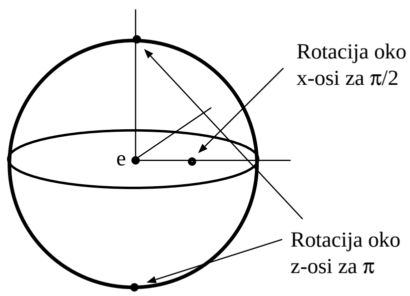
Definicija 25 (Povezanost)
Neka je G povezana grupa (ako nije, možemo promatrati samo komponentu povezanosti jedinice). Promotrimo skup svih zatvorenih krivulja u grupnoj mnogostrukosti. Podijelimo skup na klase ekvivalencije koje čine krivulje koje se mogu kontinuirano *deformirati jedna u drugu. Broj takvih klasa zovemo* povezanost *grupe G. Ako postoji samo jedna klasa kažemo da je grupa* jednostavno *ili* jednostruko *povezana.*

Primjer 32 (U(1))
$uu^\dagger = uu^* = 1 \;\Rightarrow\; |u| = 1 \;\Rightarrow\; u = e^{i\phi} \;\Rightarrow$ grupna mnogostrukost je kružnica. (Usput, U(1)=SO(2). D.Z.: Pronađite izomorfizam.) Za zatvorene krivulje promjena kuta ϕ duž krivulje je $2n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Krivulje s različitim n pripadaju različitim klasama povezanosti → U(1) je beskonačno povezan.

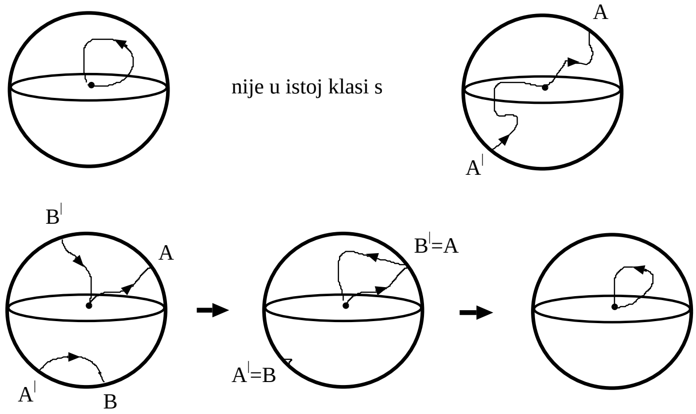


Digresija: Moguće je na prirodan način definirati zbrajanje (klasa) krivulja obzirom na koje skup ovih klasa čini grupu — tzv. *fundamentalnu grupu* ili *prvu grupu homotopija* π_1. Ovdje $\pi_1 = (\mathbb{Z}, +)$.

Primjer 33 (SO(3))
Kako izgleda parametarski prostor od SO(3)? Element od SO(3) je definiran smjerom osi rotacije i iznosom kuta rotacije pa se grupna mnogostrukost može prikazati kao puna lopta promjera π s identificiranim nasuprotnim točkama površine sfere:



Svaka rotacija je u pozitivnom smjeru. Rotacije za kuteve $(\pi, 2\pi)$ se dobiju suprotno usmjerenim osima. Identifikacija nasuprotnih točaka je posljedica činjenice da je su rotacije za π oko suprotno usmjerenih osi identične.



Dakle, SO(3) je dvostruko povezana.

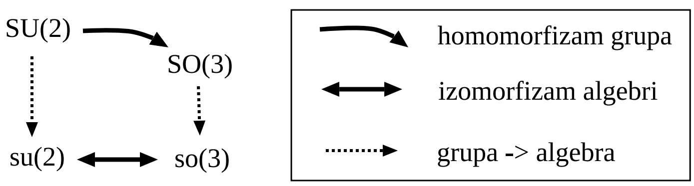
Primjer 34 (SU(2))
Grupna mnogostrukost od SU(2) je 3-sfera tj. generalizacija uobičajene sfere (2-sfere) na četverodimenzionalni prostor. (Vidi vježbe za ovo.) Može se pokazati da je svaka n-sfera s $n > 1$ jednostavno povezana.

Ako postoji homomorfizam s povezane Lieve grupe G na povezanu Lievu grupu H s *diskretnom* jezgrom K onda kažemo da grupa G *pokriva* grupu H onoliko puta koliko elemenata ima K. (Prisjetite se teorema 3 o izomorfizmu.) Također, Lieve algebre tih grupa su izomorfne.

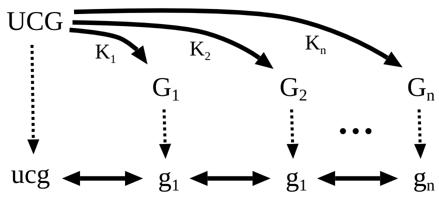
Primjer 35 (SO(3) i SU(2))
SO(3) i SU(2) su homomorfne. Sam homomorfizam ćemo konstruirati na vježbama gdje ćemo vidjeti da je on 2-1 s SU(2) na SO(3) tj. jezgra K ima dva elementa. Dakle SU(2) pokriva SO(3) dva puta.

Teorem 8
Među grupama koje pokrivaju povezanu Lievu grupu G, postoji jedinstvena grupa koja je jednostavno povezana — *univerzalna grupa pokrivanja.* Broj pokrivanja jednak je povezanosti od G. *(Bez dokaza)*

Npr. SU(2) je univerzalna grupa pokrivanja za SO(3). Prema teoremu o izomorfizmu SU(2)/$\{1, -1\}$=SO(3).



Općenita situacija je



gdje je UCG$/K_i$=G$_i$. Pronalaženjem svih diskretnih invarijantnih podgrupa od UCG možemo naći sve grupe njoj lokalno izomorfne.

Bliska povezanost grupe SU(2) s grupom rotacija SO(3) sugerira da bi ona mogla imati i fizikalni značaj. Trikovi s pojasom[‡] ili konobarevim pladnjem pokazuju da rotacije za 360° zaista nisu uvijek u svakom pogledu identične rotaciji za 0°, dok one za 720° stupnjeva to jesu. Također, Hamiltonova demonstracija da se komponiranje rotacija prirodnije izvodi pomoću kvaterniona (skup kvaterniona je ekvivalentan SU(2) grupi) dodatno sugerira da ta grupa nije sasvim apstraktna. I stvarno, pokazuje se da se neki sustavi u prirodi (tzv. fermionski sustavi) trasformiraju pri rotacijama kao reprezentacije SU(2) grupe (vidi 6. poglavlje) i to je i eksperimentalno potvrđeno npr. u eksperimentima s neutronskom interferometrijom.

5.4 Primjeri Lievih grupa važnih za fiziku

1. **Opća linearna grupa**

   $GL(n,\mathbb{C})$ — skup svih $n \times n$ regularnih ($\det M \neq 0$) kompleksnih matrica

   Kako je svaka matrica zadana s n^2 nezavisnih kompleksnih brojeva, ova grupa ima $2n^2$ realnih parametara. Uvjet regularnosti nije ograničenje koje smanjuje broj parametara, jer je samo riječ o zahtjevu da determinanta, koja je izraz koji uključuje tih $2n^2$ parametara bude *različita* od nule.

   $$\det M = f(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) \neq 0 \tag{5.4}$$

   Podgrupa ove grupe je grupa $GL(n,\mathbb{R})$ koja očito ima samo n^2 parametara.

2. **Specijalna linearna grupa**

   $$SL(n,\mathbb{C}) = \{M \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det M = 1\} \tag{5.5}$$

[‡] Zakretanjem originalno vodoravnog pojasa držanjem za kopču kreiramo jednu zatvorenu putanju u grupi SO(3): kut i smjer su dani zakrenutošću pojedinog intervala pojasa i njegovom udaljenošću od ravnog vodoravnog položaja. Kopča mora biti vodoravna kao i zavezani drugi kraj pojasa da bi oba kraja odgovarala identiteti. Jednom zakrenuti pojas nikakvim kontinuiranim transformacijama (koje drže kopču vodoravnom) ne možemo izravnati pojas; dvaput zakrenuti pojas možemo izravnati prebacivanjem remena preko kopče.

Ovdje je na svaku matricu postavljen dodatni uvjet

$$\det M = f(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) = 1 , \tag{5.6}$$

koji predstavlja jednu kompleksnu, tj. dvije realne jednadžbe koje se mogu iskoristiti za eliminaciju dvaju parametera. Tako ova grupa ima $2n^2 - 2$ parametra.

Podgrupa ove grupe je grupa $SL(n, \mathbb{R})$ koja ima $n^2 - 1$ parametar. (Jednadžba (5.6) je sad samo jedna realna jednadžba, a ne dvije.)

3. **Unitarna grupa**

$$U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid MM^\dagger = 1\} \tag{5.7}$$

Prebrojavanje nezavisnih parametara za ovu grupu može se izvesti na više načina. Uvjet $MM^\dagger = 1$ se može napisati izraženo preko komponenti matrica kao:

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} M^*_{kj} = \delta_{ik} , \tag{5.8}$$

gdje je iskorišteno $M^\dagger_{jk} = M^*_{kj}$. Jednadžba (5.8) predstavlja n^2 kompleksnih jednadžbi ali sve one nisu nezavisne. Promotrimo prvo n jednadžbi određenih uvjetom $i = k$ (dakle gledamo dijagonalu te matrične jednadžbe):

$$\sum_j M_{ij} M^*_{ij} = \sum_j |M_{ij}|^2 = 1 \tag{5.9}$$

To je n realnih jednadžbi koje se mogu upotrijebiti za eliminiranje n parametara. Dalje možemo gledati jednadžbe određene uvjetom $i < k$ (dakle gledamo trokut iznad dijagonale matrične jednadžbe). Te su jednadžbe kompleksne i ima ih $n(n-1)/2$ (broj elemenata u spomenutom trokutu). Sve ove jednadžbe su neovisne pa se mogu iskoristiti za eliminranje $2 \cdot n(n-1)/2 = n(n-1)$ parametara. Preostaju jednadžbe za $i > k$ (donji trokut matrice), ali kompleksnom konjugacijom odgovarajućih jednadžbi

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} M^*_{kj} = 0 , \qquad i > k \tag{5.10}$$

dobijemo

$$\sum_{j=1}^{n} M^*_{ij} M_{kj} = \sum_{j=1}^{n} = M_{kj} M^*_{ij} = 0 , \qquad i > k \tag{5.11}$$

pa uz preimenovanje indeksa $i \leftrightarrow k$

$$\sum_{j=1}^{n} = M_{ij} M^*_{kj} = 0 , \qquad k > i \tag{5.12}$$

vidimo da su ove jednadžbe ekvivalentne ovima iz gornjeg trokuta tj. nisu nezavisne. Znači sve skupa možemo eliminirati $n + n(n-1) = n^2$ parametara, pa ih ostane $2n^2 - n^2 = n^2$ što je broj parametara unitarne grupe.

(Drugi način prebrojavanja je da se iskoristi da su retci matrice ortonormirani vektori. Uvjet normalizacije daje n realnih jednadžbi, a uvjet ortonogonalnosti $\binom{n}{2}$ kompleksnih, gdje se treba uvjeriti da odgovarajući zahtjevi na stupce nisu nezavisni od ovih na retke.)

Važno svojstvo unitarnih matrica je da, ukoliko ih interpretiramo kao operatore nad kompleksnim vektorskim prostorima ($\boldsymbol{x} \to M\boldsymbol{x}$), one čuvaju skalarni produkt

$$
\begin{aligned}
(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i &\longrightarrow \sum_{ijk} M_{ij}^* x_j^* M_{ik} y_k \\
&= \text{uvrštavanjem (5.8)} = \sum_{kj} \delta_{kj} x_j^* y_k = (x, y)
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Lako je pokazati (D.Z.) da se ovo može uzeti kao alternativna definicija unitarne grupe tj. da se unitarne matrice mogu definirati kao one koje čuvaju ovaj skalarni produkt, a onda je svojstvo $M^\dagger M = 1$, koje smo ovdje uzeli kao definiciono, samo posljedica.

4. **Specijalna unitarna grupa**

$$
SU(n) = \{M \in U(n) \mid \det M = 1\} \tag{5.14}
$$

Za prebrojavanje parametara treba prvo uočiti da je za sve unitarne matrice determinanta ograničena na apsolutnu vrijednost 1. To slijedi primjenom Binet-Cauchyjevog teorema na definiciju $MM^\dagger = 1$ što daje $|\det M|^2 = 1$ odnostno $\det M = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Dodatni uvjet za specijalne unitarne matrice $\det M = 1$ je onda samo jedna realna jednadžba $\phi = 0$ pa specijalna unitarna grupa ima točno $n^2 - 1$ parametar.

5. **Ortogonalna grupa**

$$
O(n, \mathbb{C}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid MM^{\mathrm{T}} = 1\} \tag{5.15}
$$

Kod prebrojavanja uvjeta, jedina razlika obzirom na unitarne matrice je da umjesto ($i = k$) jednadžbi (5.9) koje odgovaraju dijagonali matrične jednadžbe sada imamo

$$
\sum_j M_{ij} M_{ij} = \sum_j M_{ij}^2 = 1 \tag{5.16}
$$

što su kompleksne jednadžbe pa možemo eliminirati sve skupa $2n + n(n-1)$ parametara i ostaje ih samo $n(n-1)$.

U fizici se najčešće susrećemo s grupom ortogonalnih *realnih* matrica

$$
O(n) \equiv O(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid MM^{\mathrm{T}} = 1\} \tag{5.17}
$$

koja ima $n(n-1)/2$ parametara. (Uvjerite se u to.) Ova grupa čuva kvadratnu formu $\sum_i x_i y_i$ (skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru) što se može upotrijebiti kao alternativna definicija.

6. **Specijalna ortogonalna grupa**

$$SO(n,\mathbb{C}) = \{M \in O(n,\mathbb{C}) \mid \det M = 1\} , \tag{5.18}$$

i odgovarajuća realna grupe $SO(n)$ imaju isti broj parametara kao $O(n,\mathbb{C})$, odnosno $O(n)$. Naime, uvjet ortogonalnosti $MM^{\mathrm{T}} = 1$ opet uz primjenu Binet-Cauchyjevog teorema vodi na $(\det M)^2 = 1$, odnosno na zaključak da ortogonalne matrice imaju determinantu $\det M = \pm 1$, pa ograničenje na $\det M = 1$ ne smanjuje dimenziju parametarskog prostora.

7. **Pseudo-unitarna grupa**
Čine je $n \times n$ matrice

$$U(p,q) = \{M \in GL(n,\mathbb{C}) \mid M^{\dagger} g M = g\} , \tag{5.19}$$

gdje je $p + q = n$ i gdje je g dijagonalna matrica oblika

$$g = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p\times}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{q\times}) . \tag{5.20}$$

Ova grupa ima isti broj parametara kao i $U(n)$, te čuva kvadratnu formu oblika

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^* y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q=n} x_i^* y_i \tag{5.21}$$

koja nije pozitivno definitna pa nije skalarni produkt u smislu definicije 10.

8. **Pseudo-ortogonalna grupa**

$$O(p,q) = \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid M^{\mathrm{T}} g M = g\} , \tag{5.22}$$

gdje je $p + q = n$ i gdje je g dijagonalna matrica iz (5.20). Ove matrice čuvaju kvadratnu formu oblika

$$\sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q=n} x_i y_i . \tag{5.23}$$

Najpoznatija grupa ove vrste je grupa Lorentzovih transformacija $O(1,3)$ (vidi odjeljak 8.1).

Specijalnu pseudo-unitarnu grupu $SU(p,q)$ odnosno specijalnu pseudo-ortogonalnu grupu $SO(p,q)$ dobivamo ako se u $U(p,q)$ odnosno $O(p,q)$ ograničimo na matrice s $\det M = 1$.

5.4.1 Topološka svojstva Lievih grupa*

- $GL(n,\mathbb{C})$ je očito nekompaktna (svi elementi matrica slobodno poprimaju vrijednosti iz skupa $(-\infty,\infty)$) i povezana (kontinuiranim promjenama elemenata svaku matricu možemo pretvoriti u jediničnu).

- $GL(n, \mathbb{R})$ je isto nekompaktna. Što se tiče povezanosti, treba uočiti da je determinanta kontinuirana funkcija elemenata matrice čija je vrijednost realni broj iz $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (zahtjev postojanja inverza isključuje nulu). To znači da kontinuiranim promjenama parametara ne možemo matrice s negativnim determinantama pretvoriti u jediničnu i ova grupa ima dvije odvojene komponente povezanosti.
- Na sličan način možemo zaključiti da grupa $O(n)$, gdje je determinanta ± 1, isto ima dvije komponenete povezanosti, s time da je ova grupa kompaktna — parametri su kutevi rotacija koji poprimaju vrijednosti iz kompaktnih skupova poput $[0, 2\pi \equiv 0)$.
- $U(n)$ i $SU(n)$ su kompaktne povezane grupe, gdje je $SU(n)$ još i jednostavno povezana.
- $O(p, q)$ je nekompaktna grupa s četiri komponente povezanosti što za konkretan primjer grupe $O(1, 3)$ pokazujemo u odjeljku 8.1.

Zadaci za vježbe

5.1 Primjeri eksponenciranja matrica.

5.2 Pokažite da Levi-Civita tenzor ima slijedeća svojstva:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} && \text{(a)} \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} &= 2\delta_{km} && \text{(b)} \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6 && \text{(c)} \\
\epsilon_{ijk}a_j b_k &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i && \text{(d)} \\
\frac{1}{3!}\epsilon_{lmn}\epsilon_{ijs}A_{li}A_{mj}A_{ns} &= \det A && \text{(e)}
\end{aligned}$$

5.3 Uporabom svojstava Levi-Civita tenzora pokažite da je za vektore $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

5.4 Pokažite da Paulijeve matrice imaju slijedeća svojstva:

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= 1 && \text{(a)} \\
\sigma_i^\dagger &= \sigma_i && \text{(b)} \\
\det \sigma_i &= -1 && \text{(c)} \\
\operatorname{Tr} \sigma_i &= 0 && \text{(d)} \\
[\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k && \text{(e)} \\
\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i &= 2\delta_{ij}1 && \text{(f)} \\
\operatorname{Tr}(\sigma_i\sigma_j) &= 2\delta_{ij} && \text{(g)} \\
\sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij}1 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k && \text{(h)} \\
e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\theta} &= \cos\frac{\theta}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\sin\frac{\theta}{2} \quad \in SU(2) && \text{(i)}
\end{aligned}$$

5.5 Pokažite da je grupa SU(2) homomorfna grupi SO(3) i da je homomorfizam 2 na 1 (dvama elementima iz SU(2) je pridružen jedan element iz SO(3)).

5.6 Pokažite da je grupna mnogostrukost grupe SU(2) hipersfera u četverodimenzionalnom prostoru (tzv. *3-sfera*) definirana jednadžbom

$$x^2 + y^2 + r^2 + s^2 = 1 \ .$$

5.7 Pokažite da je $(\mathbb{R}, +)$ univerzalna grupa pokrivanja za grupu SO(2).

5.8 Pokažite da matrice

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

djelujući na vektore (x, y) čuvaju formu $x^2 - y^2$, te da je $\det M(\theta) = 1$, tako da $M(\theta)$ tvore grupu $SO(1,1)$.

Poglavlje 6

Rotacije i moment impulsa u kvantnoj mehanici

6.1 Ireducibilne reprezentacije grupe SO(2)

Teorija reprezentacija za kompaktne grupe je drastično različita od one za nekompaktne grupe

Kompaktne Lieve grupe su one čiji parametri poprimaju vrijednosti iz zatvorenih konačnih intervala:*

$$p \in [a, b] \;, \quad a, b \neq \pm\infty$$

Primjeri:

- grupa translacija nije kompaktna jer parametri translacije nisu ograničeni: $p \in (-\infty, \infty)$
- Lorentzova grupa nije kompaktna jer parametar Lorentzovog potiska dolazi iz otvorenog intervala: $v \in [0, c)$
- grupa SO(2) je kompaktna: $\phi \in [0, 2\pi = 0] \equiv [0, 2\pi)$
- grupa SO(1,1) nije kompaktna

Ključna prednost kompaktnosti je činjenica da su kontinuirane funkcije na kompaktnom skupu integrabilne pa velik broj teorema o konačnim grupama vrijedi i za kompaktne Lieve grupe, uz zamjenu (u dokazima i iskazima):

$$\frac{1}{n}\sum_{g} \longrightarrow \int \mathrm{d}g \;,$$

*Pojam kompaktnosti općenito zna biti vrlo netrivijalan, ali za naše Lieve grupe koje su *linearne* tj. posjeduju barem jednu vjernu konačnodimenzionalnu reprezentaciju vrijedi ova pojednostavljena definicija.

gdje integral, zahvaljujući kompaktnosti, konvergira.

- Mjeru integrala treba izabrati tako da vrijedi

$$\int dgf(g) = \int dgf(hg) = \int dgf(gh) \quad \forall h \in G \ .$$

Integraciju koja ima to svojstvo zovemo *invarijantna*. Takvo nam je svojstvo trebalo za dokaze teorema o reprezentacijama. Uvijek je moguće izabrati mjeru tako da integracija bude invarijantna.

- Tako možemo "preuzeti" iz teorije reprezentacije konačnih grupa teorem da su sve reprezentacije ekvivalentne unitarnima. (To nam je važno jer je unitarnost željeno svojstvo transformacija kvantnomehaničkih stanja.)

- Specijalno, svi IRREPSi od SO(2) su ekvivalentni unitarnima, pa se, kao što smo to radili i kod konačnih grupa, smijemo ograničiti na unitarne IRREPSe bez gubitka općenitosti.

- SO(2) je Abelova $\Rightarrow$ svi IRREPsi su 1D, što uz unitarnost ($uu^\dagger = uu^* = |u|^2 = 1$) znači:

$$D(\phi) = e^{-if(\phi)} \ , f(\phi) \in \mathbb{R} \ .$$

Zahtjev homomorfnosti s grupom rotacija, koja je aditivna, dalje povlači

$$f(\phi_1) + f(\phi_2) = f(\phi_1 + \phi_2)$$

što znači da je $f(\phi) = m\phi$, $m \in \mathbb{R}$. Na kraju, zahtjev periodičnosti daje:

- $D^{(m)}(\phi) = D^{(m)}(\phi + 2\pi) \ \Rightarrow \ m \in \mathbb{Z}$

- Dakle, imamo prebrojivo beskonačno 1D IRREPsa, i označavamo ih cijelim brojem m.

- Karakteri: $\chi^{(m)}(\phi) = D^{(m)}(\phi) = e^{-\mathrm{i}m\phi}$

- Ortogonalnost:

$$(\chi^{(m)}, \chi^{(m')}) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} e^{\mathrm{i}m\phi} e^{-\mathrm{i}m'\phi} = \delta_{mm'}$$

- (D.Z. Uvjerite se da je ovakva integracija invarijantna u gornjem smislu.)

- Koeficijenti u razvoju direktnog produkta dvaju IRREPsa:

$$\Gamma^{(m)} \otimes \Gamma^{(n)} = \sum \oplus \, a_k \Gamma^{(k)}$$

$$\begin{aligned} a_k &= (\chi^{(k)}, \chi^{(m)}\chi^{(n)}) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} e^{\mathrm{i}k\phi} e^{-\mathrm{i}m\phi} e^{-\mathrm{i}n\phi} = \delta_{k,m+n} \end{aligned}$$

tj.

$$\Gamma^{(m)} \otimes \Gamma^{(n)} = \sum_k \oplus \, \delta_{k,m+n} \Gamma^{(k)} = \Gamma^{(m+n)}$$

- Rastav reducibilne reprezentacije:

$$D_{2\mathrm{D}}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \chi_{2\mathrm{D}} = 2\cos\phi$$

$$\begin{aligned} a_k &= (\chi^{(k)}, \chi_{2\mathrm{D}}) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}k\phi} 2\cos\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}k\phi} (e^{\mathrm{i}\phi} + e^{-\mathrm{i}\phi}) \\ &= \delta_{k,-1} + \delta_{k,1} \end{aligned}$$

Znači postoji S [pronađite za D.Z.] takva da

$$S D_{2\mathrm{D}}(\phi) S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\phi} \end{pmatrix}$$

Digresija: Projektivne reprezentacije*

- U QM postoje sustavi za koje $m = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ tj. $D^{(m)}(\phi) = -D^{(m)}(\phi + 2\pi)$

Po definiciji, reprezentacija $\Gamma = \{D(\phi)\}$ grupe G mora zadovoljavati:

$$D(\phi_1)D(\phi_2) = D(\phi_1 \circ_{\mathrm{G}} \phi_2) = D(\phi_1 + \phi_2)$$

dok za $m = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ imamo npr.

$$D(\pi)D(\pi) = e^{im\pi}e^{im\pi} = e^{2im\pi} = -1 \neq D(2\pi) = 1 \ .$$

Riječ je o tome da se u QM $D(\phi_1)D(\phi_2)|\alpha\rangle$ i $D(\phi_1 + \phi_2)|\alpha\rangle$ smiju razlikovati za fazu a da i dalje opisuju isto fizikalno stanje.

Tako na QM stanjima dopuštamo reprezentiranje grupe i tzv. *projektivnim reprezentacijama* s "olabavljenim" uvjetom homomorfizma:

$$D(g_1)D(g_2) = e^{i\phi(g_1,g_2)} D(g_1 g_2) \ .$$

- O grupi ovisi hoće li ona imati i projektivnih REP, a o fizikalnom sustavu hoće li se transformirati obzirom na projektivne REP ili ne.

- Jedan od načina da grupa ima i projektivne reprezentacije je da ne bude jednostavno povezana.

SO(3) je dvostruko povezana i dopušta dvije faze: ± 1. Fermioni su čestice koje se transformiraju projektivno.

SO(2) je beskonačno povezana i ima beskonačno mogućih faza. No, sustavi koje razmatramo su 3D i čak i pod 2D rotacijama mogu samo promijeniti predznak tj. SO(2) je ovdje samo podgrupa od SO(3).

6.2 Ireducibilne reprezentacije grupe SO(3) tj. SU(2)

- Grupa SO(3) nije Abelova i IRREPSi više nisu 1D pa konstrukcija nije tako laka kao za SO(2).

- Lakše je konstruirati reprezentacije SO(3) *algebre*, a onda eksponencijacijom dobiti reprezentacije grupe.

- Algebru čine tri generatora grupe, X_1, X_2, X_3, eksplicitno navedena u (5.1), sa komutacijskim relacijama

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k \tag{6.1}$$

ali mi ćemo raditi s malo drugačije izraženom algebrom, preko kvantnomehaničkih operatora momenta impulsa, J_1, J_2, J_3, $J_i = \mathrm{i}\hbar X_i$ koji zadovoljavaju

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \tag{6.2}$$

Elementi grupe su $e^{\phi \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{X}} = e^{(-i/\hbar)\phi \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{J}}$ što se slaže sa odjeljkom 5.2.

- Iz unitarnosti reprezentacije ondmah slijedi da su J_i hermitski, kao što i treba biti. Znači da su njihove svojstvene vrijednosti realne.

- Operator $\boldsymbol{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ je Casimirov (cf. odjeljak 4.2) tj. komutira sa svim elementima algebre:

$$[\boldsymbol{J}^2, J_i^2] = 0 \;, \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.3}$$

- Kako nas zanimaju IRREPSi, iz druge Schurove leme slijedi da $\boldsymbol{J}^2$ mora biti proporcionalan jediničnom operatoru: $\boldsymbol{J}^2 \propto 1$. Tako se svojstvena vrijednost od $\boldsymbol{J}^2$ ne mijenja kroz cijelu IRREP i zgodna je za njeno označavanje. Usporedimo sad IRREPse grupe rotacija na običnom 3D prostoru i na prostoru kvantnomehaničkih stanja.

- IRREP na 3D euklidskom prostoru:

  $$D_{ij}^{(3D)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi) r_j = \text{lin. komb. od } \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$$

  $\hat{\boldsymbol{n}}, \phi$ — parametri
  $3D$ — oznaka IRREPsa
  r_j — koordinate vektora r_x, r_y, r_z

- IRREPsi rotacija na Hilbertovom prostoru:

  $$D^{(\beta)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)|\beta, m\rangle = e^{(-i/\hbar)\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi}|\beta, m\rangle = \text{lin. komb. od } |\beta, m_1\rangle, |\beta, m_2\rangle, \ldots$$

  β — indeks IRREPsa (na $\boldsymbol{J}$ često implicitan, no ponekad se piše $\boldsymbol{J}^{(\beta)}$)
  m — "koordinata" koja razlikuje vektore unutar istog IRREPsa.
  Vektori baze prostora na koji djeluje IRREP β su definirani slijedećim relacijama:

  $$\boldsymbol{J}^2 |\beta, m\rangle = \beta \hbar^2 |\beta, m\rangle \;. \tag{6.4}$$
  $$J_z |\beta, m\rangle = m\hbar |\beta, m\rangle \;. \tag{6.5}$$

Sada ćemo eksplicitno konstruirati IRREPse od $SU(2)$, koristeći isključivo komutacijske relacije (6.2). Prvo definiramo operatore *podizanja i spuštanja*

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y \ , \qquad [\boldsymbol{J}^2, J_\pm] = 0$$

$$\begin{aligned} [J_z, J_\pm] &= [J_z, J_x] \pm i[J_z, J_y] = i\hbar J_y \pm i(-i\hbar J_x) \\ &= \pm\hbar(J_x \pm iJ_y) = \pm\hbar J_\pm \end{aligned}$$

Slično (pokažite):

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

Djelovanjem ovih operatora dizanja i spuštanja na vektore neke IRREP, ostajemo naravno u toj istoj IRREP:

$$\boldsymbol{J}^2(J_\pm|\beta, m\rangle) = J_\pm \boldsymbol{J}^2|\beta, m\rangle = \beta\hbar^2(J_\pm|\beta, m\rangle) \ ,$$

ali svojstvena vrijednost od J_z se mijenja:

$$J_z(J_\pm|\beta, m\rangle) = ([J_z, J_\pm] + J_\pm J_z)|\beta, m\rangle = \hbar(m \pm 1)J_\pm|\beta, m\rangle \ , \tag{6.6}$$

tj.

$$J_\pm|\beta, m\rangle \propto |\beta, m \pm 1\rangle \ .$$

Do kuda može ići to dizanje i spuštanje tj. koliko različitih vrijednosti može poprimiti m?

Tvrdnja: $m^2 \leq \beta$

Dokaz: $J_\pm^\dagger = J_\mp$, jer $J_{x,y,z}^\dagger = J_{x,y,z}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+) &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) \\ &= \frac{1}{2}\left[(J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) + \text{h. c.}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[J_x^2 + iJ_yJ_x - iJ_xJ_y + J_y^2 + J_x^2 - iJ_yJ_x + iJ_xJ_y + J_x^2\right] \\ &= J_x^2 + J_y^2 = \boldsymbol{J}^2 - J_z^2 \end{aligned}$$

No,

$$\langle\beta, m|J_+^\dagger J_+|\beta, m\rangle = \langle J_+\beta, m|J_+\beta, m\rangle \geq 0 \quad \text{i isto za} J_+J_+^\dagger$$

Slijedi da je

$$\langle\beta, m|(\boldsymbol{J}^2 - J_z^2)|\beta, m\rangle = \langle\beta, m|(\beta\hbar^2 - m^2\hbar^2)|\beta, m\rangle = (\beta - m^2)\hbar^2 \geq 0$$

Q.E.D.

Dakle, za svaki β postoji $m_{\max}$ tako da

$$J_+|\beta, m_{\max}\rangle = 0$$

(To je jedini način da (6.6) ostane vrijediti.)

$m_{\max}(\beta)$=?

$$J_- J_+ |\beta, m_{\max}\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} J_- J_+ = (J_x - iJ_y)(J_x - iJ_y) &= J_x^2 + J_y^2 + i(J_x J_y - J_y J_x) \\ &= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z \\ &= \boldsymbol{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z \end{aligned}$$

Pa je

$$(\boldsymbol{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z)|\beta, m_{\max}\rangle = (\beta\hbar^2 - m_{\max}^2\hbar^2 - m_{\max}\hbar^2)|\beta, m_{\max}\rangle = 0 \ ,$$

pa kako $|\beta, m_{\max}\rangle$ nije nul-vektor slijedi da je

$$\beta = m_{\max}(m_{\max} + 1) \ .$$

Iz maločas dokazane činjenice da je $m^2 \leq \beta$ slijedi također da ni spuštanje vrijednosti m operatorom spuštanja ne može ići unedogled već da mora postojati $m_{\min}$ sa svojstvom

$$J_- |\beta, m_{\min}\rangle = 0 \ ,$$

iz čega postupkom analognim ovom gore dolazimo do

$$\beta = m_{\min}(m_{\min} - 1) \ .$$

Izjednačivši ove dvije vrijednosti za β

$$m_{\max}(m_{\max} + 1) = m_{\min}(m_{\min} - 1)$$

dobijemo kvadratnu jednadžbu za $m_{\min}$ od čija dva rješenja $m_{\min} = m_{\max} + 1$ i $m_{\min} = -m_{\max}$ ovo prvo ne dolazi u obzir jer je $m_{\max}$ po pretpostavci najveća moguća vrijednost za m. Tako imamo, uvodeći oznaku $j = m_{\max}$,

$$-j = m_{\min} \leq m \leq m_{\max} = j \ .$$

Nadalje, kako operatori $J_\pm$ dižu ili spuštaju m točno za 1, mora biti $m_{\max} = m_{\min} + n$, gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, tj. $j = -j + n \ \Rightarrow \ j = n/2$

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \ .$$

Vrijednost $\beta = j(j+1)$ je ista za cijelu IRREP i uobičajenije je upravo j koristiti za označavanje IRREPa:

$$|\beta, m\rangle \longrightarrow |j, m\rangle \ ,$$

gdje m poprima vrijednosti

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

i gdje vektori baze IRREPa $|j,m\rangle$ zadovoljavaju

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}^2|j,m\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \quad \text{i} \\ J_z|j,m\rangle &= \hbar m|j,m\rangle \ . \end{aligned}$$

Tako smo koristeći isključivo komutacijske relacije algebre grupe rotacija konstruirali sve njene ireducibilne reprezentacije!

Kako je ta algebra zajednička i grupi $SO(3)$ i grupi $SU(2)$ dobili smo i reprezentacije s polucjelobrojnim momentom impulsa j.

Još nas zanima i točno djelovanje operatora $J_\pm$ na vektore baze:

$$J_+|j,m\rangle = c_{jm}|j,m+1\rangle \ .$$

Zahvaljujući ortonormiranosti:

$$\begin{aligned} |c_{jm}|^2 &= \langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle \\ &= \langle j,m|(\boldsymbol{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z|j,m\rangle \\ &= \langle j,m|(\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m|j,m\rangle \\ &= \hbar^2[j(j+1) - m(m+1)] \\ &= \hbar^2(j-m)(j+m+1) \end{aligned}$$

Faza od c_{jm} je neodređena i prema tzv. Condon-Shortley konvenciji odabire se realan i pozitivan c_{jm}:

$$J_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j,m+1\rangle \ .$$

Slično, [pokažite]

$$J_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j,m-1\rangle \ .$$

Ove relacije nam omogućuju da odredimo matrične elemente operatora momenta impulsa između proizvoljnih stanja. Također, eksponencijacijom možemo odrediti matrične elemente samih operatora rotacija:

$$\langle j,m'|D^{(j)}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)|j,m\rangle \quad - \quad \text{Wignerove D-funkcije}$$

Za konkretne primjere vidi vježbe.

Sažetak:

- Operatori momenta impulsa J_x, J_y i J_z te njihove kombinacije $\boldsymbol{J}^2, J_\pm, \ldots$ za dani j, tj. za danu ireducibilnu reprezentaciju grupe rotacija, djeluju na $(2j+1)$-dimenzionalnom vektorskom prostoru razapetom vektorima $|j,m\rangle$, $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$.
- operatori $D^{(j)} = e^{-i\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi/\hbar}$ čine reprezentaciju grupe rotacija na $(2j+1)$-dimenzionalnom Hilbertovom vektorskom prostoru kvantnomehaničkih stanja

- $J_\pm$ povezuju svih $2j+1$ vektora $|j,m\rangle$ tj. reprezentacija je stvarno ireducibilna
- baza vektorskog prostora $|j,m\rangle$, $m=-j,-j+1,\ldots,j-1,j$ se obično naziva *multiplet*. (Neki autori tako zovu cijeli vektorski prostor.)
  - $j=0$: *singlet*
  - $j=\frac{1}{2}$: *dublet*
  - $j=1$: *triplet*
  - $\ldots$

Orbitalni moment impulsa:

- Specijalna vrsta momenta impulsa koja je oblika $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$

- Kao posljedica toga (ne sasvim trivijalna), svojstvene vrijednosti su isključivo cjelobrojne:

$$\boldsymbol{L}^2|l,m\rangle=\hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle \qquad l=0,1,2,\ldots$$

i označavaju se s l, a ne j.

- Iz povijesnih razloga vezanih uz atomsku fiziku, stanja s $l=0,1,2,\ldots$ se često nazivaju $S,P,D,\ldots$ stanja, a m se ponekad naziva *magnetski* kvantni broj (zbog svoje uloge u Zeemanovom efektu).

6.3 Zbrajanje momenata impulsa i Clebsch-Gordanovi koeficijenti

Sustav od dvije čestice, sa spinovima j_1 i j_2 u stanju $|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle$ ima svojstva:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_1^2|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle &= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\\
\boldsymbol{J}_2^2|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle &= j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\\
J_{1z}|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle &= m_1\hbar|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\\
J_{2z}|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle &= m_2\hbar|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|j_1,m_1\rangle &\in V_1\\
|j_2,m_2\rangle &\in V_2\\
|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle \equiv |j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle &\in V_1\otimes V_2
\end{aligned}$$

Na vektorskom prostoru V_1 grupa rotacija reprezentirana je operatorima $D^{(j_1)}=\exp(-i\boldsymbol{J}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\theta/\hbar)$ (i slično za V_2), a na $V_1\otimes V_2$ operatorima $D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)}$.

Međutim, $D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)}$ je općenito reducibilna reprezentacija koja nema dobro definiran spin. $|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle$ nije nužno svojstveno stanje od $\boldsymbol{J}^2=(\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2)^2$ — operatora ukupnog spina sustava.

Rastav na IRREPSE:

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_J \oplus\, a_J D^{(J)} \qquad \text{- Clebsch-Gordanov razvoj}$$

$$a_J = \left(\chi^{(J)}, \chi^{(j_1)}\chi^{(j_2)}\right)$$

Za općeniti račun skalarnih umnožaka karaktera trebali bismo znati invarijantno integrirati u grupnom prostoru (cf. Jones, Appendix C ili Hamermesh 9-2), ali ovdje ćemo potrebni rezulatat dobiti i bez toga, uz par matematičkih trikova:

Kao reprezentante klasa biramo rotacije oko z-osi.

$$\begin{aligned}
\chi^{(j)}(\phi) &= \mathrm{Tr}\, D^{(j)}(\phi) = \mathrm{Tr}\, e^{(-i/\hbar)J_3\phi} \\
&= \mathrm{Tr\,diagonal}\left(e^{-ij\phi}, e^{-i(j-1)\phi}, \ldots, e^{-i(-j)\phi}\right) \\
&= e^{-ij\phi} + e^{-i(j-1)\phi} + \cdots + e^{-i(-j)\phi} \\
&= \text{geom. red s omjerom članova } e^{ij\phi} \qquad (6.7)\\
&= e^{-ij\phi}\frac{1-(e^{ij\phi})^{2j+1}}{1-e^{i\phi}} = \frac{e^{-i(j+1/2)\phi} - e^{i(j+1/2)\phi}}{e^{-i\phi/2} - e^{i\phi/2}} \\
&= \frac{\sin(j+1/2)\phi}{\sin\phi/2}
\end{aligned}$$

Odredimo sada koeficijente a_J Clebsch-Gordanovog razvoja. Pretpostavimo prvo da je $j_1 \geq j_2$.

$$\begin{aligned}
\chi^{(j_1)}(\phi)\chi^{(j_2)}(\phi) &= \frac{e^{+i(j_1+1/2)\phi} - e^{-i(j_1+1/2)\phi}}{2i\sin\phi/2} \sum_{m=-j_2}^{j_2} e^{im\phi} \\
&= \frac{1}{2i\sin\phi/2} \sum_{m=-j_2}^{j_2} \left[e^{i(j_1+m+1/2)\phi} - e^{-i(j_1-m+1/2)\phi}\right] \\
&= (\text{zamjena } m \to -m \text{ u drugom članu}) \\
&= \sum_{m=-j_2}^{j_2} \frac{\sin(j_1+m+1/2)\phi}{\sin\phi/2} \qquad (6.8)\\
&= \sum_{m=-j_2}^{j_2} \chi^{(j_1+m)}(\phi) \qquad (J \equiv j_1 + m) \\
&= \sum_{J=j_1-j_2}^{J=j_1+j_2} \chi^{(J)}(\phi)\ .
\end{aligned}$$

(J mora biti pozitivan da bi bio labela neke IRREPS. Zato smo tražili $j_1 \geq j_2$.) Za slučaj $j_2 \geq j_1$ imali bi sve isto, uz zamjenu $j_1 \leftrightarrow j_2$. Slijedi da općenito možemo pisati:

$$\chi^{(j_1)}(\phi)\chi^{(j_2)}(\phi) = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{J=j_1+j_2} \chi^{(J)}(\phi)$$

Dakle,

$$a_J = \left(\chi^{(J)}, \chi^{(j_1)}\chi^{(j_2)}\right) = \sum_{J'=|j_1-j_2|}^{J'=j_1+j_2} \underbrace{\left(\chi^{(J)}, \chi^{(J')}\right)}_{\delta_{JJ'}}$$

odnosno,

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{J=j_1+j_2} \oplus D^{(J)} \tag{6.9}$$

Npr. $D^{(1/2)} \otimes D^{(1)} = D^{(1/2)} \oplus D^{(3/2)}$.

- Ovo da se svaka ireducibilna reprezentacija pojavljuje najviše jednom je veliko pojednostavljenje svojstveno grupi rotacija.

- D.Z. Uvjerite se da se dimenzije dobro zbrajaju tj. da je

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{J=j_1+j_2} (2J+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

No, za primjene je zanimljivije zbrajanje stanja!

$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ su vektori koji su baza od $V_1 \otimes V_2$ i koji su svojstveni vektori operatora $\{\boldsymbol{J}_1^2, \boldsymbol{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$. No, postoji i baza $|j_1, j_2; J, M\rangle \equiv |J, M\rangle$ tog istog prostora koju čine svojstveni vektori operatora $\{\boldsymbol{J}_1^2, \boldsymbol{J}_2^2, \boldsymbol{J}^2, J_z\}$.

- D.Z. Uvjerite se da je

$$[\boldsymbol{J}^2, \boldsymbol{J}_1^2] = [\boldsymbol{J}^2, \boldsymbol{J}_2^2] = 0$$

- Dvije baze su naravno povezane:

$$|J, M\rangle = \underbrace{\sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\langle j_1, m_1; j_2, m_2|}_{=1} |J, M\rangle$$

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle \equiv C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \quad \text{Clebsch-Gordanovi koeficijenti} \tag{6.10}$$

Svojstva Clebsch-Gordanovih koeficijenata*

- $C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} = 0$ ako nije $|j_1 - j_2| \le J \le j_1 + j_2$.
  Dokaz: očito iz rastava $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$.

- $C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} = 0$ ako nije $M = m_1 + m_2$.
  Dokaz:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2 \;\Rightarrow\; J_z - J_{1z} - J_{2z} = 0 \tag{6.11}$$

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | (J_z - J_{1z} - J_{2z}) | J, M\rangle = 0 \tag{6.12}$$

$$(M - m_1 - m_2)\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle = 0 \tag{6.13}$$

- CG-koeficijenti imaju neodređenu fazu. Standardni izbor je da se uzme $C^{JJ}_{j_1 j_1 j_2 (J-j_1)}$ realan i pozitivan. Kao (netrivijalna) posljedica toga, svi CG-koeficijenti ispadaju realni.

- $$\sum_{JM} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{JM}_{j_1 m'_1 j_2 m'_2} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

- $$\sum_{m_1, m_2} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} C^{J'M'}_{j_1 m_1 j_2 m_2} = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

- $$|J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

  (Isti koeficijenti pretvaraju baze u oba smjera.). Za dokaz, pomnožiti s $\sum_{J,M} C^{JM}_{j_1 m'_1 j_2 m'_2}$ i koristiti svojstva ortogonalnosti.

- $$C^{JM}_{j_1 m_1 j_2 m_2} = (-1)^{J-j_1-j_2} C^{JM}_{j_2 m_2 j_1 m_1}$$

Izračunavanje Clebsch-Gordanovih koeficijenata*

Primjer: $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = D^{(1)} \oplus D^{(0)}$.

Prva baza: $|1/2, m_1; 1/2, m_2\rangle \equiv |m_1, m_2\rangle$. $m_{1,2} = \pm 1/2 \;\Rightarrow\;$ 4 stanja

Druga baza: $|J, M\rangle$. $M = -1, 0, 1$ za $J = 1$ i $M = 0$ za $J = 0$. $\;\Rightarrow\; 3 + 1 = 4$ stanja.

$$\begin{aligned}
|1,1\rangle &= \sum_{m_1, m_2} C^{11}_{\frac{1}{2} m_1 \frac{1}{2} m_2} |m_1, m_2\rangle \\
& (M = m_1 + m_2 = 1 \;\Rightarrow\; m_1 = m_2 = \frac{1}{2}) \\
&= C^{11}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

To što su oba stanja normirana povlači da je $|C^{11}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}| = 1$. Već smo odabrali da je $C \in \mathbb{R}$, a sada još biramo i da je pozitivan: $C^{11}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 1$.

$$|1,1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

Sada, da bismo dobili ostale CG-koeficijente, djelujemo s $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ na obje strane ove jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
J_-|1,1\rangle &= \hbar\sqrt{(1+1)(1-1+1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \\
J_{1-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \hbar|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\
J_{2-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \hbar|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

Slijedi

$$
|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right)
$$

tj.

$$
C^{10}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = C^{10}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
$$

Nadalje,

$$
|1,-1\rangle = |-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \;\Rightarrow\; C^{1-1}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1
$$

D.Z. - Dobiti ovo s J_-.

Na kraju, napišimo, imajući u vidu da $M = m_1 + m_2$

$$
|0,0\rangle = \alpha|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + \beta|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\ ,
$$

gdje su α i β koeficijenti koje treba odrediti. Djelovanjem s J_- na obje strane imamo:

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + \beta|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle + 0 + 0 \\
&= (\alpha+\beta)|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \;\Rightarrow\; \beta = -\alpha
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

$\Rightarrow$

$$
|0,0\rangle = \alpha\left(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle - |-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right)
$$

Normalizacija i izbor faze daju $\alpha = 1/\sqrt{2}$ tj.

$$
C^{00}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -C^{00}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
$$

- Svi ostali koeficijenti su nula.

- Za CG-koeficijente postoje tablice i računalni programi. Za generalnu formulu vidi Hamermesh 9-8.

Dosad rečeno nam opisuje ponašanje proizvoljnog kvantnomehaničkog stanja pri rotaciji:

- $|j,m\rangle$ stanja se transformiraju pod IRREPsima - D-funkcije
- složenija stanja reduciramo pomoću Clebsch-Gordanovih koeficijenata

6.4 Tenzorski operatori i Wigner-Eckartov teorem

U prošla dva odjeljka smo naučili rotirati kvantnomehanička stanja. Da bismo potpuno ovladali primjenama rotacijske simetrije u kvantnoj mehanici potrebno je znati i kako se pri rotacijama ponašaju kvantnomehanički operatori.

Primjer: Skalarni operator S

- $D(R)SD(R)^{-1} = S$ — invarijantan na rotacije (po definiciji)

$$\begin{aligned} e^{-i\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi/\hbar} S e^{-i\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi/\hbar} &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi\right) S \left(1 + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi\right) + O(\phi^2) \\ &= S - \frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{J}S - S\boldsymbol{J})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi \\ &= S \qquad \Rightarrow \qquad [\boldsymbol{J}, S] = 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

(Analogno kao što očuvani operatori tj. operatori invarijantni na translacije u vremenu komutiraju s hamiltonijanom — generatorom translacija u vremenu.)

Matrični elementi od S? (Obično je najzanimljivije znati neke informacije o matričnim elementima operatora.)

$$\langle j'm'|S|jm\rangle = ?$$

$$\begin{aligned} \langle j'm'|S\boldsymbol{J}^2|jm\rangle &= \langle j'm'|\boldsymbol{J}^2 S|jm\rangle \\ j(j+1)\hbar^2\langle j'm'|S|jm\rangle &= j'(j'+1)\hbar^2\langle j'm'|S|jm\rangle \\ (j-j')(\underbrace{j+j'+1}_{\neq 0})\langle j'm'|S|jm\rangle &= 0 \\ &\Rightarrow \langle j'm'|S|jm\rangle \propto \delta_{jj'} \end{aligned}$$

Slično (D.Z),

$$\langle j'm'|S|jm\rangle \propto \delta_{mm'} \ .$$

Znači, samo

$$\langle jm|S|jm\rangle \neq 0 \qquad \text{Izborno pravilo}$$

Promotrimo li sada matrične elemente od SJ_+ možemo dobiti dodatne informacije:

$$\begin{aligned} \langle jm|SJ_+|jm-1\rangle &= \underbrace{\langle jm|J_+}_{\langle J_j m|} S|jm-1\rangle \\ \hbar\sqrt{(j-m+1)(j+m)}\langle jm|S|jm\rangle &= \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\langle jm-1|S|jm-1\rangle \\ \langle jm|S|jm\rangle &= \langle jm-1|S|jm-1\rangle \end{aligned}$$

Dakle, matrični element $\langle jm|S|jm\rangle$ ne ovisi o m! Običaj je u tom slučaju pisati

$$\langle j'm'|S|jm\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \qquad \underbrace{\langle j'||S||j\rangle}_{\text{tzv. } \textit{reducirani matrični element}}$$

Za dati j, umjesto $(2j+1)^2$ matričnih elemenata, dovoljno je izračunati jedan!

Za poopćenje ovog na složenije operatore treba promatrati operatore koji se dobro transformiraju na rotacije — *tenzorski operatori*. Podsjetimo se: Stanja koja se "dobro" transformiraju pri rotacijama su $|jm\rangle$ sa svojstvom

$$D(r)|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\langle jm'|D(R)|jm\rangle = \sum_{m'} D^j_{mm'}|jm'\rangle$$

Definicija 26 (Ireducibilni sferični tenzorski operator)
Ireducibilni sferični tenzorski operator $T^{(k)}$ ranga k, sa $2k+1$ komponenata $T_q^{(k)}$, $q = -k, -k+1, \ldots, k$ je operator koji zadovoljava

$$D(R)T_q^{(k)}D(R)^{-1} = \sum_{q'=-k}^{k} D^{(k)}_{q'q}(R)T^{(k)}_{q'} \tag{6.16}$$

Ekvivalentno, sferične tenzore možemo definirati zahtjevima

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)} \tag{6.17}$$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}T^{(k)}_{q\pm 1} \tag{6.18}$$

(D.Z. pokažite ekvivalentnost ovih definicija. Naputak: Napišite originalnu definiciju u infinitezimalnom obliku.)

Npr. J_z i $\mp(1/\sqrt{2})J_\pm$ formiraju sferični tenzor ranga 1. (D.Z. pokažite to!)

N.B. "Komponente" sferičnog tenzora su također operatori. Ne dolaziti u zabunu s komponentama matrica — brojevima. Ove "komponente" sferičnog tenzora se naravno također mogu napisati u matričnom obliku i onda one imaju svoje komponente tj. matrične elemente koji jesu brojevi.

N.B. $D^{(j)}$ nije tenzorski operator ranga j.

Teorem 9 (Wigner-Eckart)
Matrični elementi tenzorskih operatora između svojstvenih stanja momenata impulsa zadovoljavaju relaciju

$$\langle j'm'|T_q^{(k)}|jm\rangle = C^{j'm'}_{jmkq}\frac{\langle j'||T^{(k)}||j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\ , \tag{6.19}$$

gdje je $\langle j'||T^{(k)}||j\rangle$ tzv. *reducirani matrični element* koji ne ovisi o m, q i m'.

Za dokaz vidi literaturu.

Posljedica ovog teorema je da izračunavanje jednog jedinog matričnog elementa (npr. za slučaj $m' = q = m = 0$) onda omogućuje trivijalno određivanje svih ostalih pomoću tablica Clebsch-Gordanovih koeficijenata.

Primjer: skalarni operator

$$S = T_0^{(0)} \;\Rightarrow\; \langle j'm'||T_0^{(0)}|jm\rangle = C_{jm00}^{j'm'} \frac{\langle j'||T^{(0)}||j\rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

pa svojstva Clebsch-Gordanovih koeficijenata automatski daju rezultate iz uvoda ovog odjeljka:

- $m + 0 = m' \;\Rightarrow\; m = m'$
- $|j - 0| \leq j' \leq j + 0 \;\Rightarrow\; j = j'$

Primjer: Izborna pravila za dipolno zračenje

$$\text{Amplituda} \propto \langle n'l'm'|\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}|nlm\rangle = \boldsymbol{E}\cdot\langle n'l'm'|\boldsymbol{x}|nlm\rangle$$

$\boldsymbol{E}$ — vanjsko polje (nije operator). $\boldsymbol{x}$ — tenzor ranga 1 (vektor); $x_q^{(1)}$, $x_z \leftrightarrow x_0^{(1)}$, $x_{x,y} \leftrightarrow x_{\pm 1}^{(1)}$ Teorem $\Rightarrow$

$$\langle n'l'm'|x_q^{(1)}|nlm\rangle = C_{lm1q}^{l'm'} \frac{\langle n'l'||x^{(1)}||nl\rangle}{\sqrt{2l+1}} \;,$$

- $|l - 1| \leq l' \leq l + 1 \;\Rightarrow\; \Delta l = \pm 1, 0$
- $m + q = m' \;\Rightarrow$
  - za $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$ $\quad m' = m$
  - za $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}, E\hat{\boldsymbol{y}}$ $\quad m' = m \pm 1$

  $\Rightarrow\; \Delta m = \pm 1, 0$

(Usput, dodatna simetrija koju ima ovaj sustav, simetrija pariteta, zabranjuje $\delta l = 0$ prijelaze.)

6.4.1 Veza kartezijevih i sferičnih tenzora

Tenzore smo (definicija 21) definirali kao objekte koji se pri rotaciji transformiraju kao npr.:

$$T_{ij} \longrightarrow R_{ii'}R_{jj'}T_{i'j'} \qquad \text{(tenzor ranga 2)}$$

To su *kartezijevi* tenzori.

Kartezijevi tenzori ranga 1 tj. uobičajeni kartezijevi vektori se također mogu definirati kao trojke operatora koje zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[J_i, V_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k \tag{6.20}$$

Problem kartezijevih tenzora je da nisu ireducibilni. To se ne vidi na tenzorima ranga 0 ili 1 koji jesu ireducibilni i jednaki su odgovarajućim sferičnim tenzorima do na drugačije kombinacije komponenata. Konkretno:

$$T_0^{(0)} \text{ (sferični tenzor ranga 0 tj. skalar)} = T \text{ (kartezijev tenzor ranga 0 tj. skalar)} \tag{6.21}$$

Za operatore ranga 1 (vektore) imamo već spomenute relacije

$$T_0^{(1)} = T_z \ , \quad T_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(T_x \pm iT_y) \ , \tag{6.22}$$

i rotacije očito miješaju sve tri komponente kartezijevog tenzora $\boldsymbol{T}$. Međutim, kartezijev tenzor ranga 2, T_{ij}, više nije ireducibilan; njegovih 9 komponenti se može organizirati u kombinacije koje se međusobno ne miješaju pri rotacijama. Kao prvo, trag tenzora $\mathrm{Tr}T = T_{ii}$ je invarijantan na rotacije:

$$T_{ii} = \delta_{ij}T_{ij} \longrightarrow \delta_{ij}R_{ii'}R_{jj'}T_{i'j'} = (R_{ji'}R_{jj'})T_{i'j'} = (R^{\mathrm{T}}R)_{i'j'}T_{i'j'} \tag{6.23}$$

$$= \delta_{i'j'}T_{i'j'} = T_{i'i'} \ , \tag{6.24}$$

gdje smo u predzadnjem koraku upotrijebili svojstvo ortogonalnosti matrica rotacije. Dakle, trag $T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$ je skalar tj. tenzor ranga 0. Nadalje, kartezijev tenzor T_{ij}, baš kao i svaku matricu, možemo rastaviti na antisimetrični i simetrični dio:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \ . \tag{6.25}$$

Lako je uočiti da rotacije ne miješaju ove dvije komponente: rotacija (anti)simetrične matrice daje (anti)simetričnu matricu. (Vidi zadatak 6.13). Tako tri nezavisne antisimetrične kombinacije, $(T_{xy} - T_{yx})/2$, $(T_{yz} - T_{zy})/2$ i $(T_{zx} - T_{xz})/2$, čine sferični tenzor prvog ranga tj. vektor, što se vidi po broju komponenata i po činjenici da je ovaj fročlani skup ireducibilan tj. rotacije pretvaraju jedan element u drugi. Simetrični dio ima šest komponenata, T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, $(T_{xy}+T_{yx})/2$, $(T_{yz}+T_{zy})/2$ i $(T_{zx}+T_{xz})/2$, ali treba uočiti da je zbroj prvih triju jednak tragu za kojeg znamo da je posebno ireducibilan pa ga treba eliminirati da bi se dobilo pet nezavisnih komponenata koje čine sferični tenzor drugog ranga. Dakle, konačni rastav kartezijevog tenzora drugog ranga na ireducibilne tenzore ranga 0, 1 i 2 je

$$T_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk} + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \left[\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}\right] \ , \tag{6.26}$$

gdje faktor 1/3 osigurava da zadnji član bude traga nula. (Cf. Sakurai odjeljak 3.10)

6.5 Degeneracija nivoa vodikovog atoma i SO(4) simetrija

Vidjeli smo u odjeljku 3.5 da postojanje operatora simetrije $\{U(g) \quad | \quad g \in G\}$, $[U(g), H] = 0$ povlači degeneraciju energijskih nivoa koji odgovaraju stanjima $\{U(g)|\alpha\rangle \quad | \quad g \in G\}$. Tamo je to bilo ilustrirano na primjeru konačnih grupa.

Zanimljiv primjer degeneracije kao posljedice kontinuirane sferne simetrije su nivoi u vodikovom atomu. Hamiltonijan (u CGS sustavu jedinica)

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \ . \tag{6.27}$$

je rotacijski simetričan i kao posljedica toga komutira s operatorom rotacija

$$[H, D(\boldsymbol{n}, \phi)] = 0 \ . \tag{6.28}$$

To povlači da svih $2l+1$ stanja date ireducibilne reprezentacije grupe rotacija s kvantnim brojem l

$$\big\{|nlm\rangle \quad | \quad m \in \{-l, -l+1, ..., l\}\big\} = \big\{D(g)|nlm\rangle \quad | \quad g \in SO(3)\big\} \tag{6.29}$$

ima istu energiju, kako smo već spominjali u odjeljku 2.2.

Međutim, poznato je da energije stanja vodikovog atoma ne ovise ni o kvantnom broju l i da n^2 stanja

$$\big\{|nlm\rangle \quad | \quad l = \{0, 1, \dots, n-1\}; m \in \{-l, -l+1, \dots, l\}\big\} \tag{6.30}$$

imaju istu energiju†

$$E_n = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2 n^2} \ . \tag{6.31}$$

Dakle, umjesto $2l+1$-struke degeneracije koju očekujemo kao posljedicu rotacijske simetrije imamo veću, n^2-struku degeneraciju. Ovakva situacija obično znači da sustav ima veću simetriju nego što smo originalno očekivali. Koju to simetriju, pored rotacijske, ima sustav opisan hamiltonijanom (6.27)? Da bismo istražili to pitanje vratit ćemo se u područje klasične fizike gdje se javlja slična situacija u problemu dva tijela čiji je hamiltonijan

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e_M^2}{r} \quad ; \quad e_M^2 \equiv GMm \ . \tag{6.32}$$

matematički ekvivalentan onom vodikovog atoma.

Kod problema dva tijela rotacijska simetrija i njoj odgovarajući zakon očuvanja momenta impulsa ($\boldsymbol{L}$=const.) manifestiraju se kroz činjenicu da putanja sustava (elipsa) ostaje cijelo vrijeme u istoj ravnini. Međutim, i ovdje se javlja zanimljiva dodatna simetrija — putanja je zatvorena elipsa i smjer perihela elipse je također konstantan‡. Odgovarajući očuvani vektor je tzv. *Laplace-Runge-Lenzov* vektor

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{L} - \frac{e_M^2}{r}\boldsymbol{r} \ . \tag{6.33}$$

Njegovo očuvanje ($\boldsymbol{M}$=const.), slijedi iz drugog Newtonovog zakona uz malo elementarne vektorske algebre. Prije svega primijetimo da je

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{r\boldsymbol{v} - \boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{r}}{r^2} \ ,$$

†Ovdje radimo s pojednostavljenim modelom vodikovog atoma opisanim hamiltonijanom (6.27). U realnom vodikovom atomu postoje i dodatni članovi u hamiltonijanu, poput člana interakcije spina i orbite, koji razbijaju ovu degeneraciju i čine da energije nivoa ovise i o orbitalnom kvantnom broju l — tzv. *fina struktura* vodikovog spektra.

‡Ovo vrijedi u klasičnoj Newtonovoj teoriji gravitacije. Poznato je da Einsteinova teorija gravitacije korigira ovaj rezultat i da položaj perihela elipse nije konstantan već vrlo polako precesira.

gdje smo iskoristili $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = \mathrm{d}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})/2\mathrm{d}t = rdr/dt$.

Sad deriviramo (6.33) po vremenu, uz korištenje ($\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}/m = -(e_M^2 \boldsymbol{r})/(mr^3)$):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{v} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}}_{=0} - e_M^2 \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{e_M^2}{mr^3} \underbrace{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{L}}_{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{p}} - \frac{e_M^2}{mr^3}\Big[r^2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\Big] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Primjetite kako je za ovaj izvod ključno da je $\boldsymbol{F} \propto 1/r^2$.

Također, uočite da su $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{L}$ okomiti ($\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{L} = 0$, trivijalno).

Posebno je zanimljivo kako sad nakon što smo identificirali ovaj dodatni očuvani vektor (6.33) možemo lako riješiti problem dvaju tijela:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{M} &= \underbrace{\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{L})}_{\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})} - \frac{e_M^2}{r} r^2 = \frac{L^2}{m} - e_M^2 r \\
&= rM\cos\theta
\end{aligned} \tag{6.34}$$

gdje je θ kut kojeg zatvara $\boldsymbol{r}$ prema konstantnom vektoru $\boldsymbol{M}$. Ovu jednadžbu možemo prepisati u obliku

$$\frac{1}{r} = \frac{e_M^2 m}{L^2}\left(1 + \frac{M}{e_M^2}\cos\theta\right) \tag{6.35}$$

što prepoznajemo kao polarnu jednadžbu elipse ekscentriciteta $e = M/e_M^2$ (usp. npr. Goldstein, jedn. (3-51)). Dakle riješili smo problem i dobili trajektoriju sustava bez ikakvog rješavanja diferencijalne jednadžbe gibanja!

Možemo li sad ova saznanja primjeniti u kvantnoj mehanici na naš početni problem dodatne degeneracije nivoa vodikovog atoma? Postoji li kvantnomehanički operator koji bi bio analogon Laplace-Runge-Lenzovog vektora (6.33)? Naivni pokušaj s operatorom

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \times \boldsymbol{L} - e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r} \;. \tag{6.36}$$

ne prolazi jer ovaj operator, zbog

$$(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L})^\dagger = -\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{p} \;,$$

nije hermitski. Stoga je potrebno definirati kvantni Laplace-Runge-Lenzov vektor ovako:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2m}\big(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{p}\big) - e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r} \;. \tag{6.37}$$

Uz podosta računa (vidi Greiner&Müller, ex. 14.4–14.8) pokazuje se da vrijedi

$$[\boldsymbol{M}, H] = 0 \,, \tag{A}$$
$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M} = 0 \,, \tag{B}$$
$$\boldsymbol{M}^2 = \frac{2H}{m}(\boldsymbol{L}^2 + \hbar^2) + e^4 \,, \tag{C}$$
$$[L_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M_k \,, \tag{D}$$
$$[M_i, M_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\left(-\frac{2H}{m}\right)L_k \,. \tag{E}$$

(A) kaže da je $\boldsymbol{M}$ očuvan i u kvantnomehaničkom slučaju, a (D) da je M kartezijev vektor u smislu odjeljka 6.4. (Klasični analogon jednadžbe (C) je $\boldsymbol{M}^2 = 2E\boldsymbol{L}^2/m + e_M^4$.)

Definirajmo sada operator

$$\boldsymbol{M}' \equiv \left(-\frac{2H}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{M} \,. \tag{6.38}$$

Uočite da je izraz u zagradi pozitivno definitan jer je spektar operatora H cijeli negativan budući da radimo s vezanim stanjima vodikovog atoma. Ovakav reskalirani operator $\boldsymbol{M}'$ zadovoljava sada komutacijske relacije

$$[M_i', M_j'] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \,. \tag{E'}$$

i pomoću njega možemo definirati dva nova operatora

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}'\big) \tag{6.39}$$
$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{M}'\big) \,. \tag{6.40}$$

(Odnosno $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}$.) Uporabom relacija (D) i (E') te standardnih komutacijskih relacija za moment impulsa $\boldsymbol{L}$ lako se vidi da ova dva operatora zadovoljavaju komutacijske relacije

$$[I_i, I_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}I_k \tag{6.41}$$
$$[K_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}K_k \tag{6.42}$$
$$[I_i, K_j] = 0 \tag{6.43}$$

što znači da i I_i i K_i generiraju svaki svoju algebru grupe SO(3) tj. da je ukupna grupa simetrija vodikovog atoma SO(3)×SO(3)[§]

Sad možemo upotrijebiti naše poznavanje svojstava reprezentacija grupe SO(3). Činjenica da I_i i K_i zadovoljavaju iste komutacijske relacije kao i moment impulsa povlači da su svojstvene vrijednosti od $\boldsymbol{I}^2$ $i(i+1)\hbar^2$, a od $\boldsymbol{K}^2$ $k(k+1)\hbar^2$, uz $i, k = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$

[§]Vrijedi grupni identitet SO(3)×SO(3) = SO(4). Otud naslov ovog odjeljka. SO(4) je grupa generirana s 6 generatora $L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; $[x_\mu, p_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu}$. Definiramo li $L_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L_{jk}$ i $M_i' = L_{4i}$, $i, j, k = 1, 2, 3$, dobijemo gornje komutacijske relacije.

Dodatni uvjet na ove svojstvene vrijednosti je relacija (B) koja daje:

$$0 = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{M}' = (\boldsymbol{I})^2 - (\boldsymbol{K})^2 = i(i+1)\hbar^2 - k(k+1)\hbar^2 \;, \tag{6.44}$$

odnosno $i = k \equiv j$. (Alternativno rješenje jednadžbe (6.44) $i = -(k+1)$ nije moguće jer daje negativne svojstvene vrijednosti za i ili k.)

Prepišimo sada jednadžbu (C) pomoću novih operatora. Množenjem (C) s $(-2H/m)^{-1}$ dobije se

$$\boldsymbol{M}'^2 = -(\boldsymbol{L}^2 + \hbar^2) - \frac{me^4}{2H} \tag{6.45}$$

ili

$$\begin{aligned} -\frac{me^4}{2}H^{-1} &= \boldsymbol{M}'^2 + \boldsymbol{L}^2 + \hbar^2 &(6.46)\\ &= \big[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\big]^2 + \big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}\big]^2 + \hbar^2 &(6.47)\\ &= 2\big[\boldsymbol{I}^2 + \boldsymbol{K}^2\big]^2 + \hbar^2 \;. &(6.48) \end{aligned}$$

To znači da za svojstvena stanja energije i momenta impulsa vrijedi

$$-\frac{me^4}{2}E^{-1} = 2\big[i(i+1)\hbar^2 + k(k+1)\hbar^2\big]^2 + \hbar^2 = \hbar^2\big[4j(j+1)+1\big] = \hbar^2(2j+1)^2 \tag{6.49}$$

što daje spektar

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2(2j+1)^2} \;. \tag{6.50}$$

Uvedemo li kvantni broj $n \equiv 2j+1$, onda iz $j = 0, 1/2, 1, \ldots$ slijedi $n = 1, 2, 3, \ldots$ i ovo prepoznajemo kao ispravni izraz za spektar vodikovog atoma.

Kako je "pravi" angularni moment $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}$ njegove svojstvene vrijednosti dane su pravilima za zbrajanje momenata impulsa tj.

$$|j - j| \le l \le j + j \tag{6.51}$$

tj. $l \le 2j \le n - 1$, što je poznati rezultat. Također, l automatski ispada cjelobrojan. Dakle i kvantnomehanički spektar vodikovog atoma smo našli bez rješavanja Schrödingerove jednadžbe!

Degeneracija. Da se još jednom uvjerimo da je degeneracija svakog nivoa n^2-struka možemo brojati stanja u bazi koja dijagonalizira operatore H, $\boldsymbol{L}^2$ i L_z, što je uobičanjena $|nlm\rangle$ baza. Tu za dati n imamo sve skupa

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = \frac{n}{2}\big(1 + 2(n-1) + 1\big) = n^2 \tag{6.52}$$

degeneriranih stanja.

Alternativna baza je ona koja dijagoalizira operatore $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{K}^2$, I_z i K_z čije vektore možemo označiti kao $|j, m_i, m_k\rangle$ i koja daje degeneraciju

$$\sum_{m_i=-j}^{j} \sum_{m_k=-j}^{j} 1 = (2j+1)^2 = n^2 \,, \tag{6.53}$$

u skladu s prvim računom.

Literatura: Schiff(68), Sect. 30, Greiner&Müller, Jones,

Zadaci

6.1 Odredite $\langle j, m'|J_i|j, m\rangle \equiv (J_i)_{m'm}$ za $j = 1/2$ i $j = 1$

6.2 Pokažite da vrijedi:

$$\langle j, m'|D^{(j)}(\phi, \theta, \psi)|j, m\rangle = e^{-im'\phi - im\psi}\langle j, m'|e^{-iJ_y\theta/\hbar}|j, m\rangle \,, \tag{6.54}$$

gdje su ϕ, θ i ψ tri Eulerova kuta, te odredite eksplicitno ove matrične elemente za $j = 1/2$.

6.3 Izrazite stanje $|\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle$ definirano svojstvom

$$\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}|\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle = \frac{\hbar}{2}|\boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle$$

preko stanja baze $|j = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$.

6.4 Koja je vjerojatnost da mjerenje projekcije spina na z-os za stanje iz prošlog zadatka da rezultat $\hbar/2$?

6.5 Neka je $|\hat{\boldsymbol{n}}\rangle$ svojstveno stanje operatora usmjerenja u 3D prostoru. Uočite da je

$$\langle n|lm\rangle = Y_l^m(\hat{\boldsymbol{n}}) = Y_l^m(\theta, \phi) \,.$$

Promatrajući operator $D(\phi, \theta, 0)$ koji rotira $|\hat{\boldsymbol{z}}\rangle$ u $|\hat{\boldsymbol{n}}\rangle$ pokažite da vrijedi

$$D^l_{m0}(\phi, \theta, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^{m^*}(\theta, \phi) \,.$$

6.6 Promotrite stanje $|\mathrm{rot}_y(\beta)\rangle$, dobiveno rotacijom stanja $|l = 2, m = 0\rangle$ za kut β oko y-osi. Pronađite vjerojatnosti da mjerenje projekcije momenta impulsa na z-os da vrijednosti $m' = 0, \pm 1, \pm 2$.

6.7 Čestica spina 1/2 je u D stanju orbitalnog momenta impulsa ($l = 2$). Koja su moguća stanja ukupnog momenta impulsa? Koje su energije tih stanja ako je hamiltonijan

$$H = A + B\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} + C\boldsymbol{L}^2$$

gdje su A, B i C poznate konstante?

6.8 Izrazite komponente sferičnog vektora $r^{(1)} = (r^{(1)}_{-1}, r^{(1)}_0, r^{(1)}_1)$ preko kartezijevih komponenata r_x, r_y, r_z tj. izvedite relaciju (6.22).

6.9 Neka je poznato da za sferični vektorski operator σ vrijedi

$$\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\sigma_0|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = 1 \ .$$

Izračunajte sve ostale matrične elemente ovog operatora između stanja s $j = 1/2$.

6.10 Pronađite izborna pravila za zračenje u kristalu s C_{3v} simetrijom za zračenje polarizirano (a) duž z-osi i (b) duž x ili y osi.

6.11 Tri matrice, M_x, M_y, i M_z, svaka 256×256, zadovoljavaju komutacijske relacije $[M_i, M_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk} M_k$. Svojstvene vrijednosti od M_z su:

svojstvena vrijednost	2	-2	3/2	-3/2	1	-1	1/2	-1/2	0
koliko puta se pojavljuje	1	1	8	8	28	28	56	56	70

Navedite svojstvene vrijednosti matrice $M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ i broj njihovih pojavljivanja.

6.12 Pokažite da se sve komponente tenzorskog operatora $T_M^{(J)}$ mogu dobiti iz $T_J^{(J)}$ uzastopnom primjenom operatora J_-:

$$T_M^{(J)} = C(J,M)[J_-, [J_-, \ldots [J_-, T_J^{(J)}]...]] \ .$$

Koliki je $C(J,M)$?

6.13 Pokažite da se simetrični i antisimetrični dijelovi tenzora drugog ranga ne miješaju pri rotacijama.

Poglavlje 7

SU(N) grupe i fizika elementarnih čestica

7.1 Izospin i SU(2)

Proton (p) i neutron (n) se obzirom na jake nuklearne sile ponašaju vrlo slično. To je dobro vidljivo npr. u energijama pobuđenih stanja zrcalnih jezgara ${}^{11}_{6}$C i ${}^{11}_{5}$B (*Zrcalne jezgre* su jezgre koje se razlikuju samo na zamjenu $p \leftrightarrow n$.) prikazanim u Tablici 7.1 To je navelo Heisenberga da pretpostavi postojanje apstraktne simetrije, tzv. *izospinske* simetrije, koja povezuje stanja p i n na isti način kao što rotacijska simetrija povezuje stanja $|+\rangle$ i $|-\rangle$ elektrona ili bilo kojeg drugog sustava spina 1/2. Tako bi $|p\rangle$ i $|n\rangle$ bili samo dva stanja jedne te iste čestice — *nukleona* ($|N\rangle$). Grupno-teorijski, spin i izospin se ne razlikuju i obje grupe su SU(2). Za korespondenciju među stanjima se obično uzima:

$$|p\rangle \longleftrightarrow |+\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \tag{7.1}$$

$$|n\rangle \longleftrightarrow |-\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \ . \tag{7.2}$$

Generatori izospina I_i, $i = 1, 2, 3$ imaju iste komutacijske relacije kao i operatori momenta impulsa (generatori rotacija):

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k \ , \tag{7.3}$$

Tablica 7.1: Energije, u MeV, tri stanja zrcalnih jezgara ${}^{11}_{6}$C i ${}^{11}_{5}$B. Vidljivo je da su razlike između ove dvije jezgre vrlo male.

${}^{11}_{6}$C	2.00	4.31	4.79
${}^{11}_{5}$B	2.12	4.44	5.02

što onda ima za posljedicu relacije svojstvenih vrijednosti:

$$\boldsymbol{I}^2|N\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|N\rangle \tag{7.4}$$

$$I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle \tag{7.5}$$

$$I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle \; . \tag{7.6}$$

Treba imati na umu da ove tri koordinate $i = 1, 2, 3$, za razliku od slučaja rotacijske simetrije, nemaju nikakve veze sa prostornim x, y i z osima, već je riječ o posebnom izospinskom vektorskom prostoru. Isto kao i kod spina, možemo definirati operatore dizanja i spuštanja I_+ i I_- koji "pretvaraju" proton u neutron ili obratno.

Značaj izospinske simetrije počiva na pretpostavci da je hamiltonijan jake nuklearne sile H_{strong} izo-simetričan tj. da komutira s generatorima izospina:

$$[H_{\mathrm{strong}}, I_i] = 0 \; . \tag{7.7}$$

Naime, kako je dotični hamiltonijan vrlo složen i slabo poznat, svaka ovakva informacija o njegovim svojstvima simetrije je od velike pomoći, kako ćemo vidjeti kroz slijedeće primjere čiji je matematički formalizam u potpunosti ekvivalentan matematičkom formalizmu rotacijske simetrije iz poglavlja 6.

Primjer: deuteron

Deuteron (jezgra deuterija) je vezano stanje jednog protona i jednog neutrona. Pogledajmo prvo općenitu situaciju stanja dva *nukleona*. Ukupni izospin dobivamo direktnim *množenjem* dvaju $I = 1/2$ izospinskih stanja i Clebsch-Gordanovim razvojem na direktni *zbroj*:

$$\big(I=\frac{1}{2}\big) \otimes \big(I=\frac{1}{2}\big) = \big(I=0\big) \oplus \big(I=1\big) \; . \tag{7.8}$$

To znači da dva nukleona mogu postojati u četiri izospinska stanja: tri s $I = 1$ (tzv. izotriplet):

$$|p\rangle|p\rangle \qquad I_3 = 1 \tag{7.9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|p\rangle|n\rangle + |p\rangle|n\rangle\big) \qquad I_3 = 0 \tag{7.10}$$

$$|n\rangle|n\rangle \qquad I_3 = -1 \; , \tag{7.11}$$

i jedno s $I = 0$ (tzv. izosinglet):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|p\rangle|n\rangle - |p\rangle|n\rangle\big) \qquad I_3 = 0 \; . \tag{7.12}$$

Situacija je u potpunosti analogna zbrajanju momenata impulsa dvaju stanja sa *spinom* $^1/_2$, u odjeljku 6.3.

E sad, eksperimentalno je poznato da u prirodi nema vezanih stanja od samo dva protona ($|p\rangle|p\rangle$) ili dva neutrona ($|n\rangle|n\rangle$). Izospinska simetrija onda nalaže da se ne pojavljuje ni treće stanje $|I=1, I_3=0\rangle$ već da primjećeno deuteronsko stanje bude $|I=0, I_3=0\rangle$. Tu informaciju sad možemo iskoristiti na slijedeći način. Općenito stanje (položaj, spin i izospin) dva nukleona možemo zapisati u obliku

$$\Psi_{N-N} = \phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\Sigma(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)\zeta(\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2) \ , \tag{7.13}$$

odnosno u sustavu samog deuterona i u bazi relativnih koordinata, te ukupnog spina i izospina:

$$\Psi_{N-N} = \rho(r) Y_L^{M_L} |S, M_S\rangle |I, M_I\rangle \ . \tag{7.14}$$

Za deuteron u osnovnom stanju poznato je da mu je orbitalni moment impulsa $L = 0^*$, a upravo smo zaključili da mu je i izospin $I = 0$. To znači da stanje deuterona mora biti oblika

$$\Psi_{\text{deuteron}} = \rho(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} |S, M_S\rangle |I=0, M_I=0\rangle \ . \tag{7.15}$$

Nadalje, iz kvantne mehanike je poznato da valne funkcije moraju biti antisimetrične na zamjenu dva *identična* fermiona. Izospinska simetrija onda ovdje nalaže da Ψ_{deuteron} bude antisimetrično na zamjenu $p \leftrightarrow n$. Definiramo li onda operator zamjene P_{pn} imamo

$$P_{pn}\Psi_{\text{deuteron}} = -\Psi_{\text{deuteron}} \tag{7.16}$$

dok se s druge strane vidi da je

$$P_{pn}R(r) = R(r) \tag{7.17}$$

$$P_{pn}|I=0, M_I=0\rangle = -|I=0, M_I=0\rangle \ . \tag{7.18}$$

(Prvo je trivijalno, a drugo slijedi iz (7.12).) To onda povlači da mora biti

$$P_{pn}|S, M_S\rangle = +|S, M_S\rangle \ , \tag{7.19}$$

a kako su moguća stanja ukupnog spina protona i neutrona (svaki ima spin $S = 1/2$) $S = 0$ (singlet, antisimetričan na P_{pn}) i $S = 1$ (triplet, simetričan na P_{pn}) vidimo da ukupni spin protona i neutrona u deutronu mora biti $S = 1$. Kako je $L = 0$ odmah znamo i ukupni spin deuterona: $J = 1$.

Primjer: Pion-nukleon raspršenje

I ostale subnuklearne čestice se grupiraju u izospinske multiplete. Tako tri piona, π^+, π^0 i π^- tvore izo-triplet $I = 1$

	masa	I_3
π^+	139.59	1
π^0	135.00	0
π^-	139.59	-1

*U stvarnosti, deuteron ima i malu primjesu stanja s $L = 2$ koju ovdje zanemarujemo.

Razmotrimo sada raspršenje piona i nukleona. U takvom raspršenju može doći do promjena vrste čestica pa su tako moguće raspršenja $\pi^0 p \to \pi^0 p$, ali i $\pi^0 p \to \pi^+ n$. Amplitude, a time i udarni presjeci ovakvih raspršenja su određeni matričnim elementima tzv. operatora raspršenja S, $\langle \pi^+ n|S|\pi^0 p\rangle$; gdje nas sam operator S ovdje ne zanima pobliže, do na činjenicu da pretpostavljamo da je on izoskalar ($I = 0$). Cilj nam je pokazati da izospinska simetrija nalaže povezanost raznih amplituda $\pi - N$ raspršenja, tako što ćemo pokazati da je

$$\langle \pi^+ n|S|\pi^0 p\rangle = \sqrt{2}\Big[\langle \pi^0 p|S|\pi^0 p\rangle - \langle \pi^+ n|S|\pi^+ n\rangle\Big] . \tag{7.20}$$

Koliki je ukupni izospin $|\pi N\rangle$ stanja? Ponovno trebamo standardni Clebsch-Gordanov razvoj:

$$\big(I = 1\big) \otimes \big(I = \frac{1}{2}\big) = \big(I = \frac{1}{2}\big) \oplus \big(I = \frac{3}{2}\big) . \tag{7.21}$$

$|\pi N\rangle$ stanja sad možemo izraziti u bazi ukupnog izospina koristeći Clebsch-Gordanove koeficijente iz tablica:

$$|\pi^0 p\rangle = |10; \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + C^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle \tag{7.22}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle \tag{7.23}$$

$$|\pi^+ n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\frac{2}{3}\frac{1}{2}\rangle \tag{7.24}$$

Tako amplituda raspršenja $\pi^0 p \to \pi^+ n$ ima oblik

$$\langle \pi^+ n|S|\pi^0 p\rangle = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle\frac{3}{2}\frac{1}{2}| + \sqrt{\frac{2}{3}}\langle\frac{1}{2}\frac{1}{2}|\Big) S \Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle\Big) \tag{7.25}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\big(S_{3/2} - S_{1/2}\big) , \tag{7.26}$$

gdje smo uveli oznaku S_I na očit način. Slično se dobije

$$\langle \pi^0 p|S|\pi^0 p\rangle = \frac{2}{3}S_{3/2} + \frac{1}{3}S_{1/2} // \langle \pi^+ n|S|\pi^+ n\rangle \quad = \frac{1}{3}S_{3/2} + \frac{2}{3}S_{1/2} , \tag{7.27}$$

a onda lako i gore tražena formula.

Treba primijetiti da ova analiza pokazuje da su sva moguća $\pi - N$ raspršenja opisana sa samo dvije nepoznate amplitude: $S_{1/2}$ i $S_{3/2}$! Ovakva analiza je principijelno ekvivalentna analizi pomoću Wigner-Eckartovog teorema kakvu smo radili u kontekstu rotacijske simetrije.

Pitanje: Gdje smo u gornjoj analizi upotrijebili činjenicu da je operator S izoskalar?

Primjer: Omjer udarnih presjeka procesa $p+d \to \pi^+\,{}^3\mathrm{H}$ i $p+d \to \pi^0\,{}^3\mathrm{He}$

Omjer udarnih presjeka je dan s

$$R = \frac{\sigma(p+d \to \pi^+\,{}^3\mathrm{H})}{\sigma(p+d \to \pi^0\,{}^3\mathrm{He})} = \frac{|\langle\pi^+\,{}^3\mathrm{H}|S|pd\rangle|^2}{|\langle\pi^0\,{}^3\mathrm{He}|S|pd\rangle|^2} \ . \tag{7.28}$$

^{3}He i ^{3}H tvore izodublet

$$\begin{pmatrix} {}^3\mathrm{He} \\ {}^3\mathrm{H} \end{pmatrix} \qquad\qquad I = \frac{1}{2} \ , \tag{7.29}$$

a d je deuteron.

Postupamo kao u prošlom primjeru i prikazujemo početno i konačna stanja u bazi ukupnog izospina:

$$|pd\rangle = |\frac{1}{2}\frac{1}{2};00\rangle = |I = \frac{1}{2}, M_I = \frac{1}{2}\rangle \tag{7.30}$$

$$|\pi^+\,{}^3\mathrm{H}\rangle = |11;\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = C^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{11\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle + C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{11\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \tag{7.31}$$

$$|\pi^0 + {}^3\mathrm{He}\rangle = |10;\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = C^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle + C^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle \ . \tag{7.32}$$

Prilikom kreiranja matričnog elementa $\langle|S|\rangle$ stanja s izospinom $3/2$ u konačnom stanju ne sudjeluju (očuvanje izospina) i dobijamo

$$R = \frac{|\sqrt{2/3}S_{1/2}|^2}{|-\sqrt{1/3}S_{1/2}|^2} = 2 \ , \tag{7.33}$$

što je u sasvim pristojnom slaganju s eksperimentalnim brojkama koje su $R = 1.91$ ili, drugi eksperiment, $R = 2.26$.

7.2 Hipernaboj i SU(3), kvarkovi*

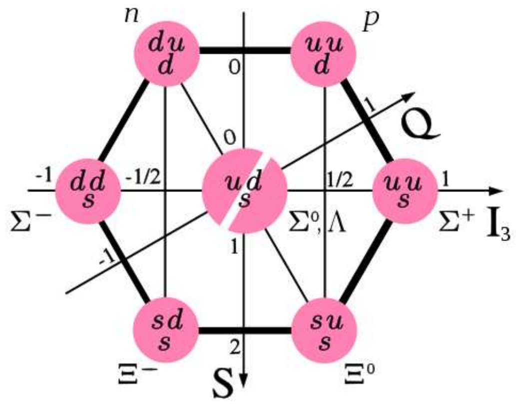
`[... bit će dodano kasnije (vidi odgovarajuće dijelove u [1], i dodatno u Halzen and Martin, *Quarks and leptons*, odjeljci 2.6, 2.8, 2.9 i 2.11) ...]`

Vidi sliku 7.1 ...

7.3 Struktura grupe SU(3)

Znamo da grupe SU(N) imaju $N^2 - 1$ generatora, što znači da ih SU(3) ima osam. Općeniti element grupe će stoga biti $\exp(i\sum_{A=1}^{8}\alpha_A T_A)$, gdje su α_A realni parametri, a T_A generatori. Algebra grupe je

$$[T_A, T_B] = i f_{ABC} T_C \tag{7.34}$$



Slika 7.1: Barionski oktet

gdje su f_{ABC} strukturne konstante grupe. Kao i kod SU(2), ove strukturne konstante su potpuno antisimetrične u sva tri indeksa (vidi zadatak 7.2). Kao i kod SU(2) gdje su generatori u definicionoj (najnižoj netrivijalnoj) reprezentaciji bili dani 2×2 Paulijevim matricama, tako su generatori definicione trodimenzionalne reprezentacije grupe SU(3) dani kao $T_A = \lambda_A/2$, gdje su λ_A tzv. Gell-Mannove matrice:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.35}$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Predfaktori su odabrani tako da univerzalno vrijedi relacija normalizacije

$$\mathrm{Tr}(T_A T_B) = \frac{1}{2}\delta_{AB}\,, \tag{7.36}$$

koja vrijedi i za grupu SU(2).

Vidljivo je da su prve tri Gell-Mannove matrice zapravo Paulijeve matrice proširene na tri dimenzije iz čega se vidi da one generiraju SU(2) podgrupu od SU(3).

Strukturne konstante grupe SU(3) su:

$$
\begin{aligned}
f_{123} &= 1 \\
f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} &= \frac{1}{2} \\
f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \; .
\end{aligned} \tag{7.37}
$$

Kako je $f_{38A} = 0$, T_3 i T_8 komutiraju što povlači da ih je moguće istovremeno dijagonalizirati što je i napravljeno gornjim izborom Gell-Mannovih matrica. Maksimalan broj takvih generatora naziva se *rang* algebre i oni razapinju tzv. *Cartanovu podalgebru* date Lieve algebre. Algebra su(3) je ranga 2, dok je su(2) ranga 1 (jedino je σ_3 dijagonalna).

7.4 SU(3) tenzori

Za grupu SU(2) smo identificirali sve njene ireducibilne reprezentacije razmatrajući isključivo same generatore grupe i njihove komutacijske relacije. Slična procedure je u načelu moguća i za SU(3), ali mi ćemo se ovdje osloniti na intuitivniji pristup koji se fokusira na same vektorske prostore na kojima reprezentacije djeluju. Postupke i rezultate ćemo prikazati na razini recepta, bez detaljnog dokazivanja.

Pogledajmo prvo analognu proceduru za slučaj grupe SU(2). Sve ireducibilne reprezentacije te grupe mogu se dobiti višestrukim direktnim množenjem fundamentalne dvodimenzionalne reprezentacije (dubleta) sa samom sobom. (Fizikalno govoreći, kombinirajući dovoljan broj sustava spina 1/2 možemo dobiti sustav bilo kojeg spina.). Npr. ukoliko fundamentalni dublet označimo kao ψ^a, $a = 1, 2$, gdje je

$$\psi^1 \equiv |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \; , \quad \psi^2 \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \; ,$$

onda direktan produkt tog dubleta sa samim sobom daje četiri stanja:

$$\psi^{11} \equiv \psi^1 \otimes \psi^1 \; , \quad \psi^{12} \; , \quad \psi^{21} \quad \text{i} \quad \psi^{22} \; .$$

No, znamo da su ireducibilne reprezentacije od SU(2) zapravo *antisimetrični* singlet

$$\psi^{12} - \psi^{21}$$

i *simetrični* triplet

$$\psi^{11}, \psi^{12} + \psi^{21}, \psi^{22} \; .$$

Ova potreba da se ireducibilne reprezentacije formiraju simetrizacijom i antisimetrizacijom je djelomično rasvijetljena u odjeljku 6.4.1 gdje je pokazano kako se simetrične i antisimetrične komponente tenzora[†] ne miješaju pri transformacijama.

[†]U ovom odjeljku riječ tenzor se odnosi na ove direktne produkte *vektora stanja*, a ne na sferične i kartezijeve tenzorske *operatore* iz odjeljka 6.4. Opisana metoda konstrukcije IRREPsa se po tome i često zove "tenzorska metoda".

Na isti način, direktnim množenjem i (anti)simetriziranjem fundamentalnih trodimenzionalnih reprezentacija grupe SU(3) moguće je konstruirati sve njene IRREPse. Kao prvo, potrebno je uočiti da SU(3) ima *dvije* neekvivalentne 3D reprezentacije, čiji operatori su povezani kompleksnom konjugacijom: $U(g)$ i $U(g)^*$. (Za SU(2) grupu su odgovarajuće 2D reprezentacije ekvivalentne pa je dovoljno raditi samo s jednim fundamentalnim dubletom, vidi zadatak 7.3.) Da bismo razlikovali te dvije reprezentacije, odgovarajuće vektore ćemo označavati s gornjim ili donjim indeksom:

$$3: \qquad \psi^a \to \psi'^a = U^a{}_b\, \psi^b \,, \tag{7.38}$$

$$3^*: \qquad \psi_a \to \psi'_a = U^*{}_a{}^b\, \psi_b \,. \tag{7.39}$$

Reprezentaciju 3 obično zovemo *triplet*, a reprezentaciju 3^* *antitriplet*. Direktnim množenjem ovih dviju reprezentacija dobivamo tenzore višeg ranga, $\psi^{ab\cdots}_{r\cdots}$, koji se transformiraju kao:

$$\psi^{ab\cdots}_{r\cdots} \to U^a{}_{a'}\, U^b{}_{b'} \cdots U^*{}_r{}^{r'} \cdots \psi^{a'b'\cdots}_{r'\cdots} \,. \tag{7.40}$$

Promotrimo sada direktni produkt 3 i 3^* reprezentacija tj. tenzor $\psi^a\psi_b$. Kao prvo, trag tog tenzora je invarijantan i predstavlja tenzor ranga 0: To nam sugerira da tenzor $\psi^a\psi_b$ rastavimo dio s tragom nula i sam trag:

$$\psi^a\psi_b = \left(\psi^a\psi_b - \frac{1}{3}\delta^a{}_b\psi^c\psi_c\right) + \frac{1}{3}\delta^a{}_b\psi^c\psi_c \,. \tag{7.41}$$

Daljnje rastavljanje odvajanjem simetričnog i antisimetričnog dijela tenzora nije moguće jer gornji i donji indeks nisu ekvivalentni. Kako smo ustanovili da je trag ranga 0, dakle singlet, imamo konačno:

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 \,. \tag{7.42}$$

Invarijantni SU(3) tenzori

Kroneckerov simbol $\delta^a{}_b$ je također SU(3) tenzor (vidi (7.41)) i to invarijantan jer:

$$\delta^a{}_b \to U^a{}_c U^*{}_b{}^d \delta^c{}_d = U^a{}_c U^*{}_b{}^c = \delta^a{}_b \,.$$

Na sličan način se je moguće uvjeriti da su Levi-Civita tenzori ϵ^{abc} i ϵ_{abc} također invarijantni, vidi zadatak 7.4. Značaj Levi-Civita tenzora je da se pomoću njih mogu "spuštati i dizati indeksi" drugih tenzora. Npr. promotrimo antisimetričnu komponentu tenzora ψ^{ab}, koju dobijemo kao $\psi^{[ab]} \equiv (\psi^{ab} - \psi^{ba})/2$. Ona očito ima samo tri nezavisne komponente. Množenjem s Levi-Civita tenzorom možemo tu činjenicu učiniti eksplicitnom i pokazati da je $\psi^{[ab]}$ ekvivalentan antitripletu ψ_a:

$$\psi_a = \epsilon_{abc}\psi^{bc} \tag{7.43}$$

(Objekt $\epsilon_{abc}\psi^{bc}$ ima samo jedan slobodan donji indeks iz čega se vidi da je ekvivalentan tenzoru ψ_a.)

Primjer 36 ($3 \otimes 3$)
Kako triplet i antitriplet nisu ekvivalentni, $3 \otimes 3 \neq 3 \otimes 3^*$. Kako su u $3 \otimes 3 = \psi^a \psi^b$ oba indeksa istog tipa, možemo razdvojiti simetrični i antisimetrični dio ovog tenzora koji su svaki za sebe ireducibilni,

$$\psi^a \psi^b = \frac{1}{2}(\psi^a \psi^b + \psi^b \psi^a) + \frac{1}{2}(\psi^a \psi^b - \psi^b \psi^a) \tag{7.44}$$

$$\equiv \psi^{(ab)} + \psi^{[ab]} \tag{7.45}$$

Prvi, potpuno simetrični član, ima šest nezavisnih komponenata (broj nezavisnih elemenata simetrične 3×3 matrice) i predstavlja sekstuplet (6) reprezentaciju. Nadalje, zahvaljujući svojstvu Levi-Civita tenzora (usporedi zadatak 5.2), $\epsilon^{abc} \epsilon_{cmn} = \delta^a{}_m \delta^b{}_n - \delta^a{}_n \delta^b{}_m$, imamo

$$\psi^a \psi^b - \psi^b \psi^a = \epsilon^{abc} \epsilon_{cmn} \psi^m \psi^n \ . \tag{7.46}$$

ϵ^{abc} je SU(3) invarijanta, dok je, cf. (7.43), $\epsilon_{cmn} \psi^m \psi^n = \psi_c$ iz čega vidimo da je $\psi^{[ab]}$ ekvivalentan antitripletu ψ_c.

Podsjetimo se da smo u odjeljku 6.4, simetrične 6-dim operatore dodatno reducirali na jednodimenzionalni trag i 5-dim simetrični dio s tragom nula. Ovdje to ne možemo učiniti jer na raspolaganju imamo samo $\delta^a{}_b$ i $\delta_a{}^b$ kao SU(3) invarijante, ali ne i δ^{ab}. (U odjeljku 6.4 to nije bio problem jer zbog ekvivalentnosti dubleta i antidubleta u SU(2) ne moramo paziti na razliku između gornjih i donjih indeksa.) Stoga je $\psi^{(ab)}$ ireducibilni sekstet (6).

Dakle, konačni rezultat je

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^* \tag{7.47}$$

Primjer 37 ($3 \otimes 3 \otimes 3$)
Koristimo prvo rezultat iz zadnjeg primjera:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (3 \otimes 6) \oplus (3 \otimes 3^*) \ . \tag{7.48}$$

Drugi član već znamo iz (7.42), a prvi je umnožak seksteta $\psi^{(ab)}$ i tripleta ψ^c. Iz tog umnoška možemo izdvojiti potpuno simetričnu komponentu:

$$\psi^{(ab)} \psi^c = \psi^{(abc)} + \text{ostatak} \ . \tag{7.49}$$

Tenzor $\psi^{(abc)}$, tipa $(3, 0)$, je totalno simetrični tenzor ranga 3. Broj njegovih nezavisnih komponenata može se odrediti npr. izravnim brojanjem. Prvo, postoji samo jedna nezavisna komponenta sa sva tri različita indeksa, npr. ψ^{123}, i sve ostale su joj jednake: $\psi^{123} = \psi^{213} = \psi^{312} = \ldots$. Komponenata s dva ista indeksa i trećim različitim ima šest: $\psi^{112}, \psi^{113}, \psi^{221}, \psi^{223}, \psi^{331}$ i ψ^{332}. Imamo još i tri nezavisne komponente sa sva tri indeksa ista (na "hiperdijagonali" tenzora), $\psi^{111}, \psi^{222}, \psi^{333}$, što sve skupa čini ukupno 10 komponenata. Dakle, $\psi^{(abc)}$ je dekuplet (10). Preostali dio u rastavu $3 \otimes 6$ ima dimenziju $3 \times 6 - 10 = 8$ i odgovara oktetu (8). (Tu zadnju ekvivalenciju nije lako pokazati ovom tenzorskom metodom — pokazat ćemo to u zadatku 7.5 metodom iz slijedećeg odjeljka.)

Dakle, konačni rezultat je

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \tag{7.50}$$

Ovaj primjer je od velikog fizikalnog značaja jer odgovara mogućim kombinacijama triju lakih kvarkova koji čine fundamentalni SU(3) triplet:

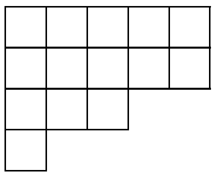
$$\psi^1 = u \;, \quad \psi^2 = d \;, \quad \psi^3 = s \;, \tag{7.51}$$

Jedan od okteta, prikazan na slici 7.1, sadrži proton i neutron.

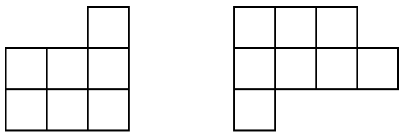
Tenzorske metode analize SU(3) ireducibilnih reprezentacija, prikazane u ovom odjeljku, su pogodne jer istovremeno pokazuju strukturu samih SU(3) objekata što je često od interesa u primjenama, gdje ti objekti odgovaraju kvantnomehaničkim stanjima. Međutim, kako dimenzije reprezentacija rastu, i s njima broj indeksa tenzora, metoda postaje komplicirana. Jednostavnija za primjenu i općenitija je metoda Youngovih dijagrama, koju predstavljamo u slijedećem odjeljku.

7.5 SU(N) tenzori i Youngovi dijagrami

Youngov dijagram je dijagram poput ovog



gdje je važno svojstvo konveksnosti prema dolje desno tj. da je lijeva strana poravnata i da se broj polja u retcima *ne smanjuje* kako idemo odozgo prema dolje. Dakle, slijedeći dijagrami *nisu* ispravni Youngovi dijagrami



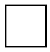
Youngov dijagram s n polja je ekvivalentan SU(N) tenzoru s n indeksa kojem su prvo indeksi koji odgovaraju pojedinim retcima dijagrama simetrizirani, a zatim indeksi koji odgovaraju pojedinim stupcima antisimetrizirani.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi^{[ad][be]c} \;. \tag{7.52}$$

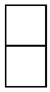
Uočite da antisimetrizacija po stupcima pokvari simetriju po retcima. Ukoliko je u ovom primjeru riječ o SU(3) tenzoru, znamo da je par antisimetriziranih gornjih indeksa ekvivalentan jednom donjem indeksu nakon spuštanja pomoću Levi-Civita tenzora:

$$SU(3): \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi^{[ad][be]c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi^c_{fg} \;. \tag{7.53}$$

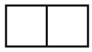
Na sličan način možemo svaki tenzor (dakle svaku IRREP) prikazati posebnim Youngovim dijagramom. Npr. u SU(3):



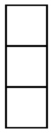
$$\psi^a \qquad 3 \tag{7.54}$$



$$\psi^{[ab]} \Leftrightarrow \psi_c \qquad 3^* \tag{7.55}$$



$$\psi^{(ab)} \qquad 6 \tag{7.56}$$



$$\psi^{[abc]} \propto \epsilon^{abc} \qquad 1 \tag{7.57}$$

U zadnjem redu smo iskoristili činjenicu da je potpuno antisimetrični tenzor s tri indeksa nužno proporcionalan Levi-Civiti, što znači da je invarijantan i da ga trebamo tretirati kao singlet tj. jedinični element u algebri reprezentacija. Ekvivalentno, stupac s N polja Youngovog dijagrama SU(N) grupe možemo brisati. Dijagram s više od N polja je naprosto nula jer npr. nije moguće napraviti potpuno antisimetrični tenzor s četiri indeksa u SU(3) gdje indeksi poprimaju samo vrijednosti 1, 2 i 3 pa dva od ta četiri indeksa nužno moraju biti jednaka.

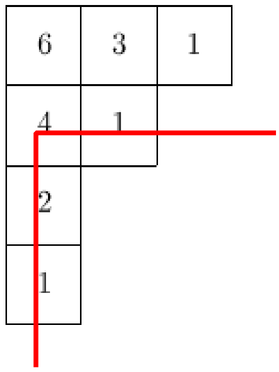
Dimenzija SU(N) IRREPsa reprezentiranog Youngovim dijagramom

Youngov dijagram obrojčimo na dva slijedeća načina:

Prvi način: U lijevi gornji kut upišemo N (za SU(N)), i ostatak reda obrojčimo s sukcesivno rastučim brojevima. Slijedeći red isto, ali počnemo s $N-1$. I tako dalje.

N	$N+1$	$N+2$
$N-1$	N	
$N-2$		
$N-3$		

Drugi način: svako polje dijagrama dobije broj određen "pravilom kuke". Kuka je linija koja od tog polja ide desno u beskonačnost i od tog istog polja dolje u beskonačnost. Broj polja preko kojih kuka prolazi upišemo u dato polje. Postupak ponavljamo za sva polja.



Pomnožimo posebno sve brojeve u dijagramu obrojčenom na prvi način i posebno sve brojeve u dijagramu obrojčenom na drugi način. Dimenzija IRREPsa je omjer ta dva broja.

Primjeri:

$$SU(3): \quad \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = \frac{24}{3} = 8 \qquad \frac{\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array}} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}} = \frac{6}{2} = 3^*$$

U zadnjem od gornja tri primjera smo se oslonili na informacije s početka ovog odjeljka da bi odredili da je zadnja reprezentacija zapravo antitriplet.

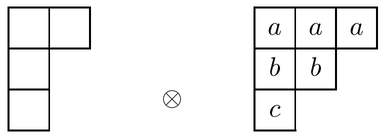
$$SU(3): \quad \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}} = \frac{12}{2} = 6 \qquad \frac{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}} = \frac{60}{6} = 10$$

$$SU(3): \quad \frac{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}} = 10 \qquad \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}} = 27$$

$$SU(5): \quad \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 6 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = 40$$

Clebsch-Gordanov razvoj za SU(N) IRREPse

Rastav direktnog produkta dva SU(N) IRREPsa na direktan zbroj (Clebsch-Gordanov razvoj) izvodi se množenjem odgovarajućih Youngovih dijagrama, T_1 i T_2, na slijedeći način. Polja u desnom dijagramu označimo slovima: polja prvog retka s a, polja drugog retka s b i tako dalje:



T_1 T_2

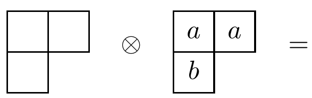
Sada prebacujemo polja s T_1 na T_2 jedno po jedno, redak po redak, odozgo prema dolje, na sve moguće načine, tako da budu zadovoljena slijedeća pravila.

1. T_1 je u svakom trenutku ispravni Youngov dijagram.
2. Polja s istim slovom ne smiju biti u istom stupcu. (Posljedica činjenice da su stupci antisimetrizirani.)
3. Za svako polje nastajućeg tenzora je definiran n_a kao broj polja s indeksom a iznad i desno od njega. Isto tako n_b itd. Mora biti: $n_a \geq n_b \geq n_c$.

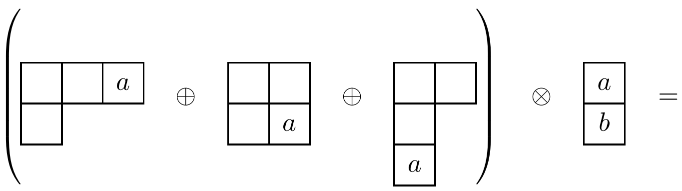
Na kraju

- Maknemo stupce s N polja. (Jer je totalno antisimetrični tenzor s N indeksa proporcionalan s $\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_N}$ i time SU(N) invarijanta.)
- Dva dijagrama istog oblika odgovaraju posebnim IRREPsima samo ako se razlikuju po razmještaju slova $a, b, \ldots$. U suprotnom jednog maknemo.

Primjer 38 ($8 \otimes 8$ **u SU(3)**)



Jedno $\boxed{a}$ se može premjestiti na T_1 na tri različita načina



Sad premještamo drugo $\boxed{a}$:

$$\left(\begin{ytableau} \ & \ & a & a \\ \ \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ & a \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ \\ a \end{ytableau} \right) \otimes \begin{ytableau} b \end{ytableau}$$

$$\oplus \left(\begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ & a \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ \\ \ & a \\ a \end{ytableau} \right) \otimes \begin{ytableau} b \end{ytableau}$$

$$\oplus \left(\begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ \\ a \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ \\ \ & a \\ a \end{ytableau} \right) \otimes \begin{ytableau} b \end{ytableau} =$$

Tu imamo tri dijagrama u duplikatu pa po jedan maknemo:

$$\left(\begin{ytableau} \ & \ & a & a \\ \ \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ & a \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ \\ a \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ \\ \ & a \\ a \end{ytableau} \right) \otimes \begin{ytableau} b \end{ytableau} =$$

$$\begin{ytableau} \ & \ & a & a \\ \ & b \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ & a & a \\ \ \\ b \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ & a & b \end{ytableau}$$

$$\oplus \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ & a \\ b \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ & b \\ a \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ \\ \ & a \\ a & b \end{ytableau}$$

Primijetite da ovdje nismo kreirali dijagrame koji narušavaju gornja pravila:

$$\begin{ytableau} \ & \ & a & a & b \\ \ \end{ytableau} \quad \text{i} \quad \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ \\ a \\ b \end{ytableau}$$

Sada maknemo sve stupce s tri polja (SU(3) invarijante) i dobijemo konačno:

$$\begin{ytableau} \ & \ & a & a \\ \ & b \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & a & a \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & \ & a \\ \ & a & b \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & a \\ a \end{ytableau} \oplus \begin{ytableau} \ & a \\ b \end{ytableau} \oplus 1$$

Dimenzije IRREPsa za sve ove dijagrame smo već odredili pa očitavamo konačni rezultat

$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \tag{7.58}$$

(Zgodno je uočiti da je postupak jednostavniji ako pri množenju kao desni uzmemo Youngov dijagram s manje polja.)

Zadaci

7.1 Ako pretpostavimo očuvanje izospina, koja su moguća izospinska stanja (ukupni izospin i treća komponenta ukupnog izospina) pri raspršenju protona na

a) π^+

b) π^0

c) π^-.

7.2 Pokažite da su, zahvaljujući komutacijskim relacijama i relaciji (7.36), strukturne konstante f_{ABC}, grupe SO(3) potpuno antisimetrične u svim indeksima.

7.3 Pokažite da je za SU(2) $2^* = 2$ tj. da su fundamentalni dublet i antidublet ekvivalentni, tako da pokažete da je operator C

$$C = U(R(\hat{y}, \theta = \pi)) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} J_2 \pi\right)$$

operator koji povezuje 2 i 2^*:

$$C\sigma_i C^{-1} = -\sigma_i^*$$
$$CU(g)C^{-1} = U(g)^*$$

7.4 Pokažite da su Levi-Civita tenzori ϵ^{abc} i ϵ_{abc} invarijatni na SU(3) transformacije. Naputak: promotrite djelovanje infinitezimalnih transformacija $U = 1 + i\alpha_A T_A$.

7.5 Izračunajte Clebsch-Gordanov razvoj u SU(3) grupi za

- $3^* \otimes 3$
- $3 \otimes 3$
- $3 \otimes 3 \otimes 3$

7.6 Izračunajte Clebsch-Gordanov razvoj u SU(6) grupi za

- $6 \otimes 6^*$
- $6 \otimes 6 \otimes 6$

Poglavlje 8

Lorentzova i Poincaréova simetrija

8.1 Lorentzova grupa

Princip relativnosti: Postoji skup ekvivalentnih koordinatnih sustava u međusobnom jednolikom pravocrtnom gibanju (tzv. *skup inercijalnih sustava*) takvih da fizikalni zakoni i pojave u svima njima izgledaju isto. (Promatrač ne može eksperimentalno detektirati da se giba, ako se giba jednoliko. Mirovanje nije apsolutno.)

- Princip relativnosti je princip simetrije → 3-parametarski skup transformacija simetrije. Transformacije preslikavaju inercijalne sustave jedan u drugi.

- Da bismo znali o kojoj se grupi radi (i da li se uopće radi o grupi), moramo znati kako se kombiniraju transformacije među inercijalnim sustavima.

Kako je poznato, iz principa relativnosti slijedi da transformacije iz sustava $S = \{t, x, y, x\}$ u sustav $S' = \{t', x', y', x'\}$, tzv. *Lorentzovi potisci*, imaju oblik*

$$t' = \gamma\big(t - \frac{\beta}{c}z\big) \tag{8.1}$$

$$z' = \gamma\big(z - \beta ct\big) \tag{8.2}$$

$$x' = x \tag{8.3}$$

$$y' = y \ , \tag{8.4}$$

gdje je uzeto da se je brzina relativnog gibanja dvaju sustava duž z-osi, $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{z}}$,

*U standardnoj literaturi se pri izvodu Lorentzovih potisaka osim principa relativnosti obično koristi i postulat o konstantnosti brzine svjetlosti u svim sustavima. No, ovaj drugi postulat je zapravo suvišan, vidi Mermin, Am. J. Phys. **52**(2) (1984) 119 ili J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed.(!), exercises 11.1 i 11.2

te su uvedene standardne pokrate

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \; ; \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \; .$$

Ove transformacije djeluju na 4-dim vektorskom prostoru koji se zove *prostor Minkowskog* i kojeg sačinjavaju tzv. *Lorentzovi vektori*:

$$x^\mu \qquad \mu = 0,1,2,3 \qquad x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \tag{8.5}$$

$$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x}) \tag{8.6}$$

$$x_\mu = (ct, -\boldsymbol{x}) = g_{\mu\nu} x^\nu \qquad x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z \tag{8.7}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

Izraženo preko ovih Lorentzovih 4-vektora, Lorentzovi potisci poprimaju oblik

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^3) \tag{8.9}$$

$$x^{1'} = x^1 \tag{8.10}$$

$$x^{2'} = x^2 \tag{8.11}$$

$$x^{3'} = \gamma(x^3 - \beta x^0) \; , \tag{8.12}$$

ili u kompaktnom matričnom obliku

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \; , \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \; . \tag{8.13}$$

4-vektori poput x^μ imaju dakle jednostavna transformacijska svojstva pri Lorentzovim potiscima i očekujemo da će se jednadžbe relativističke fizike “izgrađivati” od takvih vektora te odgovarajućih skalara i tenzora, baš kao što se u nerelativističkoj fizici jednadžbe izgrađuju od 3-vektora i drugih tenzora s dobrim transformacijskim svojstvima pri prostornim rotacijama.

Matrice Λ ovise o parametrima Lorentzovog potiska kojeg je prirodno parametrizirati vektorom brzine $\boldsymbol{v}$ pojedinog inercijalnog sustava u odnosu na neki referentni sustav. Vidimo da Lorentzovi potisci $\Lambda(\boldsymbol{v})$ čine 3-parametarski skup. Da li je on grupa? Kako ćemo pokazati u slijedećem odjeljku odgovor je ne. Kompozicija dva Lorentzova potiska nije nužno također Lorentzov potisak već može biti i kompozicija Lorentzovog potiska s prostornom rotacijom:

$$\Lambda(\boldsymbol{v}_2) \circ \Lambda(\boldsymbol{v}_1) = R(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) \circ \Lambda(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) \; . \tag{8.14}$$

Lako se vidi da i Λ i R ostavljaju invarijantnim skalarni produkt $(x,y) \equiv x^0 y^0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$. Skup *svih* transformacija koje čuvaju ovaj skalarni produkt u prostoru Minkowskog čini grupu O(1,3) koja se obično naziva *opća Lorentzova grupa*. Grupa prostornih rotacija SO(3)=$\{R(\hat{\boldsymbol{n}}, \theta)\}$ je podgrupa, a skup Lorentzovih potisaka $\{\Lambda(\boldsymbol{v})\}$ je podskup ove grupe.

Specifično razlikovanje "gornjih" i "donjih" indeksa 4-vektora u specijalnoj teoriji relativnosti služi samo jednostavnom zapisu skalarnog produkta u prostoru Minkowskog kod kojeg su članovi prostornih koordinata suprotnog predznaka od člana vremenske koordinate:

$$(x, y) = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \; . \tag{8.15}$$

U *općoj* teoriji relativnosti to razlikovanje dviju vrsta koordinata prelazi u razlikovanje dviju vrsta vektora (*kovarijantni* i *kontravarijantni* vektori), odnosno, još preciznije jezikom diferencijalne geometrije razlikujemo *vektore* i *1-forme*, ali ovdje nam te finese ne igraju nikakvu ulogu.

Struktura grupe O(1,3)

Za transformirani 4-vektor $x' = \Lambda x$ vrijedi

$$\begin{aligned}
x'^2 &= g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu & (8.16)\\
&= (x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} & (8.17)\\
&= x'^\top g x' = x^\top \Lambda^\top g \Lambda x & (8.18)\\
&= x^2 = x^\top g x & (8.19)
\end{aligned}$$

pa usporedbom dobivamo alternativnu definiciju opće Lorentzove grupe kao grupe svih matrica Λ sa svojstvom

$$\Lambda^\top g \Lambda = g \tag{8.20}$$

Uzimanjem determinante ove matrične jednadžbe, uz svojstva da je $\det A^\top = \det A$ i $\det g = -1$ dobijemo

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \det \Lambda = \pm 1 \; . \tag{8.21}$$

Nadalje, raspišimo tu matričnu jednadžbu po komponentama

$$\underbrace{(\Lambda^\top)_\mu^{\ \nu}}_{\Lambda^\nu_{\ \mu}} g_{\nu\rho} \Lambda^\rho_{\ \sigma} = g_{\mu\sigma} \tag{8.22}$$

i pogledajmo komponentu $\mu = \sigma = 0$:

$$\begin{aligned}
1 &= g_{\nu\rho} \Lambda^\nu_{\ 0} \Lambda^\rho_{\ 0} & (8.23)\\
&= (\Lambda^0_{\ 0})^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i_{\ 0})^2 \; . & (8.24)
\end{aligned}$$

Slijedi da je $(\Lambda^0_{\ 0})^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_{\ 0})^2$ odnosno da je $(\Lambda^0_{\ 0})^2 \geq 1$ što daje dvije mogućnosti:

$$\Lambda^0_{\ 0} \geq 1 \qquad \text{ili} \qquad \Lambda^0_{\ 0} \leq -1 \; . \tag{8.25}$$

Zajedno s dvije iz (8.21) imamo dakle četiri mogućnosti koje vode na četiri odvojene komponente povezanosti od O(1,3):

$\det\Lambda$	$\Lambda^0_{\ 0}$	oznaka	napomena
1	≥ 1	$\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$	sadrži 1
-1	≥ 1	$\mathcal{L}^{\uparrow}_{-}$	$= P\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$
1	≤ -1	$\mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$	$= -\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} = PT\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$
-1	≤ -1	$\mathcal{L}^{\downarrow}_{-}$	$= T\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$

gdje je

$$P = g : (t \to t, \boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}) \qquad \text{(paritet)} \tag{8.26}$$

$$T = -g : (t \to -t, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}) \qquad \text{(vremenska inverzija)}\ . \tag{8.27}$$

- $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \cup \mathcal{L}^{\downarrow}_{+}$ — (prava) Lorentzova grupa — SO(1,3)
- $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \cup \mathcal{L}^{\uparrow}_{-}$ — ortokrona Lorentzova grupa
- $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ — prava ortokrona Lorentzova grupa

8.2 Generatori i reprezentacije Lorentzove grupe

Kao i kod rotacija, sustave u prirodi treba klasificirati prema njihovim transformacijskim svojstvima pri Lorentzovim transformacijama tj. prema pripadnosti reprezentacijama Lorentzove grupe. Kao i kod rotacija, poželjno je usredotočiti se na *algebru* grupe s generatorima L:

$$\Lambda \in SO(1,3) \qquad \Lambda = e^L \tag{8.28}$$

Iz definicionog svojstva (8.20) dobijemo $L^\top g = -gL$, što uz činjenicu da je $g^\top = g$ daje $(gL)^\top = -gL$ odnosno vidimo da je gL antisimetrična matrica. To znači da ako L parametriziramo na slijedeći način:

$$gL = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & L_{33} \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

$$= \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ -L_{10} & -L_{11} & -L_{12} & \ldots \\ -L_{20} & -L_{21} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & -L_{33} \end{pmatrix} \tag{8.30}$$

svojstvo antisimetrije gL traži

$$L_{0i} = L_{i0} \tag{8.31}$$

$$L_{ij} = -L_{ji}\ . \tag{8.32}$$

tj.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}\ , \tag{8.33}$$

gdje tri parametra L_{01}, L_{02} i L_{03} opisuju Lorentzove potiske, a tri parametra L_{12}, L_{13} i L_{23} prostorne rotacije. Umjesto ovih šest parametara pogodno je koristiti parametre θ_i i ζ_i, definirane na slijedeći način:

$$L = -i(\theta_i J_i + \zeta_i K_i) \qquad i = 1, 2, 3 \;, \tag{8.34}$$

gdje su J_i već dobro poznati generatori rotacija, samo prošireni na četverodimenzionalni prostor Minkowskog:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.35}$$

dok su K_i generatori Lorentzovih potisaka

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{8.36}$$

Treba primijetiti kako operatori K_i nisu hermitski tako da odgovarajuće transformacije $\exp(-i\zeta_i K_i)$ neće biti unitarne. To je posljedica nekompaktnosti Lorentzove grupe — parametri potiska poprimaju vrijednosti iz nekompaktnog intervala $[0, c)$.

Pogledajmo sada algebru grupe SO(1,3). Lako se vidi da su komutacijske relacije:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{8.37}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \tag{8.38}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \;. \tag{8.39}$$

Prva relacija je dobro poznata algebra grupe prostornih rotacija SO(3). Druga relacija govori da podskup Lorentzovih potisaka nije zatvoren i ne čini grupu, kako smo najavili u prošlom odjeljku. Treća relacija govori da tri generatora potisaka K_i čine vektor obzirom na rotacije.

Ove komutacijske relacije su vrlo slične onima iz odjeljka 6.5 gdje smo rastavili grupu SO(4) na direktan produkt SU(2)⊗SU(2) identificirajući kombinacije generatora koji zatvaraju dvije neovisne podgrupe. Slično ćemo postupiti i ovdje te definirati

$$\boldsymbol{J}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{J} \pm i\boldsymbol{K}\big) \;, \tag{8.40}$$

odnosno $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{(+)} + \boldsymbol{J}^{(-)}$, $\boldsymbol{K} = -i(\boldsymbol{J}^{(+)} - \boldsymbol{J}^{(-)})$. Primijetite dodatni "$i$" obzirom na situaciju u odjeljku 6.5. Uz ovakve definicije imamo dvije odvojene algebre

$$[J_i^{(+)}, J_j^{(+)}] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(+)} \tag{8.41}$$

$$[J_i^{(-)}, J_j^{(-)}] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(-)} \tag{8.42}$$

$$[J_i^{(+)}, J_j^{(-)}] = 0 \;. \tag{8.43}$$

Ovo ipak ne znači da O(1,3) ima istu algebru kao i SU(2)⊗SU(2), jer gore nismo radili *realne* linearne kombinacije generatora. Svejedno, za klasifikaciju ireducibilnih reprezentacija Lorentzove grupe možemo kao i u odjeljku 6.5 koristiti parove

$$(j^{(+)}, j^{(-)}) \qquad j^{(+)}, j^{(-)} = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots \,. \tag{8.44}$$

Tako imamo trivijalnu (0,0) reprezentaciju i objekte koji se transformiraju prema njoj zovemo Lorentzovi skalari. Slijedeće dvije su tzv. *Weylove* reprezentacije $(\frac{1}{2},\, 0)$ i $(0,\, \frac{1}{2})$ prema kojima bi se transformirali bezmaseni fermioni ako takvi postoje . Obični 4-vektori poput x^μ pripadaju ireducibilnoj reprezenaciji $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Za masivne fermione pogodno je proširiti SO(1,3) Lorentzovu grupu s operacijom pariteta i onda promatrati IRREPse obzirom na ovu veću grupu†. Operator pariteta (8.26) matrično izgleda kao

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \,, \tag{8.45}$$

i eksplicitnim djelovanjem na (8.35) i (8.36) je vidljivo da se pri paritetu generatori rotacije transformiraju kao pseudovektori (vidi odjeljak 3.7),

$$P^{-1} J_i P = J_i \,, \tag{8.46}$$

a generatori Lorentzovih potisaka kao pravi polarni vektori,

$$P^{-1} K_i P = -K_i \,. \tag{8.47}$$

Slijedi da je

$$P^{-1} J_i^{(\pm)} P = J^{(\mp)} \,. \tag{8.48}$$

Promotrimo sada neko konkretno stanje $|(\frac{1}{2}, 0)\rangle$, koje je dublet obzirom na transformacije iz $(\frac{1}{2},\, 0)$, a singlet obzirom na $(0,\, \frac{1}{2})$:

$$\boldsymbol{J}^{(+)^2} |(\frac{1}{2}, 0)\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)|(\frac{1}{2}, 0)\rangle \tag{8.49}$$

$$\boldsymbol{J}^{(-)^2} |(\frac{1}{2}, 0)\rangle = 0 \,. \tag{8.50}$$

Kojoj reprezentaciji pripada paritetom transformirano stanje $P|(\frac{1}{2}, 0)\rangle$? To ustanovimo djelujući na to stanje s $\boldsymbol{J}^{(\pm)^2}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}^{(-)^2} P|(\frac{1}{2}, 0)\rangle &= PP^{-1} J_i^{(-)} PP^{-1} J_i^{(-)} P|(\frac{1}{2}, 0)\rangle = P\boldsymbol{J}^{(+)^2}|(\frac{1}{2}, 0)\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)P|(\frac{1}{2}, 0)\rangle \end{aligned} \tag{8.51}$$

$$\boldsymbol{J}^{(+)^2} P|(\frac{1}{2}, 0)\rangle = 0 \,. \tag{8.52}$$

†Masivno stanje impulsa $\boldsymbol{p}$ moguće je "prestići" Lorentzovim potiskom dovoljno velikog parametra brzine $\boldsymbol{v}$, što rezultira stanjem koje izgleda kao stanje impulsa $-\boldsymbol{p}$; ekvivalentno djelovanju pariteta na originalno stanje.

Zaključujemo da stanje $P|(\frac{1}{2},0)\rangle$ pripada IRREP $(0,\ \frac{1}{2})$. Dakle, proširivanjem SO(1,3) Lorentzove grupe s paritetom, $(0,\ \frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2},0)$ više nisu svaka zasebno IRREPs, već IRREP postaje reprezentacija $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$, poznata kao Diracova reprezentacija.

Slično, tenzor elektromagnetskog polja $F^{\mu\nu}$ pripada 6-dimenzionalnoj reducibilnoj reprezentaciji (1,0)⊕(0,1).

Kao što smo u poglavlju 6 i od samih operatora tražili dobro definirana tenzorska svojstva obzirom na rotacije (npr. tri generatora J_i čine vektor obzirom na rotacije), tako je i u kontekstu Lorentzove simetrije moguće generatore i same elemente grupe definirati na način koji manifestno pokazuje kovarijantnost obzirom na Lorentzove transformacije. Dakle, želimo relacije poput (8.34) i (8.37)–(8.39) zapisati u 4-komponentnoj notaciji, putem Lorentzovih tenzora. To postižemo definiranjem antisimetričnih generatora $J^{\mu\nu}$ kao

$$J^{mn} = \epsilon^{mni} J^i \tag{8.53}$$

$$J^{i0} = K^i \ . \tag{8.54}$$

(Podsjetimo se da grčki indeksi idu $\alpha, \beta = 0,1,2,3$, a latinski $i, m = 1,2,3$.) Sada je element Lorentzove grupe dan kao

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right) \tag{8.55}$$

a komutacijske relacije (8.37)–(8.39) se ujedinjuju u

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} + g^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} - g^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} \ . \tag{8.56}$$

Na kraju, matrični elementi generatora Lorentzove grupe u 4-dim definicionoj $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$ reprezentaciji dani su kao

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} = i\big(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - \delta^{\mu}{}_{\beta}g^{\nu\alpha}\big) \ . \tag{8.57}$$

S druge strane matrični elementi Lorentzove grupe u Diracovoj reprezentaciji $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ (koja je isto 4-dim) dani su kao

$$J^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \ , \tag{8.58}$$

Gdje su γ^μ tzv. Diracove gama matrice definirane antikomutacijskim relacijama

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \equiv \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{8.59}$$

Jedan mogući izbor za ove matrice je

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{8.60}$$

gdje su σ^i Paulijeve matrice (5.2).

8.3 Poincaréova grupa*

Poincaréova (poznata i kao nehomogena Lorentzova) grupa je direktni produkt Lorentzove grupe i grupe translacija u prostoru i vremenu. Elementi te grupe djeluju na vektore u 4-dim prostoru Minkowskog kao

$$x^\mu \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{8.61}$$

gdje su a^μ četiri parametra translacija u prostor-vremenu. Riječ je očito o deset-parametarskoj grupi gdje povrh generatora Lorentzove grupe (J^i i K^i) imamo i impuls P^i kao generator translacija u prostoru i Hamiltonijan H kao generator translacija u vremenu. Algebra ove grupe je algebra Lorentzove grupe SO(1,3) (8.56) i dodatno

$$[H,H] = [H,P^i] = [P^i,P^j] = 0 \tag{8.62}$$
$$[H,J_i] = 0 \tag{8.63}$$
$$[K^i,H] = iP^i \tag{8.64}$$
$$[J^i,P^j] = i\epsilon^{ijk}P^k \tag{8.65}$$
$$[K^i,P^j] = iH\delta^{ij} \ , \tag{8.66}$$

što je moguće ujedinjeno napisati u 4-dim notaciji kao

$$i[P^\mu,J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\sigma}P^\rho - g^{\mu\rho}P^\sigma \ . \tag{8.67}$$

Npr.

$$[H,K^i] = [P^0,J^{i0}] = -i(g^{00}P^i - g^{0i}P^0) = -iP^i \ .$$

Relacije (8.62) i (8.63) govore da su impuls i moment impulsa očuvani pri translacijama. Zanimljivo je da relacija (8.64) govori kako generatori Lorentzovih potisaka K^i ne komutiraju s Hamiltonijanom što sugerira da ne odgovaraju očuvanim veličinama. To je pomalo zbunjujuće jer Noetherin teorem nam govori kako bi simetrija obzirom na 10-parametarsku Poincaréovu grupu trebala rezultirati s deset očuvanih veličina, a ovako imamo samo 7: energija, tri komponente impulsa i tri komponente momenta impulsa. Razrješenje je u tome da Noetherini očuvani naboji (pokušajte ih eksplicitno odrediti) koji odgovaraju Lorentzovim potiscima jesu formalno očuvani (vremenska derivacija iščezava), ali eksplicitno ovise o vremenskoj koordinati[‡] pa nisu od praktične koristi.

Zadaci

8.1 Uvjerite se eksplicitno da (8.56) sadrži npr. (8.39).

8.2 Uvjerite se eksplicitno da (8.57) daje npr. (8.36).

8.3 Uvjerite se da generatori $J^{\mu\nu}$ definirani putem (8.58) i (8.59) zadovoljavaju komutacijske relacije Lorentzove grupe (8.56).

[‡]Slično kao što npr. $J_z = xP_y - yP_z$ eksplicitno ovisi o prostornim x i y koordinatama.

Bibliografija

[1] H. F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, 2nd ed., IOP Publishing, 1998.
(Pokriva velik dio kolegija. Notacija i pristup većim dijelom konzistentni s ovim bilješkama.)

[2] W. Greiner and B. Müller, *Quantum Mechanics - Symmetries*, Springer Verlag, 1989.
(Knjiga s obiljem detaljno izračunatih primjera iz kvantne mehanike i fizike čestica.)

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1994.
(Dobar prikaz rotacijske i diskretnih simetrija u kvantnoj mehanici.)

[4] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley, 1962.; Dover, 1989.

[5] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Volumes I, II and III, Academic Press, 1984.

[6] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics, An Introduction*, Academic Press, 1997.
(Znatno skraćena verzija reference [5].)

[7] I. N. Bronštejn i suradnici, *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, 2004.

[8] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 1995.

Knjige [4], [5] i [6] su opsežni udžbenici sa strogim dokazima i drugim detaljima. Biblioteka Fizičkog odsjeka bi trebala raspolagati knjigama [1], [2] i [3].