#2 Dielektrične odzivne funkcije i $\{\mathbf{x}, \omega\}$ representacija

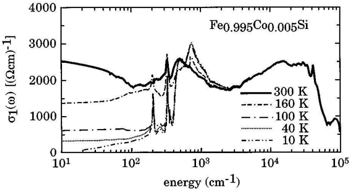
I Odzivne funkcije
II Maxwellove jednadžbe

predavanja 20**

Motivacija I i II

problemi u primjeni makroskopskih MJ u FČS

- separacija elektronskih i fononskih doprinos u odzivnim funkcijama: optička vodljivosti u teškofermionskim sustavima [Degiorgi, 1999]



- pomoćna dielektrična polja ili kratice u jednadžbama?

$$\begin{aligned} c\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}(\mathbf{x},t) + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{x},t)] + 4\pi[\mathbf{J}^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x},t) \\ &\quad + \mathbf{J}^{\mathrm{c}}(\mathbf{x},t)] + 4\pi c\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x},t) \end{aligned}$$

Motivacija I i II

problemi u primjeni makroskopskih MJ u FČS

- pomoćna magnetska polja

$$\begin{aligned} c\nabla \times [\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)] &= \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)] \\ &+4\pi[\mathbf{J}^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}^{\mathrm{c}}(\mathbf{x}, t)] \end{aligned}$$

- makroskopske odzivne funkcije:
  linearni odziv u relacijama tipa $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))$
  $\Rightarrow$ MJ postaju linearne differencijalne jednadžbe
- račun mikroskopskih odzivnih funkcija iz jednadžbi gibanja za 10^{24} nabijenih čestica?
  - Drudeove jednadžbe [Kittel]
  - Boltzmannove jednadžbe [Ziman]
  - transportne jednadžbe [L&L X], [Abrikosov]

Dielektrična susceptibilnost $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ [$\alpha_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ u FČS]

na koji način su vezana realna polja $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)$ i $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$?

- opća pretpostavka za polarizaciju u dielektricima
$$\mathbf{P}(\mathbf{x},t) = \mathbf{P}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x},t,\mathbf{E})$$
- sustave za koje je $\mathbf{P}^0(\mathbf{x}) \neq 0$ nazivamo piroelektrici (npr. feroelektrik $BaTiO_3$)
- $\mathbf{P}^0(\mathbf{x}) = 0$, i u linearnom odzivu, veza je nelokalna u prostoru, vremenu i indeksu polarizacije

$$P_\alpha(\mathbf{x},t) = \sum_\beta \int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}t'\, \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') E_\beta(\mathbf{x}',t')$$

- u sustavima invarijantnim na translacije u $\mathbf{x}$ i t veza je [FČS]

$$P_\alpha(\mathbf{k},\omega) = \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) E_\beta(\mathbf{k},\omega)$$

Dielektrična funkcija $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$

a na koji način realna polja $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ *i* $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$*?*

- dielektrični pomak u dielektricima (!)

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$$

- opća relacija (u dielektricima (!))

$$D_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_\beta \int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}t' \, \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') E_\beta(\mathbf{x}', t')$$

- u sustavima invarijantnim na translacije u $\mathbf{x}$ i t veza je [FČS]

$$D_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta(\mathbf{k}, \omega)$$

- izotropni homogeni dielektrici

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \approx \varepsilon \delta_{\alpha,\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

- dielektrična konstanta

$$D_\alpha(\mathbf{x}, t) = \varepsilon E_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad P_\alpha(\mathbf{x}, t) = \chi E_\alpha(\mathbf{x}, t)$$

Jednadžba kontinuiteta u vodičima

kako formalno razlikujemo vodljive elektrone od vezanih elektrona?

- izvod ukupne jednadžbe kontinuiteta

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \frac{\partial}{\partial t}\rho^{\mathrm{tot}}, \quad \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{J}^{\mathrm{tot}}$$

- rezultat

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x}, t) + \partial \rho^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x}, t)/\partial t = 0$$

- struktura tog izraza

$$\nabla \cdot \big(\mathbf{J} + \partial \mathbf{P}/\partial t + c\nabla \times \mathbf{M}\big) + \partial/\partial t\big(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}\big) = 0$$

- jednadžba kontinuiteta (za vodljive elektrone)

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \partial \rho(\mathbf{x}, t)/\partial t = 0$$

- izvori polja i nepoznati uzorak bez kontakta

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^{\mathrm{c}}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho^{\mathrm{c}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{J}^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}, t) = 0$$

Vodiči invarijantni na translacije u vremenu

kako formalno razlikujemo vodljive elektrone od vezanih elektrona?

- jednadžba kontinuiteta

$$\rho^{\mathrm{c}}(\mathbf{x},\omega) = (1/i\omega)\nabla\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{c}}(\mathbf{x},\omega)$$

- I i IV MJ

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega) &= 4\pi\rho^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x},\omega) \\ \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{x},\omega) + (i\omega/c)\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega) &= (4\pi/c)\mathbf{J}^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x},\omega) \end{aligned}$$

- generalni izraz za dielektrični pomak za $\omega \neq 0$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega) = \mathbf{E}(\mathbf{x},\omega) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{x},\omega) + (4\pi i/\omega)\mathbf{J}^{\mathrm{c}}(\mathbf{x},\omega)$$

- generalni izraz za dielektričnu funkciju

$$D_\alpha(\mathbf{x},\omega) = \sum_\beta \int \mathrm{d}^3x'\,\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\omega)E_\beta(\mathbf{x}',\omega)$$

Ohmov zakon

kako formalno razlikujemo vodljive elektrone od vezanih elektrona?

- struja vodljivih elektrona u vodičima

$$J^{\mathrm{c}}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_\beta \int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}t'\, \sigma^{\mathrm{c}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') E_\beta(\mathbf{x}', t')$$

- translacijski invarijantni vodiči

$$J^{\mathrm{c}}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \sum_\beta \sigma^{\mathrm{c}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta(\mathbf{k}, \omega)$$

- ukupna dielektrična funkcija, dielektrična susceptibilnost i frekventno ovisna vodljivost (kompleksne funkcije od $\mathbf{k}, \omega$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= \delta_{\alpha,\beta} + 4\pi\chi^{\mathrm{b}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) + (4\pi i/\omega)\sigma^{\mathrm{c}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \\ &\equiv \delta_{\alpha,\beta} + 4\pi\chi^{\mathrm{tot}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \delta_{\alpha,\beta} + (4\pi i/\omega)\sigma^{\mathrm{tot}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \end{aligned}$$

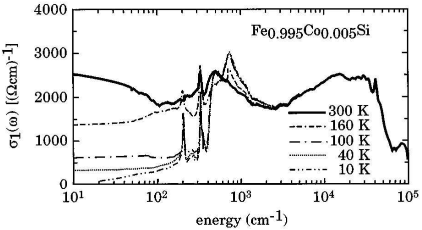
Ukupna dielektrična funkcija

u kojoj formi moramo pretpostaviti izraz za ukupnu dielektričnu funkciju kada analiziramo eksperimente u složenim sustavima?

- generalna pretpostavka

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) &= \delta_{\alpha,\beta} + 4\pi\chi^{\mathrm{b}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) + (4\pi i/\omega)\sigma^{\mathrm{c}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) \\ &\equiv \delta_{\alpha,\beta} + 4\pi\chi^{\mathrm{tot}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) \equiv \delta_{\alpha,\beta} + (4\pi i/\omega)\sigma^{\mathrm{tot}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)\end{aligned}$$

- kako to primijeniti na optičku vodljivost u teškofermionskim sustavima?



Maxwellove jednadžbe s ugrađenim Ohmovim zakonom

- jednadžbe u $\{\mathbf{x}, \omega\}$ reprezentaciji $[\omega \neq 0]$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho^{\mathrm{ext}}, \quad \nabla \times \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c}\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} + \frac{i\omega}{c}\mathbf{D} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}^{\mathrm{ext}}$$

- rubni uvjeti

$$\left(\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}\right) \cdot \mathbf{n}_{21} = 4\pi\sigma, \qquad \left(\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}\right) \cdot \mathbf{n}_{21} = 0$$

$$\mathbf{n}_{21} \times \left(\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}\right) = 0, \qquad \mathbf{n}_{21} \times \left(\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{K}$$

- pomoćno polje: ukupni dielektrični pomak

$$\mathbf{D} = \left\{\hat{1} + 4\pi\hat{\chi}^{\mathrm{b}} + \frac{4\pi i}{\omega}\hat{\sigma}^{\mathrm{c}}\right\}\mathbf{E}$$

Matematički dodaci

- izbor faza u Fourierovim transformacijama

$$D_\alpha(\mathbf{k},\omega) = \int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t} D_\alpha(\mathbf{x},t)$$

- operator konvolucije
  - u varijabli x

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, f(x-x')g(x') \quad \text{ili} \quad h = \hat{f}g$$

  - poopćenje na $\mathbf{x}, t, \alpha$: izvorna relacija

$$D_\alpha(\mathbf{x},t) = \sum_\beta \int \mathrm{d}^3x' \int \mathrm{d}t'\, \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t') E_\beta(\mathbf{x}',t')$$

  - ista relacija u skraćenoj notaciji

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}$$