#3 Depolarizacijska polja u dielektricima

I Kulonsko zasjenjenje

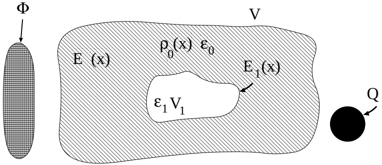
II Depolarizacijska polja

predavanja 20**

Motivacija I i II

što predstavljaju statička makroskopska polja $E_0(\mathbf{x})$ i $E(\mathbf{x})$?

- izvori polja $E_0(\mathbf{x})$ u V
  - izvori polja $E_0(\mathbf{x})$ izvan V (jednostavnija varijanta)
- makroskopsko polje $E^{(i)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3, \ldots$
- pomoćna polja $D_0(\mathbf{x})$ i $D^{(i)}(\mathbf{x})$
- depolarizacijska polja $E_1(\mathbf{x}) = E^{(1)}(\mathbf{x}) - E_0(\mathbf{x})$
- lokalno električno polje $E^{\mathrm{lok}}(\mathbf{x})$, veza sa $e(\mathbf{x})$, $E(\mathbf{x})$, $E_0(\mathbf{x}), \ldots$
- skalarni potencijali $\Phi^{??}_{??}(\mathbf{x})$



Jednadžbe elektrostatike

- jednadžbe i rubni uvjeti

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{(i)} = 4\pi\rho_i^{\mathrm{tot}}, \quad (\hat{\varepsilon}_2 \mathbf{E}^{(2)} - \hat{\varepsilon}_1 \mathbf{E}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_{21} = 4\pi\sigma$$
$$\nabla \times \mathbf{E}^{(i)} = 0, \qquad \mathbf{n}_{21} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0$$

- skalarni potencijal [$\nabla \times \mathbf{E}^{(i)} = 0$]

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi_i^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x})$$

- Poissonova jednadžba

$$\nabla^2\Phi_i^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x}) = -4\pi\rho_i^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x})$$

- vodiči

$$\rho_i(\mathbf{x}) = \rho_i^{\mathrm{c}}(\mathbf{x}) + \rho_i^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}) \quad \text{i} \quad \sigma(\mathbf{x}) = \sigma^{\mathrm{c}}(\mathbf{x}) + \sigma^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x})$$

- dielektrici

$$\rho_i(\mathbf{x}) = \rho_i^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}) \quad \text{i} \quad \sigma(\mathbf{x}) = \sigma^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x})$$

Kulonsko zasjenjenje u FČS

promatramo standardni slučaj u FČS: beskonačni vodič/izolator

- rješenje Poissonove jednadžbe

$$\Phi^{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3x' \frac{\rho^{\text{tot}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \qquad \Phi^{\text{tot}}(\mathbf{k}) = V_{11}(\mathbf{k})\rho^{\text{tot}}(\mathbf{k})$$

- inducirana gustoća naboja i naboj-naboj odzivna funkcija

$$\rho^{\text{ind}}(\mathbf{x}) = \rho^{\text{c}}(\mathbf{x}) - \nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}) \Rightarrow \rho^{\text{ind}}(\mathbf{k}) = \tilde{\chi}(\mathbf{k})\Phi^{\text{tot}}(\mathbf{k})$$

- ukupni potencijal i ukupna gustoća naboja

$$\Phi^{\text{tot}}(\mathbf{k}) = \Phi^{\text{ext}}(\mathbf{k}) + \Phi^{\text{ind}}(\mathbf{k}), \qquad \rho^{\text{tot}}(\mathbf{k}) = \rho^{\text{ext}}(\mathbf{k}) + \rho^{\text{ind}}(\mathbf{k})$$

Kulonsko zasjenjenje u FČS

veza između mikroskopskih i makroskopskih odzivnih funkcija

- vanjski skalarni potencijal

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi^{\rm ext}(\mathbf{x})$$

- zasjenjeni skalarni potencijal

$$\Phi^{\rm tot}(\mathbf{k}) = \frac{\Phi^{\rm ext}(\mathbf{k})}{\varepsilon_m(\mathbf{k})}$$

- mikroskopska dielektrična funkcija $[V_{11}(\mathbf{k}) = 4\pi/k^2$ u 3D$]$

$$\varepsilon_m(\mathbf{k}) = 1 - V_{11}(\mathbf{k})\tilde{\chi}(\mathbf{k})$$

- makroskopska dielektrična funkcija

$$\varepsilon(\mathbf{k},\omega) = 1 + 4\pi\chi^{\rm tot}(\mathbf{k},\omega)$$

Rezultat u vodičima

koji nas aspekti $\omega \to 0$ problema zanimaju u elektrodinamici kontinuuma?

- realni dio od $\tilde{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$, $\omega \to 0$ (NE)
  - statičko zasjenjenje - Thomas-Fermijeva approksimacija
  - Friedelove oscilacije
- imaginarni dio od $\tilde{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$, $\omega \to 0$ (DA)
  - Drudeov model za vodljive elektrone - analogija s kinetičkom teorijom plinova
- temeljno pitanje u FČS u granici $\omega \to 0$ i $k \to 0$
  - $v_{\mathrm{F}} k > \omega$ - Thomas-Fermijev režim
  - $\omega > v_{\mathrm{F}} k$ - Drudeov režim

Primjer 1: kulonsko zasjenjenje u dielektricima

promatramo metalnu kuglu u dielektriku dielektrične konstante ε

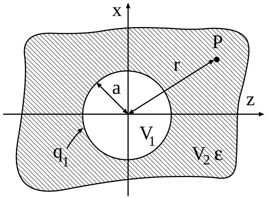
- rješenje za $E_0(\mathbf{x})$ i $\Phi^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x})$
  - za $r > a$ vrijedi $\rho^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}) \equiv q_1 \delta(\mathbf{x})$
  - $\sigma^{\mathrm{pol}} = 0$ za $R \to \infty$
- rješenje za $\Phi^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x})$ [i $E(\mathbf{x})$]

$$\Phi^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x}) = \frac{\Phi^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x})}{\varepsilon} = \frac{q_1}{\varepsilon r}$$

- alternativni zapis

$$\Phi^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x}) = \Phi^{\mathrm{ext}}(\mathbf{x}) + \Phi^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x})$$

$$\Phi^{\mathrm{tot}}(\mathbf{x}) = \frac{q_1}{r} + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{q_1}{r}$$



Primjer 2: dielektrična kugla u pločastom kondenzatoru

zanima nas depolarizacijsko polje $\mathbf{E}_1$ *za kuglu dielektrične konstante* ε *u homogenom električnom polju*

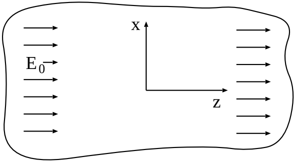
- pomoćni problem

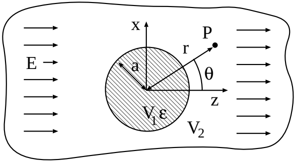
$$\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{e}_z, \quad \Phi^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = -E_0 r \cos\theta$$

- problem - rubni uvjeti

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{x}) = E_0 \hat{e}_z, \qquad \text{za } z \to \pm\infty$$

$$E_r^{(2)}(\mathbf{x}) = \varepsilon E_r^{(1)}(\mathbf{x}), \qquad E_\theta^{(2)}(\mathbf{x}) = E_\theta^{(1)}(\mathbf{x}), \quad \text{za } r = a$$





Primjer 2: dielektrična kugla u pločastom kondenzatoru

rješenje [primjer: dijamant, $\varepsilon = 5.7$]

- skalarni potencijali

$$\Phi_1^{\rm tot}(r,\theta) = \Phi^{\rm ext}(r,\theta) - (N_z P_z/E_0)\Phi^{\rm ext}(r,\theta)$$
$$\Phi_2^{\rm tot}(r,\theta) = \Phi^{\rm ext}(r,\theta) + (\mathbf{p}^K \cdot \mathbf{x}/r^3)$$

- električna polja (radijalna i polarna komponenta)

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{x}) = -\hat{e}_r \frac{\partial \Phi_i^{\rm tot}(r,\theta)}{\partial r} - \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_i^{\rm tot}(r,\theta)}{\partial \theta}$$

- polje unutar kugle $\mathbf{E}^{(1)}$ ne ovisi o $\mathbf{x}$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + N_z\chi} = \frac{3}{2+\varepsilon}\mathbf{E}_0$$

- $\mathbf{E}_1 = -N_z P_z \hat{e}_z$ nazivamo depolarizacijsko polje
- $N_z = 4\pi/3$ je depolarizacijski faktor za kuglu

Zasjenjeni skalarni potencijal?

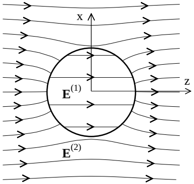
kakve su relacije između potencijala i između električnih polja?

- efekti zasjenjenja? ili efekti depolarizacije?

$$\Phi_1^{\mathrm{tot}}(r,\theta) = \frac{3}{2+\varepsilon}\Phi^{\mathrm{ext}}(r,\theta) \quad \text{ili} \quad \mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{1+N_z\chi}\mathbf{E}_0$$

- Odgovor: "beskonačni" kristal $\equiv$ paralelna ploča s L polarizacijom: $N_z = 4\pi$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{1+N_z\chi}\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}_0$$



Inducirane površinske gustoće naboja u dielektricima

- izvorni zapis rubnog uvjeta I

$$[\mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{x}) - \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}_{21}\Big|_{r=a} = 4\pi\sigma(a, \theta, \phi)$$

- alternativni zapis

$$[\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{x}) - \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}_{21}\Big|_{r=a} = 4\pi\sigma^{\mathrm{tot}}(a, \theta, \phi)$$

- inducirana površinska gustoća naboja za $\sigma(\mathbf{x}) = 0$

$$\sigma^{\mathrm{pol}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{x}) - \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}_{21}$$

Dodatak: polarizabilnost $\alpha_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$

- odziv sustava na vanjsko polje $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$

$$P_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_\beta \int \mathrm{d}^3 x' \int \mathrm{d}t' \, \alpha_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') E_{0\beta}(\mathbf{x}', t')$$

- veza sa susceptibilnošću u homogenim izotropnim dielektricima

$$\alpha = \frac{\chi}{1 + N_z \chi}, \qquad \chi = \frac{\alpha}{1 - N_z \alpha}$$

- slabopolarizabilni sustavi: $\alpha \approx \chi$