

Prvi kolokvij iz Klasične mehanike 1
13. prosinca 2017

Zadaci (4×10 bodova)

Zadatak 1

(1) Dokažite da je sila

$$\mathbf{F} = (2x \sin z - 4)\hat{i} + (3y^2z + 2)\hat{j} + (x^2 \cos z + y^3)\hat{k}$$

konzervativna.

(2) Odredite rad koji izvrši ta sila na tijelu da se ono pomakne iz točke $(-1, 2, \pi/2)$ u točku $(1, -1, 0)$.

Zadatak 2

Promotrite tijelo mase $m = 1$ u dvodimenzionalnom harmoničkom potencijalu

$$U(x, y) = \frac{1}{2}[4x^2 + (y - 2)^2].$$

Odredite kinetičku energiju tijela u trenutku $t > 0$, ako su položaj i brzina tijela u $t = 0$ jednaki

$$\mathbf{r}(0) = -\hat{i} + 4\hat{j}, \quad \mathbf{v}(0) = 2\hat{i} + \hat{j}.$$

Zadatak 3

Tijelo mase m pada u polju gravitacijske sile i osjeća otpor $F_o = -\kappa v^2$. Početna brzina tijela je 0.

- (1) Napišite jednadžbu gibanja tijela.
- (2) Odredite brzinu v za $t > 0$.
- (3) Odredite položaj x za $t > 0$.
- (4) Prikažite

$$e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}, \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{\kappa g}},$$

pomoću v te pokažite da je

$$x = \frac{m}{2\kappa} \ln \frac{mg}{mg - \kappa v^2}.$$

Zadatak 4

Satelit mase $m \ll M_z$ kruži po kružnoj orbiti na udaljenosti $r = 2R_z$ u odnosu na centar Zemlje. Kada se nalazi na položaju $\varphi = \pi/4$ njegova brzina se poveća tako da se nakon dovoljno dugog vremena nastavi gibati po paraboli.

- (1) Odredite jednadžbu te parabole u polarnim koordinatama te pripadne točke obrata.
- (2) Za koliko se promijenila brzina satelita, a za koliko njegov moment količine gibanja?

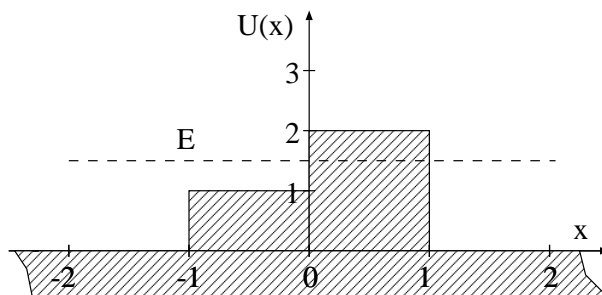
Pitanja (5×2 boda)

(1) Rotaciju kartezijevog koordinatnog sustava oko z osi možemo opisati sa $\mathbf{x}' = \mathcal{R}\mathbf{x}$, gdje je

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Odredite matricu \mathcal{R}^{-1} .

(2) Promotrite tri naboja istog predznaka koji se nalaze na pravcu. Nacrtajte sile koje djeluju na svaki od ta tri naboja i napišite analitičke izraze za te sile.



(3) Na energetskom dijagramu na slici označite točke obrata, klasično dozvoljeno područje i klasično zabranjeno područje. Nacrtajte dijagram ovisnosti kinetičke energije o x .

(4) Tijelo se nalazi blizu z osi kartezijevog koordinatnog sustava. Napišite izraz za njegovu kinetičku energiju u sfernim koordinatama.

(5) Koliki je omjer $U_{\text{eff}}(p) : U(p)$ u Keplerovom problemu dva tijela?