

## Zadaci iz klasične mehanike 1

### Zadatak 1.

Tijelo se giba se giba tako da mu se vektor položaja mijenja po zakonu:

$$\vec{r} = r(\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}).$$

- Pokažite da je brzina tijela okomita na vektor položaja.
- Pokažite da je ubrzanje tijela usmjereno prema ishodištu koordinatnog sustava te da ima iznos proporcionalan sa  $r$ .
- Uvjerite se da vektor  $\vec{r} \times \vec{v}$  ne ovisi o vremenu.

### Zadatak 2.

Tijelo se nalazi u polju sile:

$$\vec{F}(\vec{r}) = 3x^2\hat{i} + (2xz - y)\hat{j} + z\hat{k}.$$

Izračunajte rad koji moramo izvršiti da bi tijelo pomakli iz točke  $A = (0,0,0)$  u točku  $B = (2,1,3)$  ako je:

- trajektorija pravac koji spaja te dvije točke.
- trajektorija oblika  $x = 2t^2, y = t, z = 4t^2 - t$ , gdje se parametar  $t$  mijenja od  $t = 0$  (točka  $(0,0,0)$ ) do  $t = 1$  (točka  $(2,1,3)$ ).

### Zadatak 3.

Tijelo mase  $m = 4$  giba se u polju sile  $\vec{F}$  po fizikalnoj trajektoriji opisanoj s:

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 2t)\hat{i} + t^3\hat{j} - t^4\hat{k},$$

gdje su početna i konačna točka opisane s  $t_A = 1$  i  $t_B = 2$ . pokažite da je rad jednak razlici kinetičkih energija u točkama  $t_B = 2$  i  $t_A = 1$ .

### Zadatak 4.

Izračunajte rad koji izvrši sila  $\vec{F}$  na tijelo koje se giba u  $xy$  ravnini po kružnici čiji je centar u ishodištu a radijus je jednak 3. Sila je oblika

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x + 2y + 4z)\hat{k}.$$

### Zadatak 5.

Pokažite da je polje sile:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$$

Konzervativno. Ujedno nađite potencijalnu energiju i rad potreban da se tijelo pomakne iz točke  $A = (-2,1,3)$  u točku  $B = (1, -2, -1)$ .

Zadatak 6.

Tijelo mase  $m = 1$  giba se u polju sile:

$$\vec{F}(t) = (3t^2 - 4t)\hat{i} + (12t - 6)\hat{j} + (6t - 12t^2)\hat{k},$$

gdje je  $t$  vrijeme.

- Izračunajte promjenu količine gibanja tijela u vremenskom intervalu od  $t_A = 1$  do  $t_B = 2$ .
- Izračunajte brzinu tijela u trenutku  $t_B = 2$ , ako je brzina u  $t_A = 1$  jednaka:

$$\vec{v}(1) = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}.$$

- Izračunajte moment količine gibanja i moment sile na tijelo u trenutku  $t_B = 2$ , ako je u trenutku  $t = 0$  ono mirovalo u ishodištu.

Zadatak 7.

Tijelo mase  $m$  giba se po trajektoriji

$$\vec{r}(t) = a \cos(\omega t)\hat{i} + b \sin(\omega t)\hat{j}.$$

Izračunajte:

- Moment sile na česticu.
- Moment količine gibanja s obzirom na ishodište.

Zadatak 8.

Tijelo mase  $m$  giba se pod utjecajem sile:

$$\vec{F}(t) = a(\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}).$$

- Izračunajte rad koji sila izvrši na tijelo do trenutka  $t$ , ako je u trenutku  $t = 0$  tijelo mirovalo u ishodištu.
- Odredite  $\vec{r}(t)$ .

Zadatak 9.

Zadana je sila:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2x \sin(z) - 4)\hat{i} + (3y^2z + 2)\hat{j} + (\alpha(x, z) + y^3)\hat{k}.$$

- Odredite koliki mora bit  $\alpha(x, z)$  da bi sila bila konzervativna, ako vrijedi  $\alpha(0, 0) = 0$ .
- Kolika je kinetička energija tijela u točki  $A = (1, 1, 0)$ , ako je kinetička energija u ishodištu dva puta veća od tog iznosa.

Zadatak 10.

Tijelo mase  $m$  giba se u polju sile:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\alpha\vec{r}, \quad \alpha > 0.$$

- Pokažite da je polje sile konzervativno.
- Izračunajte trajektoriju tijela  $\vec{r}(t)$ , za početne uvjete  $\vec{r} = (a, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, v, 0)$ .
- Izračunajte koliki rad izvrši sila na tijelo u vremenskom intervalu od  $t = 0$  do  $t = t$ .
- Odredite ukupnu energiju tijela.
- Izračunajte moment količine gibanja tijela  $\vec{M}$ .

Zadatak 11.

Tijelo mase  $m = 1$  bačeno je s visokog nebodera horizontalno brzinom  $\vec{v} = (10, 0, 0)$  m/s. Izračunajte položaj tijela u trenutku  $t = 5$  s:

- U prisustvu sile otpora

$$\vec{F}_o = -\beta\vec{v}, \quad \beta = 1 \text{ Ns/m.}$$

- U slučaju bez otpora.

Pretpostavite da je  $g = 10$  m/s.

Zadatak 12.

Tijelo mase  $m = 2$  giba se u 1D potencijalu oblika:

$$U(x) = (x + 1)^2.$$

U trenutku  $t = 0$  tijelo se nalazi u  $x(0) = 0$  i ima brzinu  $v(0) = 0$ . Koristeći zakon očuvanja energije i metodu separacije varijabli odredite brzinu tijela u bilo koje kasnijem trenutku  $t$ .

Zadatak 13.

Zvijezda mase  $M$  i planet mas  $m \ll M$  nalaze se u apocentru na relativnoj udaljenosti  $10R$  i imaju relativnu brzinu  $v^2 = k/(20mR)$  ( $R$  je radijus zvijezde). Izračunajte kolika je relativna udaljenost zvijezde i planeta u pericentru.

Zadatak 14.

Satelit mase  $m \ll M_z$  giba se po kružnoj orbiti oko Zemlje na udaljenosti  $9R_z$  od središta zemlje. Odredite kut  $\alpha$  za koji se mora zakrenuti putanja satelita da bi satelit udario u površinu Zemlje pod kutom  $0^\circ$ .

Zadatak 15.

Komet mase  $m \ll M_S$  giba se prema Suncu relativnom brzinom:

$$v = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{gM_S}{R_S}},$$

gdje je  $R_S$  radijus Sunca. Komet se nalazi na udaljenosti  $r = 100R_S$  od središta Sunca. Minimalna udaljenost između kometa i Sunca kada ne bi bilo gravitacijske sile iznosi  $10R_S$ . Izračunajte minimalnu udaljenost  $r_{min}$  između kometa i Sunca ako se uzme u obzir gravitacijsko polje Sunca.

Zadatak 16.

Sustav dvojnih zvijezda jednakih masa  $M$  ima nergiju  $E_{CM}$  (gledano iz sustava centra mase). Izračunajte iznos momenta količine gibanja  $|\vec{M}|$ , dvojnog sustava, ako se u pericentru zvijezde nalaze na udaljenosti  $R$ .

Zadatak 17.

Dvije zvijezde masa  $m_1 = m$  i  $m_2 = 2m$  gibaju se u sustavu centra mase po elipsama. Parametar elipse prve zvijezde je  $p_1 = R$ , a njezin položaj u apocentru je  $r_{max}^1 = \frac{4}{3}R$ . Izračunajte relativnu brzinu zvijezda u apocentru.

Zadatak 18.

Promotrite dva istovrsna naboja  $Q$  mase  $M$ . Na početku ( $t \rightarrow -\infty$ ) prvi se naboj giba po pravcu brzinom  $\vec{v}_1 = 2\vec{v}$ , a drugi naboj miruje. Udaljenost drugog naboja od pravca gibanja prvog naboja je  $h$ .

- Odredite ukupnu kinetičku energiju problema te ukupnu kinetičku energiju u sustavu centra mase.
- Odredite ukupni moment količine gibanja u sustavu centra mase.
- Odredite parametre koji opisuju trajektoriju gibanja reducirane mase.
- Odredite kut  $\theta$  koji zatvaraju tangente trajektorije u ( $t \rightarrow -\infty$ ) i ( $t \rightarrow +\infty$ ).

Brzina  $v$  dana je sa  $v^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot k/mh$ .

Zadatak 19.

Četiri tijela mase  $m$  nalaze se u vrhovima kvadrata stranice  $a$ .

- Odredite elemente tenzora momenta tromosti ako četiri mase leže u  $xy$  ravnini, a središte kvadrata poklapa se s ishodištem.
- Izračunajte kinetičku energiju ovog tijela ako ono rotira oko osi koja leži u  $yz$  ravnini i nagnuta je za  $\theta = 45^\circ$  u odnosu na os  $z$ .

Zadatak 20.

Dva tijela mase  $m_1$  i  $m_2$  povezana su bezmasnim štapom duljine  $a$ .

- a) Pokažite da je moment tromosti ovakvog sustava oko osi okomite na štap koja prolazi centrom mase jednak:

$$I = \mu a^2 (\equiv I_{zz}^{CM}).$$

- b) Izračunajte kinetičku energiju štapa oko osi koja prolazi središtem štapa i koja je nagnuta za  $45^\circ$  u odnosu na okomicu na štap.

Zadatak 21.

Pokažite da šuplji cilindar radijusa  $a$  i mase  $M$  koji se kotrlja po horizontalnoj podlozi brzinom  $v$  ima kinetičku energiju  $Mv^2$ . Kolika bi bila kinetička energija ispunjenog cilindra jednake mase?

Zadatak 22.

Odredite elemente tenzora momenta tromosti valjka čije je središte u točki  $S = (0, d/2, d)$ . Masa valjka je  $m$ , promjer  $d$ , a visina  $h = 2d$ .

Zadatak 23.

Odredite elemente tenzora momenta tromosti stošca visine  $h$  i radijusa  $a$ , čija se baza nalazi u  $xy$  ravnini a vrh na pozitivnom dijelu  $z$  osi.

Zadatak 24.

Odredite kinetičku energiju krutog tijela sastavljenog od dva stošca visine  $h$  i radijusa  $a$ , čija se os simetrije poklapa sa  $z$  osi, te koji rotira oko  $x$  osi kutnom brzinom  $\Omega$ .