Drugi kolokvij iz Klasične mehanike 2
20. lipnja 2018

Zadaci (4×10 bodova)

Zadatak 1

Tijelo mase m miruje u centru vrtuljka koji rotira kutnom brzinom $\omega\hat{k}$. U jednom trenutku tijelo je izbačeno brzinom v uzduž ravnog žlijeba koji se poklapa sa x osi rotirajućeg koordinatnog sustava.
(1) Odredite Hamiltonovu funkciju problema koristeći mirujući polarni koordinatni sustav.
(2) Odredite oblik Hamiltonovih jednadžbi i nađite njihovo rješenje za gore spomenuti početni uvjet.

Zadatak 2

Kruto tijelo mase m i momenta tromosti I_{zz} može se rotirati oko osi z i može se translatirati u xy ravnini. Odredite Hamiltonovu funkciju i riješite Hamiltonove jednadžbe za početni uvjet

$$\mathbf{x}(0) = (0,0,0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (v,0,0), \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega.$$

Zadatak 3

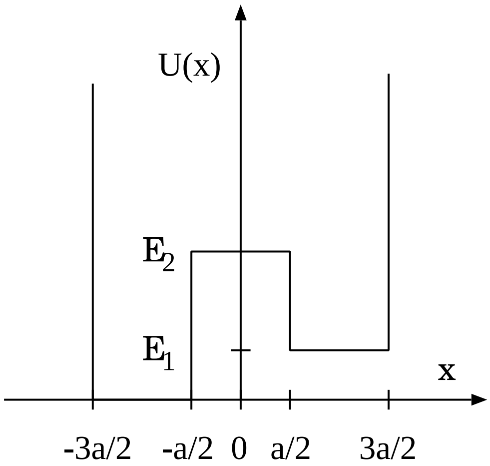
Tijelo mase m giba se u potencijalu oblika

$$V(x) = A\sin^2 x, \;\; A < 0,$$

za $0 \leq x \leq \pi$.
(1) Odredite točku stabilne ravnoteže.
(2) Za slučaj malih oscilacija oko tog položaja stabilne ravnoteže odredite površinu omeđenu faznom trajektorijom.

Zadatak 4

Promotrite česticu mase m koja se nalazi u 1D beskonačnoj potencijalnoj jami prikazanoj na slici.
(1) Koliko različitih vrsta oscilacija postoji i u kojem energetskom području?
(2) Za svaku od tih oscilacija odredite frekvencije oscilacija.



Pitanja (5×2 boda)

(1) Napišite kinetičku energiju

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

pomoću generaliziranih impulsa.
(2) Odredite površinu omeđenu faznom trajektorijom za sustav opisan Hamiltonovom funkcijom

$$\mathcal{H} = Ap^2 + Bq^2.$$

(3) Odredite površinu omeđenu faznom trajektorijom matematičkog njihala za energiju $E = mgl$ (odnosno $\varepsilon = 2$).
(4) Uvjerite se da je period titranja T sustava opisanog sa

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2$$

zaista jednak $2\pi/\omega_0$.
(5) Nacrtajte faznu trajektoriju problema prikazanog na gornjoj slici za $E_1 < E < E_2$.