

Drugi kolokvij iz Klasične mehanike 2
19. lipnja 2019

Zadaci (4×10 bodova)

Zadatak 1

Štap bez mase rotira u vertikalnoj ravnini oko osi koja je okomita na tu ravninu. Tijelo mase m nalazi se na štapu i može se gibati samo uzduž štapa. Odaberite koordinatni sustav takav da je brzina rotacije jednaka $\omega \hat{k}$ a gravitacijsko ubrzanje je $\mathbf{g} = -g\hat{j}$.

- (1) Odredite Hamiltonovu funkciju za ovaj problem.
- (2) Odredite Hamiltonove jednadžbe i nađite njihovo rješenje ako u početku tijelo miruje u ishodištu.

Zadatak 2

Promotrite sustav opisan Lagrangeovom funkcijom

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + mgl(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - 2) - \frac{kl^2}{2}(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)^2.$$

- (1) Odredite Hamiltonovu funkciju.
- (2) Odredite Hamiltonove jednadžbe gibanja.

Zadatak 3

Tijelo mase m giba se u potencijalu oblika

$$U(x) = A \cos(x - \pi),$$

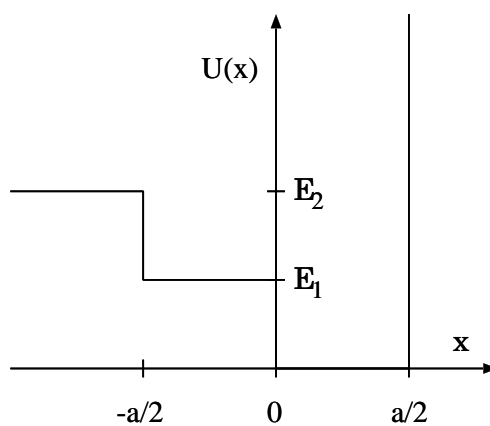
gdje je $A < 0$ i $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$.

- (1) Odredite točku stabilne ravnoteže.
- (2) Za slučaj malih oscilacija oko tog položaja stabilne ravnoteže odredite površinu omeđenu faznom trajektorijom te energije koje tijelo može imati u staroj kvantnoj teoriji.

Zadatak 4

Promotrite tijelo mase m koje se nalazi u 1D potencijalnoj jami prikazanoj na slici.

- (1) Koliko kvalitativno različitih vrsta gibanja postoji i u kojem energetsom području?
- (2) Nacrtajte fazne trajektorije za svaki slučaj te zajednički fazni portret. Odredite točne vrijednosti impulsa za svaki slučaj.



Pitanja (5×2 boda)

(1) Napišite kinetičku energiju

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

pomoću generaliziranih impulsa.

(2) Odredite površinu omeđenu faznom trajektorijom za sustav opisan Hamiltonovom funkcijom

$$\mathcal{H} = 2p^2 + 4q^2.$$

(3) Odredite površinu omeđenu faznom trajektorijom matematičkog njihala za energiju $E = mgl$ (odnosno $\varepsilon = 2$).

(4) Odredite period titranja sustava opisanog sa

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.$$

(5) Odredite period titranja problema prikazanog na gornjoj slici za $E_1 < E < E_2$.