KLASIČNA MEHANIKA 2 (prof.) PITANJA

1. Napišite izraz za derivaciju vektora $\mathbf{A}$ u fiksnom koordinatnom sustavu, $d\mathbf{A}/dt|_F$, pomoću derivacije tog vektora u sustavu koji rotira. Izvedite također izraz za drugu derivaciju $d^2\mathbf{A}/dt^2|_F$. Objasnite značenje pojedinih članova. Pretpostavite da oba koordinatna sustava imaju isto ishodište te da rotirajući koordinatni sustav rotira kutnom brzinom $\vec{\Omega}$ relativno prema fiksnom sustavu.

2. Izvedite jednadžbu gibanja za tijelo mase m koje se giba u neinercijalnom koordinadnom sustavu (x, y, z) koji se relativno prema fiksnom sustavu (x', y', z') giba nejednoliko te rotira kutnom brzinom $\vec{\Omega}$. Objasnite značenje pojedinih članova.

3. Postavite jednadžbu gibanja tijela mase m u gravitacijskom polju relativno prema točki na Zemljinoj površini uzimajući u obzir Zemljinu rotaciju. Pokažite da se članovi koji predstavljaju zanemarivo male inercijalne sile mogu zanemariti te zapišite konačan izraz za jednadžbu gibanja u kartezijevim koordinatama.

4. Koristeći jednadžbe gibanja tijela u gravitacijskom polju obzirom na Zemljinu površinu koja rotira izvedite jednadžbe gibanja za Foucaultovo njihalo. Pokažite da se u aproksimaciji $\omega = 0$ te jednadžbe svode na jednadžbe matematičkog njihala.

5. Riješite jednadžbe gibanja za Foucaultovo njihalo u aproksimaciji malih otklona $x, y \ll l$. Izvedite frekvenciju rotacije ravnine njihanja te objasnite smjer rotacije ravnine njihanja na sjevernoj i južnoj Zemljinoj polutki te na ekvatoru i polovima.

6. Izvedite jednadžbu koju mora zadovoljiti funkcija $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ da bi funkcional $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ imao ekstrem. Pokažite da dobivena jednadžba minimizira funkcional duljine puta $l(\gamma)$ između točaka (x_0, y_0) i (x_1, y_1) u 2D prostoru.

7. Napišite Lagrangeovu funkciju $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ i funkcional djelovanja S problema sa N stupnjeva slobode u kartezijevom koordinatnom sustavu. Dokažite da Hamiltonov princip minimalnog djelovanja, $\delta S = 0$, vodi do Euler-Lagrangeovih jednadžbi koje su ekvivalentne Newtonovim jednadžbama gibanja.

8. *

9. Izvedite oblik Lagrangeove funkcije u generaliziranim koordinatama $\{q_i\}$. Izračunajte generalizirane impulse p_i i objasnite pojam ciklička koordinata.

10. Pokažite da u konzervativnim sustavima totalni diferencijal Lagrangeove funkcije dL/dt vodi na konstantu gibanja $E = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$. Pokažite da je konstanta gibanja E zapravo ukupna energija sustava $E = T + U$.

11. Napišite Lagrangeovu funkciju tijela koje se giba u sfernosimetričnom potencijalu $U(r)$. Izvedite Euler-Lagrangeove jednadžbe za tri generalizirane koordinate, r, θ i ϕ. Izvedite generalizirane impulse p_r, p_θ i p_ϕ i nađite cikličke koordinate.

12. Napišite Lagrangeovu funkciju tijela koje se giba u sfernosimetričnom potencijalu $U(r)$. Pomoću Euler-Lagrangeovih jednadžbi za generalizirane koordinate (r, θ, ϕ) izvedite konstante gibanja sustava M_z i M^2. Izvedite jednadžbu gibanja za radijalnu koordinatu r.

13. Pokažite da D'Alembertov princip virtualnog rada duž plohe ograničenja, $\mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$, prevodi Newtonove jednadžbe gibanje za kartezijave koordinate $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N$ na Euler-Lagrangeove jednadžbe za nezavisne generlizirane koordinata $q_1, ..., q_n$.

14. Koristeći D'Alembertov princip virtualnog rada duž plohe ograničenja i Newtonove jednadžbe za ravninsko gibanje tijela u gravitacijskom polju izvedite Euler-Lagrangeovu jednadžbu gibanja matematičkog njihala za nezavisan stupanj slobode ϕ.

15. Napišite Lagrangeovu funkciju problema sa n generaliziranih koordinata $\{q_i\}$. Pomoću Euler-Lagrangeovih jednadžbi izvedite uvijet za stabilnu i labilnu ravnotežu u konfiguracijskom prostoru. Izvedite Lagrangeovu funkciju malih oscilacija $\mathcal{L}_{SO}$ oko točke stabilne ravnoteže $\mathbf{q}_0$.

16. Izvedite jednadžbe gibanja za problem opisan sa $\mathcal{L}_{SO}$ u kartezijevom koordinatnom sustavu i objasnite pojam normalne koordinate.

17. Za sustav s tri opruge, k, k_1, k, i dvije jednake mase, $m_1 = m_2 = m$, izvedite jednadžbe gibanja i odredite normalne modove titranja.

18. Za sustav s tri opruge, k, k_1, k, i dvije jednake mase, $m_1 = m_2 = m$, izvedite izraze za $x_1(t)$ i $x_2(t)$ u bilo kojem trenutku t uz pretpostavku da je $k \gg k_1$ i početni uvijet $x_1(0) = a$, $\dot{x_1}(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ i $\dot{x_2}(0) = 0$. Izvedite izraz za vrijeme T potrebno da sva mehanička energija mase m_1 prijeđe na masu m_2.

19. Izvedite Lagrangeovu funkciju dvostrukog matematičkog njihala za $m_1 = m_2 = m$ i $l_1 = l_2 = l$. Nađite normalne koordinate i odredite frekvencije titranja u aproksimaciji malih oscilacija.

20. *

21. Napravite prijelaz sa $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}$ reprezentacije problema sa n stupnjeva slobode na $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ reprezentaciju te objasnite prijelaz s Lagrangeove funkcije $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ na Hamiltonovu funkciju $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Izvedite kanonske jednadžbe gibanja.

22. Dokažite da za konzervativne nedispativne sustave Hamiltonova funkcija predstavlja konstantu gibanja. Dokažite da ona predstavlja ukupnu energiju sustava $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv E = T + U$.

23. Izvedite Hamiltonovu funkciju tijela koje se giba u centralnosimetričnom potencijalu $U(r)$. Odredite konstante gibanja M_z i $\mathbf{M}^2$ te izvedite jednadžbu gibanja za radijalnu koordinatu r.

24. Objasnite pojam faznog prostora. Pojasnite pojam fazne trajektorije i faznog portreta. Zašto možemo reći da kroz svaku točku faznog prostora $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ prolazi jedna fazna trajektorija i kada to ne vrijedi?

25. Objasnite fazni portret matematičkog njihala.
26. Izvedite Hamiltonovu funkciju sustava općenitog $n = 1$ problema. Nacrtajte fazni portret sustava ako potencijalna energija sustava $U(q)$ ima oblik dvostruke potencijalne jame.
27. Izvedite izraz koji povezuje period orbite u faznom prostoru $T(E)$ i derivaciju površine faznog prostora omeđene tom orbitom $A(E)$ po energiji E. Izvedite površinu faznog prostora harmoničkog oscilatora energije E. Koristeći Bohrov postulat stare kvantne teorije odredite diskretne energije 1D harmoničkog oscilatora.