

### 3. Jednadžba stanja idealnog plina – 05.03.

#### 1. Ključni pojmovi

Idealni plin, volumni koeficijent termičkog rastezanja, termički koeficijent tlaka, izotermni koeficijent kompresije, Boyle-Mariotteov zakon, Gay-Lussacov zakon, Amontonsov zakon

#### 2. Teorijski uvod

**Jednadžba stanja plina:** U općem slučaju su temperatura  $T$ , volumen  $V$ , tlak  $p$  i količina tvari međusobno povezani nekom relacijom koja ovisi o danoj tvari. Pri konstantnoj količini tvari promjena volumena s promjenom temperature i/ili tlaka opisana je sa

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp. \quad (1)$$

Slično vrijedi za promjenu tlaka

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV. \quad (2)$$

Koristeći parcijalne derivacije u izrazima (1) i (2), definiramo tri pozitivna koeficijenta, volumni koeficijent termičkog rastezanja  $\alpha$ , termički koeficijent tlaka  $\beta$  i izotermni koeficijent kompresije  $\kappa$ ,

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad \beta = \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad \kappa = -\frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad (3)$$

s eksplicitnim ovisnostima o varijablama stanja sljedećeg oblika:  $\alpha \equiv \alpha(T_0, p)$ ,  $V_0 \equiv V(T_0, p)$ ,  $\beta \equiv \beta(T_0, V)$ ,  $p_0 \equiv p(T_0, V)$ ,  $\kappa \equiv \kappa(p_0, T)$  i  $V_0 \equiv V(p_0, T)$ . Direktnom integracijom jednadžbe (1) pri konstantnom tlaku, te jednadžbe (2) pri konstantnom volumenu, dobivamo temperaturne ovisnosti volumena i tlaka u blizini temperature  $T_0$  kao funkcije parametara  $\alpha$  i  $\beta$ ,

$$V(T, p) = V_0(1 + \alpha(T - T_0)), \quad p(T, V) = p_0(1 + \beta(T - T_0)). \quad (4)$$

Iako u standardnim mjerenjima temperatura  $T_0$  predstavlja temperaturu od  $0^\circ\text{C}$ , tj.  $T_0 = 273.15\text{K}$ , gornje relacije vrijede za bilo koji izbor temperature  $T_0$  (vidi zadatke 1 i 2).

**Idealni plin:** U graničnom slučaju idealnog plina (gdje je tlak realnog plina dovoljno mali a temperatura dovoljno visoka) veza među veličinama  $p$ ,  $V$  i  $T$  je dana relacijom

$$pV = nRT, \quad (5)$$

koja slijedi iz tri empirijska zakona (izrazi (8) do (10)). Ovdje je  $n = V/V_m$  broj molova plina ( $V_m$  je molarni volumen), a  $R = 8.31441\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$  je univerzalna plinska konstanta. Može se primijetiti da iz jednadžbe stanja idealnog plina (5) neposredno dobivamo slijedeće izraze

$$\alpha = \frac{1}{T_0}, \quad \beta = \frac{1}{T_0}, \quad \kappa = \frac{1}{p_0}, \quad (6)$$

te sljedeću relaciju među koeficijentima (3)

$$\alpha = \beta \kappa p_0. \quad (7)$$

**Boyle-Mariotteov zakon:** Pri konstantnoj temperaturi idealnog plina, uz  $\kappa = 1/p_0$ , integracijom jednadžbe (1) dobivamo ovisnost volumena o tlaku koja je u suglasju s empirijskom relacijom

$$V(p) = konst \cdot p^\nu, \quad \nu = -1, \quad \text{odnosno} \quad pV = p_0 V_0. \quad (8)$$

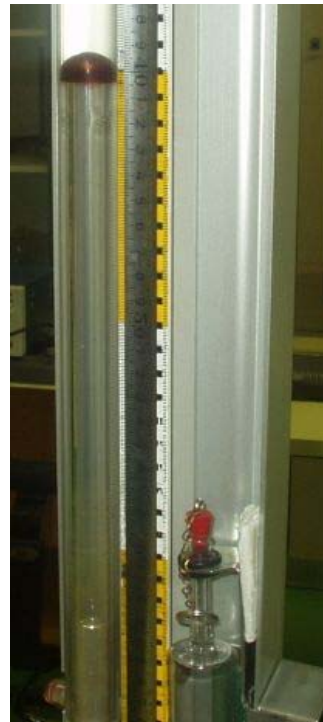
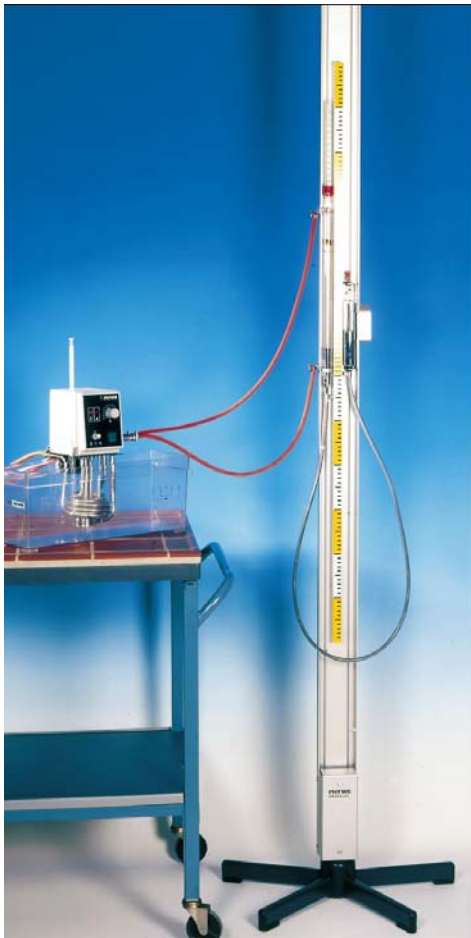
**Gay-Lussacov zakon:** Slično, pri konstantnom tlaku idealnog plina te  $\alpha = 1/T_0$ , očekivana ovisnost volumena o temperaturi slijedi zakon

$$V(T) = konst \cdot T^\nu, \quad \nu = 1, \quad \text{odnosno} \quad \frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}. \quad (9)$$

**Amontonsov zakon:** Konačno, pri konstantnom volumenu idealnog plina i  $\beta = 1/T_0$ , integracija jednadžbe (2) daje rezultat koji je u skladu sa zakonom

$$p(T) = konst \cdot T^\nu, \quad \nu = 1, \quad \text{odnosno} \quad \frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}. \quad (10)$$

### 3. Mjerni uređaj i mjerenje



Slika 1. Mjerni postav za jednadžbu stanja idealnog plina

Volumen plina u cijevi jednak je umnošku visine stupca plina  $l$ , koja se očitava sa skale, i površine presjeka cijevi  $S = 1.02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , kojem pribrajamo volumen dijela cijevi obojenog smeđe  $\Delta V = 1.01 \text{ ml}$ . Tlak plina u cijevi jednak je zbroju atmosferskog tlaka  $p_a$  i tlaka stupca žive  $\Delta p = \Delta h \cdot 0.1333 \text{ kP mm}^{-1}$ ,  $\Delta h = h_1 - h_2$  je razlika razina žive u rezervoaru i u cijevi.



Slika 2. Barometar



Slika 3. Gumeni čep

Dakle,

$$V = lS + 1.01 \text{ ml}, \quad p = p_a + \Delta h \cdot 0.1333 \text{ kP mm}^{-1}. \quad (11)$$

Atmosferski tlak se očitava pomoću zidnog barometra s preciznošću od 1 mm (slika 2). Prilikom mjerenja se pomoću donjeg crnog dugmeta šiljak pomakne u poziciju da dotiče površinu žive u rezervoaru, a potom pomoću gornjeg crnog dugmeta se nulti zarez noniusa postavi na istu razinu s površinom žive u cijevi i pročita visina stupca.

Prije početka mjerenja izvadi se gumeni čep iznad površine žive (slika 3) i uključi termostat namjestivši ga na željenu temperaturu. Zagrijana voda struji oko cijevi s plinom i zagrijava je. Mjerenje se započinje kada se kontrolna lampica počne naizmjenično paliti i gasiti (tj. temperature vode se stabilizirala). Prvo se izvrše mjerenja pri konstantnoj temperaturi (izabere se temperatura blizu sobne temperature). Mijenja se tlak pomicanjem rezervoara žive, te se mjere  $\Delta h$  i  $l$ .

U drugom dijelu mjerenja temperatura se povećava u koracima za po 5 stupnjeva, počevši od sobne temperature do približno 65 °C. Kako bi se izbjegla dva ciklusa zagrijavanja vode, te time ubrzao tijek mjerenja, pri svakoj temperaturi se izvrši i mjerenje volumena pri konstantnom tlaku i tlaka pri konstantnom volumenu.

#### 4. Zadaci

Napomena: Podatke obradite uz pomoć programskog paketa *Mathematica*.

1. Grupe A i B: Izmjerite ovisnost volumena o tlaku pri konstantnoj (sobnoj) temperaturi.

(a) Nacrtajte log-log graf te pomoću MNK odredite eksponent  $\nu$  u relaciji (8).

(b) Transformirajte ovisnost  $V(p)$  tako da bude pogodna za crtanje linearnog grafa. Primijenite MNK i odredite vrijednost faktora *konst* u (8). Iz eksperimentalno relacije  $V - 1/p$  izračunajte parametar  $\kappa$  pri tlaku  $p_0$  koji odgovara početnom tlaku u procesu mjerenja.

2. Grupa A: Izmjerite ovisnost volumena o temperaturi pri konstantnom tlaku. Iz log-log grafa odredite eksponent  $\nu$  u relaciji (9). Iz linearnog grafa odredite parametar  $\alpha$  pri temperaturi  $T_0$  koja odgovara početnoj (sobnoj) temperaturi u procesu mjerenja, te iz relacije (7) izračunajte  $\beta$ .  $p_0$  je tlak pri kojem je određen parametar  $\kappa$ .

Grupa B: Izmjerite ovisnost tlaka o temperaturi pri konstantnom volumenu. Iz log-log grafa odredite eksponent  $\nu$  u relaciji (10). Iz linearnog grafa odredite parametar  $\beta$  pri temperaturi  $T_0$  koja odgovara početnoj (sobnoj) temperaturi u procesu mjerenja, te iz relacije (7) izračunajte  $\alpha$ .  $p_0$  je tlak pri kojem je određen parametar  $\kappa$ .