E L E K T R O S T A T I K A

POJAVA SILE MEDJU NAELEKTRIZIRANIM TIJELIMA

Svojstvo naelektriziranosti mnogima je poznato. Studenti su mogli vidjeti da češalj kojeg se trlja tkaninom potom privlači usitnjene komadiće papira. Nadalje prilikom izlaska iz automobila, nakon vožnje, mogli su doživjeti šok pri doticanju metalnih dijelova automobila. Proći ćemo kroz seriju demonstracijskih pokusa koji će ta iskustva sistematizirati u kvalitativno razumijevanje pojava povezanih sa električnim nabojem u mirovanju.

Pripremimo njihalo koje čini laka kuglica obložena metalnim slojem. Počinjemo s trljanjem komada plastike vunom. Dovodimo u kontakt plastiku i kuglicu, bez diranja kuglice. Vidimo da poslije kontakta komad plastike odbija kuglicu. Slutimo da je trljanjem plastika stekla svojstvo kojim, nakon međusobnog kontakta, odbija kuglicu.

Ponovno polazimo od njihala s kuglicom. U ovom pokusu trljamo staklo svilom. Dovodimo u kontakt staklo i kuglicu, nakon čega se staklo i kuglica odbijaju.

U trećem pokusu kuglicu njihala kontaktiramo komadom plastike, a zatim joj približujemo staklo. Sada se staklo i kuglica privlače.

Time smo demonstrirali da se trljanjem materijala oni dovode u posebno stanje, u kojem su sposobni privlačiti ili odbijati tijela koja su također bila podvrgnuta sličnom postupku.

POJAM NABOJA KAO TUMAČENJE NAELEKTRIZIRANOSTI

Sveukupno objašnjenje opaženih efekta jest slijedeće. Trljanjem plastike vunom postiže se jedno stanje naelektriziranosti; to stanje odbija tijela naelektrizirana istim načinom. Trljanjem stakla svilom stvara se drugo stanje naelektriziranosti, koje također odbija tijela istog stanja naelektriziranosti. Tijela suprotne naelektriziranosti se privlače.

U stvari se naelektriziranost prilikom trljanja stvara na obadva materijala. Plastika i i vuna se suprotno elektriziraju. To možemo provjeriti pokusom u kojem kuglicu njihala kontaktom elektriziramo kao plastiku, a potom ustanovimo da kuglicu (koju odbija plasika) privlači vuna! Tako dolazimo na ideju da se nešto pri trljanju razdvaja. Jedno svojstvo preuzima plastika, a drugo vuna. S druge strane, svojstva vune su u pogledu privlačenja testne kuglice ista kao i svojstva stakla.

Sveukupno tumačenje ovih pojava je uvođenje pojma električnog naboja. Trljanjem plastike vunom plastika poprima jedan naboj a vuna suprotni. Trljanjem stakla svilom staklo poprima različit naboj od svile. No vuna i staklo imaju ista svojstva. Također, plastika i svila imaju ista svojstva.

Pokusima nije nađena treća vrsta naelektriziranosti. Za vrstu naelektriziranosti uvedene su + i - za razlikovanje vrsti naboja. To potječe od činjenice da je naboj sačuvan; t.j. ne možemo ga ni stvoriti ni uništiti. On pokazuje svojstvo aditivnosti. No još je bitni razlog multiplikativna pojava naboja u izrazima za silu međe njima. Kako ćemo vidjeti, eksperimentalno se izmjerilo da je sila među nabojima po apsolutnom iznosu proporcionalna produktu količina naboja. Sila ima jedan predznak, ako su naboji isti a suprotan ako su naboji suprotni. Ovakvo svojstvo ima upravo produkt predznaka. Jedan je rezultat za kombinacije (+)(+) i (-)(-) a suprotan za kombinacije (+)(-) i (-)(+).

TRANSPORT NABOJA : VODIČI I IZOLATORI

Uz pojavu naboja ide i pitanje njegovog transporta. Ako imamo naelektrizirani komad materijala i omogućimo njegov kontakt s metalom, naboj će prelaziti na metal i njime prolaziti. Ovo se demonstrira, na primjer, kontaktom nabijene plastike i metalnog predmeta, koji će cijeli pokazivati svojstvo naelektriziranosti. Suprotnog su svojstva izolatori, kroz koje se naboj ne će transportirati. Lako demonstriramo da stakleni štap ne će pokazivati pojave naelektriziranosti na jednom kraju, iako smo drugi kraj naelektrizirali. To je suprotno ponašanju vodljivog štapa iz metala. Ako njegov jedan kraj naelektriziramo, svojstvo naelektriziranosti pokazuje i drugi kraj. Time naše poznavanje elektrostatike (dijela znanja o poznavanja elektromagnetskih fenomena koji se odnosi na svojstva naboja koji miruju) možemo ovako sumirati:

Postoji električni naboj, koji pokazuje silu na druge objekte koji također imaju naboj. Naboja imamo dvije vrste : pozitivnih i negativnih. Već smo spomenuli da je naboj u prirodi sačuvan. To znači da se iz nula naboja može dobiti određena količina naboja jedne, ali se istovremeno stvara ista količina naboja druge vrste. Vrlo fundamentalno demonstriranje sačuvanja naboja nastupa u fotoprodukciji parova. Tada neutralna gama zraka (u blizini atomske jezgre da bi se sačuvao impuls) proizvodi dva elementarna naboja: elektron i pozitron jednakih ali suprotnih predznaka. Neki materijali odlično transportiraju naboj : vodiči (na primjer metali). Drugi materijali ne dozvoljavaju transport naboja kroz sebe: izolatori (staklo, plastika, amorfne tvari…).

ELEKTRIČNA INDUKCIJA

Na kvalitativnom nivou demonstriramo eksperimentalno i pojavu indukcije. Ako na neutralnu metalnu kuglicu njihala djeluje nabijeni predmet, kuglica će prema njemu biti privučena bez obzira kojeg je predmet naboja. Ako suprotni kraj kuglice, od onog privučenog nabijenom predmetu, dodirnemo vodičem (čime smo omogućili dijelu naboja s kuglice da ode) ostatak kuglice će sada pokazivati naelektriziranost suprotnu naelektriziranosti nabijenog predmeta. Ishod ovog demonstracijskog pokusa ne zavisi o predznaku naboja početno nabijenog predmeta. Tumačenje: vanjski naboj je u metanoj kuglici izazvao polariziranje. Na metalnoj kugli se naboj suprotan vanjskom naselio na vanjskom naboju bliži kraj. Na drugom kraju je naboj iste vrste kao na naelektriziranom predmetu. Kontakt tog drugog kraja s vodičem omogućuje naboju koji je isti kao na vanjskom naboju da se još više udalji, to jest da napusti kuglu. Kada kontakt prestane, na kugli dominira naboj koji je suprotan naboju vanjskog naboja i njihovo će se privlačenje pojačati. Pojava razdvajanja naboja u materijalu (posebno vodiču) pod utjecajem sile koju stvara vanjski naboj nazivamo električnom indukcijom.

ELEKTROSKOP

Dosadašnja su razmatranja bila kvalitativna u biti. Potrebna je sprava kojom bismo mogli uspoređivati količine naboja. Takva je sprava elektroskop. Postoji više realizacija ; spomenut ćemo dvije. U jednoj imamo metalni štap na koji je pričvršćen svojim jednim krajem metalni listić čiji drugi kraj je slobodan. Taj kraj treba biti donji kraj listića , kako bi prirodni položaj listića bio uz vertikalno postavljen metalni štap. Ako na ovakav uređaj nanesemo naboj kontaktom, slobodni kraj listića će se odmaknuti od štapa. Odmaknuće ima iznos određen ravnotežom gravitacije koja želi postaviti listić vertikalno i električne sile koja rezultira od odbijanja električnog naboja na štapu i listića. Dodavanjem naboja povećava se odmaknuće. Sada možemo instrument kalibrirati (umjeriti), to jest naći vezu položaja listića i količine naboja na elektroskopu. Na predavanju ćemo koristiti elektroskop sastavljen od dva metalna štapa. Jedan je učvršćen u izolatorsko kućište, a drugi se može rotirati oko zajedničke osovine. Štapovi su u kontaktu. Slobodni štap ima jedan kraj teži tako da dok nema naboja na elektroskopu , slobodni štap je uravnotežen gravitacijom u orijentiran je kao i učvršćeni vertikalno. Nanošenje naboja i ovdje uzrokuje otklon koji se povećava nanošenjem sve veće količine naboja na elektroskop. Kao približnu ideju kalibracije imamo slijedeću proceduru. Veliku metalnu kuglu nabijemo s dosta naboja. Kada malu metalnu kuglu dovedemo u dodir s velikom, intuicija kaže (kasnije ćemo i dokazivati) da se samo mala količina naboja preseli na malu kuglu. Malu kuglu manipuliramo tako da je pričvršćena na štap od izolatora (ovaj aranžman male metalne kugle i štapa izolatora se zove kušalica). Ideja je da svaki put kada kušalicom prenosimo naboj s velike kugle na elektroskop, prenosimo istu količinu naboja. Skalu odmaka elektroskopa tako možemo kalibrirati da pokazuje jednake korake u količini nanešenog naboja.

COULOMBOVA VAGA

Slijedeći korak u kvanitifikaciji sile jednog naboja jest mjerni uređaj za određenje sile među nabojima. Taj je uređaj Coulombova vaga. Ona se sastoji od torzijske niti na koju je obješena izolatorska šipka s vodljivim kuglicama na krajevima. Šipka je horizontalno uravnotežena. Zaokret šipke je kalibriran, to jest zna se koja sila izaziva koji zaokret šipke. Jednu od vodljivih kuglica se nabija poznatim nabojem. Također se nabija dodatnu izoliranu kuglicu . Prati se preko torzijskog zaokreta zavisnost Zaokreta šipke do ravnotežnog položaja kao funkciju unešenih naboja i funkciju udaljenosti među njima. Tako je dobiven temeljni, mnogo puta provjeravani Coulombov zakon za silu među nabojima za zadanu udaljenost. Taj zakon je u suštini osnova na kojoj se može izgraditi cijela zgrada elektromagnetizma.

COULOMBOV ZAKON

$$\vec{F}_{(1)\to 2} = K \frac{Q_1 Q_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} \qquad (1.1)$$

Gdje su Q oznake naboja pojedinog objekta, $\vec{r}$ su oznake radijusvektora pojedinih objekata, a K je poznata izmjerena konstanta. U SI sustavu naboj mjerimo u Kulonima. Također je konstantu K uobičajeno pisati kao:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (1.2)$$

Numeričke vrijednosti ovih konstanti iznose:

$$K = 8.9879 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (1.3)$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \qquad (1.4)$$

Ovdje se pojavljuje jedinica naboja kulon (Coulomb) . To je vrlo velika količina naboja. Student bi trebao imati intuitivni osjećaj za amper struje. Kulon je naboj koji proteče strujom od jednog ampera tijekom sekunde. Tijekom ovih predavanja dat ćemo egzaktnu definiciju ampera. Amper je jedna od temeljnih jedinica SI sustava. Zasada pamtimo da je kulon jedinica naboja, intuiciju za njega ćemo dobiti pri definiciji ampera s kojim je povezan kako smo naveli.

Sila u Coulombovom zakonu naravno ispunjava treći Newtonov zakon:

$$\vec{F}_{(1)\to 2} = -\vec{F}_{(2)\to 1} \qquad (1.5)$$

Također, ako na tijelo 3 djeluju Coulombovom silom: tijelo 1 $\vec{F}_{(1)\to 3}$ i tijelo 2 silom $\vec{F}_{(2)\to 3}$ tada je ukupna sila vektorska rezultanta sila s tijela 1 i tijela 2 $\vec{F}_3$ dana relacijom:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{(1)\to 3} + \vec{F}_{(2)\to 3} \qquad (1.6)$$

Drugim riječima Coulombske (elektrostatske) sile se superponiraju na uobičajeni način.

ELEKTRIČNI NABOJ JE ZRNAST

Dok u mnogim primjenama možemo upotrebljavati aproksimaciju da se naboj može sve finije usitnjavati , u mikrosvijetu nalazimo da postoje zrnca naboja. Najmanje zrnce naboja ima elektron. Nabijeni objekt ima određeni broj naboja elektrona. Naboj je znači kvantiziran. Elektronov naboj se označava s e . (Ne ćemo upotrebljavati u ovim predavanjima utvrđenu eksperimentalnu činjenicu da unutar protona i neutrona postoje dokazi za podstrukture , kvarkove, koji imaju naboje 2/3e i -1/3e).

POLJE I POTENCIJAL ELEKTRIČNOG NABOJA

Već smo u mehanici upoznali pojam polja. Kada opisujemo gravitacijsku silu kojom jedan objekt djeluje na drugi, možemo uvesti koncept polja kao prijenosnika (medijatora) te sile sa slijedećom slikom. Tijelo koje djeluje proizvodi posebno stanje prostora. Ma gdje da se nalazi druga masa , na nju će djelovati prvo tijelo prema Newtonovom zakonu gravitacije. Radi praktičkih razloga smo uzeli kao standard opisa djelovanja tako ostvarenog polja kao onu silu koju objekt uzročnik sile proizvodi na jediničnu masu.

Istu ideju provodimo i ovdje, s tim da se promatra sila koju zadani naboj proizvodi na jedinični naboj. Ako je veličina te sile poznata po cijelom prostoru, tada djelovanje zadanog naboja na tijelo proizvoljnog naboja opisujemo umnoškom sile na jedinični naboj (to jest veličine polja) i iznosa naboja koji ima drugi objekt. Tako imamo definiciju:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \qquad (2.1)$$

Jasno je da je polje naboja Q smještenog u ishodište sustava:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (2.2)$$

Očito je jedinica električnog polja N/C .

ELEKTRIČNO POLJE SKUPINE ELEKTRIČNIH NABOJA

Polazeći od (1.6) rezultata za silu koju na naboju 3 proizvode naboji 1 i 2 i pišući za tu silu eksplicitno Coulombov zakon, imamo za silu naboja 1 i 2 na naboj 3 izraz:

$$\frac{\vec{F}_3}{Q_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\ \vec{r}_3 - \vec{r}_1\ |^3} + \frac{Q_2(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}\right] \qquad (2.3)$$

Izraz (2.3) je po definiciji polja upravo polje koje u prostoru (na koordinati $\vec{r}_3$ proizvode naboji 1 i 2 .

Put poopćenja proračuna polja za skupinu od N naboja je sada jasan:

Neka je probni naboj q na koordinati $\vec{r}$. Neka su naboji Q_i na položajima $\vec{r}_i$, tada je sila $\vec{F}_q$ na probni naboj podijeljena s tim nabojem (polje) :

$$\frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q} = \sum_{1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \qquad (2.4)$$

KONZERVATIVNOST ELEKTRIČNE SILE I ELEKTRIČNOG POLJA

Već smo u prvom semestru pokazali sa da za silu istog analitičkog oblika (centralna sila obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti) vrijedi svojstvo konzervativnosti koje se može formulirati a razne načine. Uobičajeno deklariranje konzervativnosti sile jest:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 \qquad (2.5)$$

Sila u Coulombovom zakonu ima svojstvo konzervativnosti , a isto svojstvo ima i električno polje.

WHIMHURSTOV STROJ

U budućim demonstracijama , umjesto elektriziranja tvari trljanjem, koristit ćemo za stvaranje (generiranje) naboja Whimhurstov stroj, koji je tehničko rješenje temeljeno na istom principu. Razdvaja naboj pomoću trenja i nakuplja ga na posebnim skladištima naboja (kasnije ćemo ta skladišta zvati stručno kapacitorima).

POTENCIJALNA ENERGIJA ELEKTRIČNOG NABOJA I ELEKTRIČNI POTENCIJAL

Ponovit ćemo razmatranje koje smo u mehanici načinili pri uvođenju pojma potencijalne energije; posebno zato da se studenti prisjete razloga odabira predznaka uz potencijalnu energiju. Podijelimo ukupnu silu koja djeluje na tijelo na onu koja dolazi izvan sustava i silu koja je unutar sustava. U konkretnom slučaju možemo imati naboj koji je izvor sile i učvršćen je u ishodištu i naboj koji je negdje u prostoru. Sila među njima je sila iz Coulombovog zakona. Ta je sila, sila unutar sustava. Može biti prisutna i neka druga sila koja miče pokretni naboj. Ukupna sila je zbroj vanjske sile i sile unutar sustava:

$$\vec{F}_{ukupno} = \vec{F}_{Coul.} + \vec{F}_{vanjsko} \qquad (2.6)$$

Kao rezultat djelovanja ukupne sile mijenja kinetička energija tijela:

$$(\vec{F}_{vanjsko} + \vec{F}_{Coul.}) \cdot d\vec{s} = d(\frac{1}{2} m v^2) \qquad (2.7)$$

Ako izdvojimo rad vanjske sile slijedi:

$$\vec{F}_{vanjsko} d\vec{s} = -\vec{F}_{Coul.} d\vec{s} + d(\frac{1}{2} m v^2) \qquad (2.8)$$

Jasno je da , ako je sistem prepušten samom sebi (vanjske sile nema) , tada je diferencijalna veličina na desnoj strani jednaka nuli. Ako definiramo diferencijal potencijalne energije kao

$$dP \equiv -\vec{F}_{Coul.} d\vec{s} \qquad (2.9)$$

tada je u posebnom slučaju bez vanjske sile u (2.8) :

$$dP+dT=0 \qquad (2.10)$$

to jest zbroj potencijalne i kinetičke energije sustava je konstantan.

Izraz (2.9) se jednostavno generalizira i na sustav naboja među kojima djeluju kulonske sile: Od gornjeg modela u kojem je jedno tijelo bilo fiksno u ishodištu pođimo korak danje i promatrajmo dva slobodna naboja 1 i 2 s pripadnim koordinatama i nabojima. Definiciju (2.9) i dalje zadržavamo. Sada je diferencijal potencijalne energije dP:

$$dP = -\vec{F}_{(2)\to 1} d\vec{s}_1 - \vec{F}_{(1)\to 2} d\vec{s}_2 \qquad (2.11)$$

Uz treći Newtonov zakon možemo pisati:

$$dP = -\vec{F}_{(2)\to 1}(d\vec{s}_1 - d\vec{s}_2) \qquad (2.12)$$

ili eksplicitno:

$$dP = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(d\vec{s}_1 - d\vec{s}_2) \qquad (2.13)$$

Definirajmo jedinični vektor:

$$\hat{r} \equiv \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \qquad (2.14)$$

i modul:

$$r \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \qquad (2.15)$$

Tada je lako provjeriti:

$$\hat{r} d(\vec{s}_1 - \vec{s}_2) = dr \qquad (2.16)$$

Time faktor

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d(\vec{s}_1 - \vec{s}_2) = r\hat{r} d(\vec{s}_1 - \vec{s}_2) = r dr \qquad (2.17)$$

Tom transformacijom imamo za diferencijal potencijalne energije (2.13)

$$dP = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} d(\frac{Q_1 Q_2}{r}) \qquad (2.18)$$

Integracijom diferencijala dobiva se potencijalna energija:

$$P(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r} \qquad (2.19)$$

Napomena Na ovom mjestu smo zapravo dokazali konzervativnost električne sile. Čim nekoj sili možemo odrediti potencijalnu energiju to jest analitičku zavisnost o koordinati, znači da se vraćanjem na istu poziciju ukupni rad po zatvorenoj krivulji vraća na nulu.

Da bismo naglasili da se radi o paru čestica 1 i 2 možemo modul indeksirati s indeksom 12.

$$P_{12}(r_{12}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} \qquad (2.20)$$

Generalizacija (2.20) na sustav od N objekata je jednostavna. Treba pozbrajati potencijalne energije svih parova:

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{po\ parovima}\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \qquad (2.21)$$

Gdje je

$$r_{ij} = \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| \tag{2.22}$$

Uočimo da je ovo ukupna energija sustava nabijenih čestica.
Ovo treba suštinski razlikovati od potencijalne energije koju probna čestica q ima u tom sustavu izložena silama N nabijenih čestica. Njezina energija u tom sustavu sastoji se samo od dijelova koji pripadaju njenoj interakciji sa svakim pojedinim nabojem i međusobne interakcije ostalih čestica se ne pojavljuju. Označimo s P_q njezinu energiju u sustavu N naboja a njen položaj s $\vec{r}$. Jasno je da je ta veličina jednaka:

$$P_q = q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{|\ \vec{r}_i - \vec{r}\ |} \tag{2.23}$$

Potencijalna energija probnog naboja podijeljena s probnim nabojem se zove potencijalom.
Jedna od oznaka za električni potencijal jest U .
Tako bi električni potencijal na lokaciji $\vec{r}$ pisali kao:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{|\ \vec{r}_i - \vec{r}\ |} \tag{2.24}$$

SVOJSTVA NEKIH ELEKTRIČNIH POLJA

Uzmimo naboj Q smješten u ishodištu. Analitički oblik polja je izražen s (1.8). Znači polje je radijalno i opada s kvadratom udaljenosti od ishodišta. Linije koje su paralelne sa smjerom polja su silnice. Zavisno o predznaku naboja Q, silnice izviru ili poniru u ishodište. Eksperti ovo polje zovu poljem monopola u smislu polja naboja jednog polariteta. Oblik polja se demonstrira snažnim nabojem i trakicama vrlo laganog papira.

Ako uzmemo dva suprotna naboja i promatramo njegove silnice (na ulje pospemo mrvice pogodnog materijala) slika se mijenja posebno između naboja. Silnice idu praktički pravocrtno po spojnici naboja i usmjerene su od + prema- polu. Idući dalje u prostor silnice iz pozitivnog naboja imaju dvojaku tendenciju „pobjeći od izvora", ali i „vratiti se u ponor" negativnog naboja.

Silnice jednakih naboja istih predznaka izgledaju potpuno drukčije. One se „odbijaju".

VERSORIJ

To je instrument za određivanje smjera električnog polja. Sastoji se od dvije nabijene kuglice, jednakih no suprotnih naboja, povezane izolatorskim štapićem. Štapić je poduprt u centru mase ali tako da može rotirati. Uslijed toga se postavlja u smjer duž električnog polja.

VEZA ELEKTRIČNOG POLJA I POTENCIJALA

Već smo u mehanici pokazali vezu potencijalne energije i sile:

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot} \tag{2.25}$$

Ako relaciju (2.25) podijelimo s nabojem q , a za potencijalnu energiju upišemo energiju električnog polja,

$$\frac{\vec{F}_{Coul}}{q} = -\nabla \frac{P}{q} \tag{2.26}$$

što je eksplicitna veza polja i potencijala:

$$\vec{E}(r) = -\nabla U(r) \tag{2.27}$$

IZRAZI ZA ELEKTRIČNO POLJE I POTENCIJAL ZA KONTINUIRANU RASPODJELU NABOJA

Već smo u mehanici imali izraze za fizikalne veličine ako je na primjer masa kontinuirano podijeljena po prostoru nekom gustoćom $\rho(\vec{r})$.

Tada je ukupna masa bila (prijelazom sa sumiranja na integraciju):

$$m = \int \rho(\vec{r}) dV \tag{2.28}$$

Potpuno analognim postupkom dobivamo :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Rightarrow \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV' \tag{2.29}$$

Gdje je sada ρ oznaka za gustoću električnog naboja:

$$\rho(\vec{r}) = \lim \frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{2.30}$$

Gdje su ΔV mali volumen oko točke $\vec{r}$, a Δq količina naboja unutar tog malog volumena. Limes podrazumijeva proces smanjivanja volumena ΔV. Inspekcijom (2.29) vidimo da smo u prijelazu sa sumiranja po nabojima Q_i prešli na integriranje elemenata $(\Delta Q / \Delta V) \cdot (\Delta V)$ to jest $\rho(\vec{r}) dV$.

Ovim razmatranjima smo u suštini razriješili važan problem određivanja električne sile koju proizvodi proizvoljna raspodjela naboja na neki izolirani naboj q. Naime za proizvoljnu raspodjelu naboja izračunamo polje prema izrazu (2.29). Pomnožimo li polje s jakošću izoliranog naboja dobiti ćemo silu na izolirani naboj $\vec{F}_q$:

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \tag{2.31}$$

što je sukladno definiciji električnog polja (2.1) i njegovom poopćenju (2.4)

U slijedećem poglavlju ćemo upoznati matematički elegantna razmatranja o globalnim svojstvima polja. Ona će nam u krajnjoj liniji omogućiti pisanje Coulombovog zakona na mnogo elegantniji način i ujedno pomoći računati električna polja za konkretne raspodjele naboja.

TOK ELEKTRIČNOG POLJA KROZ POVRŠINU; GAUSSOV ZAKON

POJAM TOKA POLJA

Neka imamo matematički orijentiranu površinu $\Delta\vec{a}_i$ smještenu na koordinati $\vec{r}_i$. To podrazumijeva da znamo njenu površinu i orijentaciju. Uobičajeno jest da je za zatvorene površine orijentacija površine pozitivna u smjeru prema van (karakteristični vektor koji je opisuje ima iznos veličine te površine, okomit je na nju i usmjeren prema van). Tok električnog polja $\vec{E}(\vec{r}_i)$ na kroz tu površinu se definira kao:

$$\Delta\Phi_i \equiv \vec{E}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{a}_i \tag{3.1}$$

Ako se površina sastoji od više elemenata indeksiranih s indeksom i , tada je ukupni tok kroz sve elemente:

$$\Phi = \sum_i \vec{E}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{a}_i \tag{3.2}$$

Ukoliko imamo kontinuiranu površinu, tada izraz (3.2) prelazi u :

$$\Phi = \int_{površina} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{a} \tag{3.3}$$

Promotrimo slučaj toka naboja q kroz kuglu radijusa r u čijem se središtu nalazi naboj. Otprije znamo izraz za polje

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{2.2}$$

$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r})d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{a} \tag{3.4}$$

Kako su vektori $\vec{r}\ i\ d\vec{a}$ paralelni to je njihov skalarni produkt, produkt njihovih modula. Time (3.4) postaje:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{da}{r^2} \tag{3.5}$$

Integriranje (3.5) po kugli radijusa r rezultira u površini kugle= $4\pi r^2$ dok su sve ostale veličine konstante.

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi r^2}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{3.6}$$

Dobili smo prvorazredan rezultat, koji će nam olakšati proračun polja za različite raspodjele naboja. Tok električnog polja kroz plohu u kojoj je naboj zatvoren je jednak tom naboju podijeljenom s konstantom ε_0. Pokazat ćemo smjesta kako je rezultat (3.6) ispravan za bilo koji oblik površine unutar koje je naboj zatvoren. Vratimo se na izraz (3.4), s time da vektor diferencijala površine u slučaju općeg oblika površine nije paralelan s radijus vektorom nego s njim zatvara kut $\angle d\vec{a},\vec{r}$. Tada je

$$\frac{\vec{r}d\vec{a}}{r^3} = \frac{rda\cos(\angle d\vec{a},\vec{r})}{r^3} = \frac{da\cos(\angle d\vec{a}.\vec{r})}{r^2} = d\Omega \tag{3.7}$$

Posljednju jednakost student će najlakše razumjeti preko crteža. Brojnik u (3.7) predstavlja projekciju diferencijala površine na radijalni smjer. Omjer te projekcije površine i kvadrata radijusa je po definiciji diferencijala prostornog kuta upravo diferencijal prostornog kuta. Relacijom (3.7) , relacija (3.4) postaje:

$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r})d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad (3.8)$$

No vrijedi:

$$\oint d\Omega = 4\pi \qquad (3.9)$$

Tako integriranjem po prostornom kutu relacije (3.8) imamo faktor 4π . Odnosno za cijeli tok kroz bilo koju zatvorenu površinu ponavljamo rezultat (3.6) . Istom relacijom (3.7) pokazujemo i da je tok naboja koji je izvan zatvorene površine jednak nuli. Naime, ako iz naboja povučemo plašt stošca preko zatvorene površine, oni će presjeći dva elementa zatvorene površine (predznakom suprotno orijentiranih) , a identičnih prostornih kutova. Tako se svaka dva doprinosa zatvorene površine poništavaju. Time (3.6) postaje univerzalna relacija za tok naboja. Odnosno , prema toku električnog polja kroz zatvorenu površinu preko (3.6), odmah znamo koliki je naboj u njenoj unutrašnjosti. Relaciju (3.6) često nazivamo Gaussovim zakonom (u integralnom obliku). To treba razlikovati od Gaussovog matematičkog teorema, kojeg ćemo također upoznati.

PRIMJENE GAUSSOVOG ZAKONA:

a) Sferna raspodjela naboja (uključujući točkasti)

Radi razloga simetrije raspodjele naboja ($\rho(\vec{r}) = \rho(r)$), električno polje je radijalno. Stoga je skalarni produkt polja i vektora orijentirane površine produkt njihovih modula:

$$\Phi = \int_{po\ kugli} E da = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (3.10)$$

Posljednji izraz slijedi iz Gaussovog zakona. Iz posljednje u nizu jednakosti (3.10) slijedi:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (3.11)$$

Ako tome dodamo i radijalnost električnog polja, slijedi već poznati oblik (2.2)
Vidimo da Gaussov zakon u suštini ima isto značenje kao i Coulombov zakon.

b) Jednolika raspodjela naboja po pravcu

Iz razloga simetrije, polje je sada okomito na plašt svakog cilindra čija je os simetrije pravac s nabojem. Neka je linearna gustoća naboja λ, to jest vrijedi za pomak po pravcu dx:

$$dq = \lambda dx \qquad (3.12)$$

dq je naboj smješten na intervalu dx.
Izaberimo interval pravca duljine l. Načinimo oko njega osno (aksijalno) simetrični cilindar. Okomice na taj cilindar , radi razloga simetrije, su paralelne linijama električnog polja prouzročenog raspodjelom naboja po pravcu. Tako je vektor električnog polja ponovno paralelan s vektorom elementa površine cilindra. Stoga i u ovom slučaju skalarni produkt ta dva vektora rezultira u produktu njihovih modula:

$$\Phi = \int_{po\ cilindru} Eda = E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \tag{3.10}$$

Iz posljednje jednakosti u (3.10) slijedi:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} \tag{3.11}$$

Ovaj rezultat je baza za konstrukciju posebnih detektora u visokoenergijskoj fizici. Ovakva linearna raspodjela pozitivnog naboja na vodiču poljem (3.11) akcelerira elektrone prema vodiču gdje oni daju strujni puls koji se dalje elektronički obrađuje.

c) Električno polje jednoliko nabijene ravnine

Iz razloga simetrije polje mora biti usmjereno okomito na ravninu. Ako zamislimo cilindar okomit plaštem na ravninu, a bazama paralelan s ravninom , tada je električno polje okomito na bazu cilindra, to jest paralelno s vektorom njegovih baza. S druge strane električno polje je okomito na vektore površine cilindričnog plašta. Tako ukupnom toku kroz sve površine cilindra doprinose samo tokovi kroz baze cilindra. Označujemo sa σ površinsku gusoću naboja. To jest iznos naboja dq koji se nalazi na površini da jest:

$$dq = \sigma da \tag{3.12}$$

Neka je površina svake baze cilindra A. Tada je po Gaussovom zakonu ukupni tok kroz cilindar:

$$\Phi = \int_{po\,bazama} Eda = AE + AE = 2AE = \frac{A\sigma}{\varepsilon_0} \tag{3.13}$$

Iz posljednje jednakosti u (3.13) slijedi:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{3.14}$$

ELEKTRIČNI POTENCIJAL ZA SPECIJALNE RASPODJELE NABOJA

Izvest ćemo eksplicitne izraze za električni potencijal za posebne razmještaje naboja, naročito one koje smo gore diskutirali. No uvodno ćemo najprije ponoviti temeljne općenite činjenice o potencijalnoj energiji , potencijalu i električnoj sili i električnom polju.

Električna je sila povezana s električnim poljem izrazom:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{3.15}$$

Potencijalna energija naboja q u električnom polju jest:

$$E_{pot} = \int_{-\infty}^{\vec{r}} -q\vec{E}d\vec{s} \tag{3.16}$$

Električni potencijal U i električna potencijalna energija su povezani s

$$U = \frac{E_{pot}}{q} \tag{3.17}$$

Kako električnu silu i električnu potencijalnu energiju povezuje relacija:

$$\vec{F} = -\nabla E_{pot} \tag{3.18}$$

Koju smo upoznali još u semestru mehanike, to dijeljenjem s nabojem q i uzimanjem u obzir relacija (3.15) i (3.17) slijedi i veza potencijala i polja:

$$\vec{E} = -\nabla U \tag{3.19}$$

Izraz za polje nakupine električnih naboja smo već izveli prije:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \Rightarrow \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} dV' \tag{2.29}$$

Također smo izveli i izraz za potencijal unutar nakupine naboja:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\ \vec{r}_i - \vec{r}\ |} \tag{2.24}$$

U slučaju kontinuirane raspodjele naboja (2.24) prelazi u :

$$U(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV' \tag{3.20}$$

Sada ćemo prijeći na primjere pojedinačnih slučajeva raspodjele naboja koje slijede iz (2.24)

Potencijal jednog naboja:

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_q|} \tag{3.21}$$

Potencijal dva naboja:

$$U(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_2|} \tag{3.22}$$

Silu koja rezultira iz dva naboja smo već demonstrirali iza relacije (2.24) i analitički izrazili u (1.6) i (2.3) .

Potencijal za homogeno električno polje usmjereno duž osi z:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E\hat{z} \tag{3.23}$$

$$dU = -\vec{E}d\vec{s} = -E\hat{z}d\vec{s} = -edz \tag{3.24}$$

Integriranjem imamo:

$$U(z) - U(z_0) = E(z_0 - z) \tag{3.25}$$

EKVIPOTENCIJALNE PLOHE

Pojam ekvipotencijalnih ploha i silnica smo već obradili u mehanici ovdje stoga možemo nabrojati slučajeve koje smo upoznali. Za silu koja dolazi od jednog naboja znamo oblik potencijala on zavisi samo od udaljenosti točke od izvora polja. Stoga su ekvipotencijale kugle a silnice su usmjerene duž radijus vektora. Polje linearne raspodjele naboja po pravcu je radijalno (silnice), a ekvipotencijale su cilindri okomiti na te silnice. Za homogeno polje (na primjer ono od homogene raspodjele naboja po ravnini polje je stalno i okomito na ravninu (3.23) a ekvipotencijale su ravnine prema (3.25).

SLUČAJ KVADRUPOLNOG POLJA

Kvadrupolno polje možemo početno zamisliti kao polje dva pozitivna i dva negativna u vrhovima kvadrata. Susjedi svakog naboja su suprotnog predznaka , a onaj smješten dijagonalno ima isti predznak. Zapravo se idealno kvadrupolno polje dobiva profinjenijim razmješajem naboja po površinama. Idealno kvadrupolno polje ima slijedeći analitički opis:

$$\vec{E} = \hat{x}ky + \hat{y}kx \tag{3.26}$$

Iz ovog analitičkog opisa možemo u svakoj točki x-y ravnine odrediti prikloni kut silnice prema x osi što je ujedno i derivacija krivulje silnice y(x) po x varijabli:

$$tg\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{kx}{ky} = \frac{dy}{dx} \tag{3.27}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad ydy = xdx \quad \Rightarrow \quad d(x^2 - y^2) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = const \tag{3.28}$$

Silnice su za ovaj opis polja hiperbole s koordinatnim osima kao osima hiperbola.
Ekvipotencijale dobivamo poznatim slijedom

$$dU = -\vec{E}d\vec{s} = -(\hat{x}ky + \hat{y}kx)\cdot(\hat{x}dx + \hat{y}dy) = -k(ydx + xdy) = -kd(xy) \tag{3.29}$$

Odatle integriranjem slijedi

$$U = -kxy + const \tag{3.30}$$

Ekvipotencijale su ponovno hiperbole, sada nagnute pod 45 stupnjeva prema x osi.

POTENCIJAL JEDNOLIKE RASPODJELE NABOJA PO PRAVCU

Prema (3.11) i radijalnosti polja oko jednolike raspodjele naboja po pravcu slijedi:

$$\vec{E} = \frac{\lambda\hat{r}}{2\pi r\varepsilon_0} \tag{3.31}$$

Slijedom analognim onom u (3.29) imamo

$$dU = -\vec{E}d\vec{s} = -(\frac{\lambda\hat{r}}{2\pi r\varepsilon_0})d\vec{s} = -\frac{\lambda dr}{2\pi r\varepsilon_0} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}d(\ln r) \tag{3.32}$$

Integriranjem od radijusa malog cilindra r_0 po kojem je naboj raspodijeljen (promjer žice vodiča na kojoj je naboj) do radijusa u kojem mjerimo potencijal slijedi:

$$U(r) = U(r_0) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\frac{r_0}{r}) \tag{3.33}$$

ELEKTRIČNO POLJE I POTENCIJAL JEDNOLIKO NABIJENE KRUŽNE PLOČE

Centar ploče naboja smješten je u ishodište a ploča je u x-y ravnini. Radi jednostavnosti tražimo polje i potencijal samo na osi simetrije, to jest duž pravca (0,0,z). Promotrimo doprinos kojeg daje kružni prsten radijusa s , u podintegralnoj funkciji izraza (3.20) , ako je površinska gustoća naboja σ .

$$\rho(\vec{r}\,')dV' = \sigma dA = \sigma 2\pi s ds \tag{3.34}$$

Gdje je dA površina spomenutog kružnog prstena debljine ds:
Tada je u izrazu (3.20):

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{z^2 + s^2} \tag{3.35}$$

Tako za diferencijal potencijala prema (3.20), (3.34) i (3.35) možemo pisati:

$$dU(0,0,z) = \frac{\sigma 2\pi s ds}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + s^2}} \tag{3.36}$$

Napisat ćemo sada dva očita identiteta koji će pomoći integrirati (3.36):

$$2sds = d(s^2 + z^2) \tag{3.37}$$

koji vrijedi dok je z stalan.

$$d(\sqrt{s^2 + z^2}) = \frac{1}{2\sqrt{s^2 + z^2}} d(s^2 + z^2) \tag{3.38}$$

Supstitucijom za faktor sds u brojniku (3.36) identitet (3.37) i koristeći potom (3.37) imamo za diferencijal potencijala:

$$dU = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d(s^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.39}$$

Ako je radijus kruga naboja R, tada se doprinosi prstenova integriraju od s=0 do s=R, pa slijedi:

$$U(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{s^2 + z^2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2}) \tag{3.40}$$

Korjenovanje u zadnjem članu izraza (3.40) namjerno nije dovršeno, jer može voditi do dva rezultata. Za pozitivne vrijednosti od z ,

$$U(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + z^2} - z) \tag{3.41}$$

Za negativne vrijednosti od z:

$$U(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + z^2} + z) \tag{3.42}$$

(studentu mora biti jasno da se u obadva slučaj radi o odbijanju modula od z).
Kada znamo potencijal i dodamo simetričnost problema oko osi simetrije , možemo na središnjoj osi izračunati i vrijednost električnog polja. Za pozitivne vrijednosti od z:

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}(\sqrt{R^2 + z^2} - z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \tag{3.43}$$

Analognim postupkom možemo dobiti izraz i za negativne vrijednosti z koordinate. Jedina je promjena u predznaku broja 1 u okrugloj zagradi , koja korespondira vrijednosti +z u izrazu za potencijal (3.42).

Diskusija ovih rezultata:
Inspekcijom (3.43) u limesu pozitivni z teži prema nuli $(E_z(+0))$ slijedi:

$$E_z(+0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{3.44}$$

Za analogni postupak u limesu kada negativne vrijednosti z koordinate teže nuli imamo radi promijenjenog predznaka jedinice u (3.43):

$$E_z(-0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{3.45}$$

Ovi su izrazi u suglasju s prije dobivenim rezultatima za polje beskonačne ravnine naboja. Naime u centru nabijenog kruga polje je okomito na plohu naboja i primjenom Gaussovog zakona dobili bismo za cilindar vrlo malog promjera upravo rezultate (3.44) i (3.45). U budućem razmatranju koristan će biti još jedan rezultat. Ako si zamislimo da mjereći električno polje prelazimo preko ravnine naboja, vidimo da u trenutku prijelaza preko te ravnine polje doživljava skok:

$$E(+0) - E(-0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{3.46}$$

ELEKTRIČNI POTENCIJAL NA RUBU KRUŽNE PLOČE

Počinjemo s kružnom pločom homogeno nabijenom ; diferencijal naboja je jednak plošnoj gustoći pomnoženoj s diferencijalom površine. Ploča ima polumjer a . Iz točke u kojoj računamo potencijal povučemo promjer. Promatrana točka, točka na kraju promjera i bilo koja točka ruba kruga zatvaraju pravokutni trokut. Kut između promjera i proizvoljne točke kruga imenujemo kao ϑ. Iz promatrane točke povlačimo luk polumjera s i širine ds. Količina naboja u tom luku prema početnoj rečenici ovog odsječka jest:

$$dq' = \sigma 2\vartheta s ds \tag{3.47}$$

a diferencijal potencijala koji dolazi od tog naboja jest:

$$dU\Big|_{na\ rubu} = \frac{\sigma 2\vartheta s ds}{4\pi\varepsilon_0 s} = \frac{\sigma\vartheta ds}{2\pi\varepsilon_0} \tag{3.48}$$

Varijable u (3.48) su povezane relacijom:

$$s = 2a\cos\vartheta \qquad ds = 2ad(\cos\vartheta) \tag{3.49}$$

Time se (3.48) transformira u :

$$dU\Big|_{na\ rubu} = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0}\vartheta d(\cos\vartheta) \tag{3.50}$$

Zgodno je imati identitet:

$$\vartheta d(\cos\vartheta) = d(\vartheta\cos\vartheta) - \cos\vartheta d\vartheta = d[\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta] \tag{3.51}$$

Njega možemo supstituirati u (3.51) i integrirati po ϑ *od* $\pi/2$ *do* 0, čime obuhvaćamo doprinos potencijalu cijele površine kruga naboja točki na rubu tog kruga.

$$U\Big|_{rub} = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0}[\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta]_{\pi/2}^{0} = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0}[0-(-1)] = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0} \tag{3.52}$$

To možemo usporediti s vrijednosti potencijala u centru kruga:

$$U\Big|_{centar} = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \tag{3.53}$$

(Ovaj rezultat se dobije iz (3.40) kada z teži nuli)
Razumljivo potencijala pada idući od centra kruga prema van, jer je gustoća naboja po krugu stalna. Kada bi materijal po kojem je naboj nanesen bio vodič, naboj bi se prerasporedio tako da je vrijednost potencijala stalna po površini vodiča. Ovo ćemo pokazati kasnije.

Možemo još ustanoviti ponašanje potencijala kružne ploče naboja na osi simetrije za veliku vrijednost udaljenosti od kruga (to jest ponašanje (3.40) za velike vrijednosti od z) .

$$U(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2} - z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[(1+\frac{R^2}{z^2})^{1/2} - 1\right] \tag{3.54}$$

U aproksimaciji velikih z okrugla zagrada u posljednjem rezultatu (3.54) se aproksimira:

$$(1+R^2/z^2)^{1/2} \approx 1+R^2/2z^2 \qquad (3.55)$$

U toj aproksimaciji (3.54) se svodi na:

$$U(0,0,z)=\frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0 z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z} \qquad (3.56)$$

Gdje je q ukupni naboj na krugu. (3.56) je u suštini nama poznati monopolni potencijal. Dakle , daleko na osi simetrije kruga potencijal je isti kao da se sav naboj skupio u ishodište!

ELEKTROSTATSKI TLAK

Intuitivno je razumljivo da ako na zatvorenoj površini imamo raspoređen istoimeni naboj elementi raspodjele odbijaju jedan drugoga. Rezultantno polje i sila znamo da su kod vodiča okomiti na vodič. Tako jasno postoji sila po jedinici površine, što je mehanička definicija tlaka. Poći ćemo od najjednostavnijeg slučaja jednoliko nabijene kugle.
Naboj na kugli jest:

$$q=4\pi r^2\sigma \qquad (3.57)$$

Polje prema vani jest:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (3.58)$$

No to polje ne dolazi od beskonačno tankog sloja. To polje počinje u unutrašnjem dijelu sloja naboja s vrijednošću nula i raste linearno s debljinom sloja do iznosa (3.58). Tako je srednje vrijednost polja koje djeluje na naboj:

$$E_{srednje}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (3.59)$$

Diferencijal sile koja djeluje na diferencijal površine jest:

$$dF=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot(\sigma da) \qquad (3.60)$$

Tako je kvocijent diferencijala sile i diferencijala površine da (tlak) :

$$p=\frac{dF}{da}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \qquad (3.61)$$

Pritisak možemo izraziti i preko vrijednosti polja na vanjskoj površini kugle tako da u (3.61) umjesto površinske gustoće naboja uvrstimo vrijednost polja prema (3.58). Tako imamo alternativni izraz za tlak:

$$p=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \qquad (3.62)$$

GUSTOĆA ENERGIJE ELEKTRIČNOG POLJA:

Da bi se neko električno polje realiziralo, bilo je potrebno razmjestiti naboje koji to polje stvaraju. Za taj razmještaj je utrošen rad. Stoga egzistencija polja jest rezultata rada utrošenog na razmještaj naboja. Da bismo prepoznali koliko je rada utrošeno u realizaciju polja u nekom diferencijalu volumena ponovno možemo krenuti od modela kugle. Počnimo od kugle koja ima na sebi naboj. Elektrostatski tlak uperen okomito na površinu znamo proračunati prema (3.61), a površinsku gustoću možemo iz totalnog naboja q izračunati preko (3.57). Ako sada kuglu stanjimo za iznos ds, polje izvan toga dijela se ne će promijeniti. (Po Gaussovom teoremu na bilo kojem radijusu tok kroz odgovarajuću kuglu je u vanjskom dijelu polja nepromijenjen, jer se količina naboja nije promijenila.) Tako vidimo da polje nastaje samo u

volumenu iz kojeg smo povukli naboj. Drugim riječima rad izvršen za smanjenje kugle je rad koji je uložen u postojanje polja u prostoru određenom smanjenjem radijusa kugle.
Rastavimo kuglu u elemente površine Δa_i. Pomičemo ih prema unutrašnjosti za pomak ds. Prema (3.62)na svakom elementu površine možemo izračunati silu uz pomoć tlaka i površine. Kada to pomnožimo s putem ds dobivamo diferencijal rada :

$$dW = \sum \Delta a_i \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 ds = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV \tag{3.63}$$

Iz (3.63) je jasna gustoća energije električnog polja:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tag{3.64}$$

To je gustoća energije koja pomnožena s diferencijalom volumena dV daje rad utrošen da se u dV kreira polje E!

G A U SS O V T E O R E M I D I V E R G E N C I J A V E K T O R S K O G P O L J A

Neka je u prostoru zadano vektorsko polje: $\vec{F}(\vec{r})$. To znači da je u svakoj točki prostora s radijusvektorm $\vec{r}$ zadana vrijednost vektora $\vec{F}(\vec{r})$ koja pripada tom položaju. Električno polje je jedan takav primjer. Neka u prostoru postoji zatvorena ploha S. Tada se tokom polja kroz tu površinu naziva površinski integral slijedećeg oblika:

$$\Phi \equiv \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} \tag{4.1}$$

Gdje je $d\vec{a}$ vektor koji reprezentira diferencijal površine plohe S. (znači vektor iznosa da okomit na da i orijentiran prema van u odnosu na S). Ako nacrtamo površinu S i razdijelimo prostor unutar S na dva dijela površinom ΔS i označimo sa S_1 dio površine od S koji se nalazi s jedne strane plohe ΔS, a sa S_2 dio površine koji je s druge strane plohe razdjelnice, lako možemo zaključiti da vrijedi:

$$\int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_{S_1 + \Delta S} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} + \int_{S_2 + \Delta S} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} \tag{4.2}$$

Relacija (4.2) je posljedica činjenice da se integrali po graničnoj površini ΔS poništavaju. Naime površinski vektori koji su okomiti na elemente površine ΔS su orijentirani prema vanjskoj strani zatvorene površine, što je za integraciju prvog člana suprotno od integracije drugog člana. Sada možemo otići korak dalje i razdijeliti tijelo unutar površine S u mnogo dijelova. Suma površinskih integrala tokova polja po svim tim dijelovima tijela unutar S još bi uvijek bila jednaka toku kroz površinu S :

$$\Phi = \int_S \vec{F}(\vec{r}) d\vec{a} = \sum_i \int_{S_i} \vec{F} d\vec{a} = \sum_i \frac{\int_{S_i} \vec{F} d\vec{a}}{\Delta V_i} \Delta V_i \tag{4.3}$$

gdje je ΔV_i volumen tijela zatvorenom unutar zatvorene površine S_i.
Sada se definira vektorski operator divergencije na slijedeći način:

$$\lim \left| _{\Delta V_i \to 0} \frac{\int_{S_i} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{a}}{\Delta V_i} \right. \equiv div \vec{F}(r) \tag{4.4}$$

Tako u limesu izraza (4.3) kada volumeni dijelova tijela unutar S: ΔV_i postaju sve manji, dobivamo:

$$\Phi = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \int_V div\vec{F}(\vec{r}) \cdot dV \qquad (4.5)$$

Ovo je čuveni matematički Gaussov teorem. Tok vektorskog polja kroz zatvorenu površinu S, koji je integral skalarnog produkta vektora polja i diferencijala površine po zatvorenoj plohi S je jednak volumskom integralu divergencije tog polja po volumenu ograđenom zatvorenom površinom S . Student se u ovom trenutku ne mora uznemiriti činjenicom da nema mnogo operativnog znanja o proračunima površinskih i prostornih integrala. Oni se intuitivno najbolje razumiju kroz izraze za sume kao što su ona srednja u (4.3) za površinski integral i desna suma u (4.3) za prostorni integral. Primjere jednostavnijih površinskih integrala smo već proračunavali. Slično će biti i s prostornim integralima. Ovdje je bitno prihvatiti definiciju operatora divergencije vektorskog polja kao limes kvocijenta toka vektorskog polja oko malog volumena i iznosa tog malog volumena danom preko (4.4) . U nastavku ćemo pokazati kako se taj limes doista proračunava , a uslijedit će i intuitivna slika divergencije kao mjere koliko silnica vektorskog polja u danoj točki izvire iz te točke.

DIFERENCIJALNI OBLIK GAUSSOVOG ZAKONA

Iskoristit ćemo Gaussov teorem koji je matematički teorem (4.5) i Gaussov zakon, koji je fizikalni zakon pisan preko toka po zatvorenoj površini unutar koje je naboj (3.6).

$$\Phi = \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \int_V div\vec{E}(\vec{r}) \cdot dV \qquad (4.6)$$

Ponovimo značenja veličina u (4.6). S je zatvorena površina unutar koje je volumen V i u njemu razmješten naboj q . Sada za naboj unutar V možemo iskoristiti izraz:

$$\int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV = q \qquad (4.7)$$

Ta je relacija analogon izrazu za masu (kojeg smo upoznali u mehanici) koja se nalazi unutar volumena V a čija raspodjela gustoće je poznata . Definiciju gustoće naboja koja se nalazi u (4.7) smo upoznali u (2.30). Supstituiranjem izraza za ukupni naboj (4.7) u posljednju jednakost u nizu (4.6) imamo:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_V div\vec{E}(\vec{r}) dV \qquad (4.8)$$

Ovaj izraz ne zavisi o izboru volumena po kojem se integrira. U tom slučaju ne vrijedi samo jednakost integrala , nego postoji i jednakost podintegralnih funkcija. Dokaz za ovo je jednostavan. Prebacimo izraz na desnoj strani na lijevu:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV - \int_V div\vec{E}(\vec{r}) dV = 0 = \int_V \left[\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} - div\vec{E}(\vec{r}) \right] dV \qquad (4.9)$$

Ako bi podintegralna funkcija bila različita od nule u bilo kojem dijelu prostora, integriranje po tom dijelu ne bi moglo rezultirati nulom (izraz (4.9) vrijedi za proizvoljnu domenu integracije) . Naš je konani zaključak da su podintegralne funkcije u (4.8) jednake:

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad (4.10)$$

Jakost gustoće naboja u točki prostora proporcionalna je veličini divergencije polja. Kako je prema (4.4) divergencija električnog polja limes omjera toka polja oko točke s volumenom unutar površine po kojoj se tok integrira, vidimo da je divergencija električnog polja suštinski mjeri koliko snažno iz pojedine točke polje izvire (ili i nju ponire). Drugim riječima (4.10) izriče u diferencijalnom obliku isto što smo znali iz Gaussovog zakona. Uzrok polja su električni naboji. Divergencija polja, koja je mjera jakosti izvora polja, je proporcionalna gustoći naboja u promatranoj točki.

IZRAZ ZA DIVERGENCIJU POLJA U KARTEZIJEVOM SUSTAVU

Za ovaj izvod je pogodno imati skicu zatvorenog volumena oblika kvadra čije su plohe paralelne s ravninama definiranim koordinatnim osima (x-y,y-z,z-x). Te ravnine numeriramo kako slijedi. Stranicu paralelnu s x-z za manje y vrijednosti numeriramo kao (3), a onu za veće vrijednosti y kao (4). Stranicu paralelnu s y-z ravninom s manjim vrijednostima x numeriramo kao (1) a s većim vrijednostima x kao(2). Konačno stranicu paralelnu s x-y ravninom s manjim vrijednostima z numeriramo kao (5), a suprotnu kao (6). Time se integral toka vektorskog polja $\vec{F}(\vec{r})$ po cijeloj plohi (stranice (1)-(6)) svodi na šest plošnih integrala. Napisat ćemo prva dva integrala toka po stranicama (1) i (2). Ostali slijede cikličkim zamjenama:

$$\int_1 \vec{F}(\vec{r})d\vec{a} + \int \vec{F}(\vec{r})d\vec{a} = \int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{z_0}^{z_o+\Delta z}[\ \vec{F}(x_0,y,z)\cdot(-\hat{x}) + \vec{F}(x_0+\Delta x,y,z)\cdot\hat{x}\ ]dydz =$$

$$= \int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{z_0}^{z_o+\Delta z}[\ F_x(x_0+\Delta x,y,z) - F_x(x_0,y,z)\ ]dydz \approx$$

$$\approx \frac{\partial F_x(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cdot\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (4.11)$$

U približnoj jednakosti (4.11), koja vrijedi to bolje što su intervali $\Delta x, \Delta y\, i\, \Delta z$ manji iskoristili smo definiciju parcijalne derivacije kao limesa omjera prirasta funkcijske vrijednosti i prirasta varijable za izabranu varijablu i male varijacije polja $\vec{F}(\vec{r})$ unutar domene $\Delta x - \Delta y$. Popuno analognim postupkom bismo za zbroj tokova kroz (3) i (4) dobili

$$\int_3 \vec{F}(\vec{r})d\vec{a} + \int_4 \vec{F}(\vec{r})d\vec{a} \approx \frac{\partial F_y(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z = \qquad (4.12)$$

Konačno bi za sumu tokova kroz (5) i (6) imali:

$$\int_5 \vec{F}(\vec{r})d\vec{a} + \int_6 \vec{F}(\vec{r})d\vec{a} \approx \frac{\partial F_z(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z = \qquad (4.13)$$

Tako bismo za ukupni tok oko volumena:

$$\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z \qquad (4.14)$$

Imali sumu (4.11),(4.13) i (4.14) znači:

$$\int_{po\ plohi oko\ \Delta V} \vec{F}(\vec{r})d\vec{a} \approx (\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z})\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (4.15)$$

Ako (4.15) podijelimo s volumenom ΔV (4.14), tada će u limesu kada $\Delta V \to 0$ tako dobivena lijeva strana prema (4.4) težiti prema lokalnoj vrijednosti divergencije polja, a znak približnosti u (4.15) prerasta u znak jednakosti. Tako konačnom imamo eksplicitni izraz za divergenciju polja:

$$div\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{F_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial F_z(\vec{r})}{\partial z} \qquad (4.15)$$

Formalno se ovaj izraz može pisati i preko nama već poznatog operatora ∇ :

$$div\vec{F}(\vec{r}) = (\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\hat{x}F_x + \hat{y}F_y + \hat{z}F_z) = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) \qquad (4.16)$$

Izrazi (4.15) i (4.16) su nam operativni postupci za proračun divergencije svakog vektorskog polja. To se jasno primjenjuje i na električno polje $\vec{E}(\vec{r})$.

ELEMENTARNA DISKUSIJA ZNAČENJA I PRIMJENE DIVERGENCIJE:

Zamislimo u električnom polju bilo koji mali volumski element ΔV. Načinimo oko njega Gaussovu plohu i izračunajmo tok kroz tu plohu. Neka je unutar plohe gustoća naboja pozitivna, tada iz tog volumskog elementa polje na površini elementa ima izlazni smjer i tok je pozitivan, a prema Gaussovom zakonu taj je tok jednak zatvorenom naboju podijeljenom s ε_0. Znači što je više pozitivnog naboja zatvoreno u volumskom elementu, veći je i tok. U limesu kada volumski element teži prema nuli, ovaj tok podijeljen s ΔV postaje divergencijom polja, a ona je proporcionalna gustoći naboja. Očito divergencija električnog polja mjeri lokalnu gustoću naboja a preko Gaussove plohe i veze integrala divergencije s tokom električnog polja mjeri i snagu toka tog polja kroz plohu oko ΔV. Što je veća gustoća naboja, jači je tok izlaska polja iz plohe. Neki eksperti normiraju jakost polja brojem silnica u jedinici volumena. Naime, ako u dijelu prostora nema naboja, nema ni toka električnog polja kroz plohu oko tog prostora. To se izriče kao konstantnost broja silnica u tom dijelu prostora. U svakom slučaju, sa silnicama ili bez njih, što je više pozitivnog naboja u prostoru veći je tok električnog polja iz tog prostora. Ista diskusija samo sa suprotnim predznakom vrijedi i za prostor napunjen negativnim nabojem. Sada električno polje na Gaussovoj plohi oko negativnog naboja ima smjer suprotan vektoru koji reprezentira elemente površine. Tako je tok negativan. Što je više negativnog naboja unutar površine, to će negativniji biti tok. U limesu omjer toka i ΔV postaje divergencija. Tako možemo slikovito vrlo intuitivno reći da divergencija električnog polja mjeri snagu izvora polja (za pozitivni lokalni naboj) odnosno ponora polja za (negativni lokalni naboj). Na ovom mjestu možemo još jednom podsjetiti na veze električnog polja i rasporeda gustoće naboja. Prema (4.10) vrijedi:

$$\varepsilon_0 \cdot div\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

a električno polje je dano s (2.29):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV'$$

Primjer proračuna veze raspodjele naboja i polja u oba smjera za polje jednoliko nabijene kugle:

Polazimo od kugle polumjera R i naboja Q.
Prema Gaussovom zakonu vrijedi:

$$\int_S \vec{E} d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (4.17)$$

Gustoća homogene raspodjele naboja povezana je sa zadanim veličinama :

$$Q = \frac{4R^3\pi}{3}\rho \qquad (4.18)$$

Izvan kugle je polje moguće izračunati kako smo i prije činili Gaussovim zakonom:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (3.11)$$

Unutar kugle na nekom radijusu r , naboja sada ima manje. Ako tu količinu označimo s Q' , tada je

$$\int_{S'} \vec{E}d\vec{a} = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \tag{4.19}$$

Za taj naboj vrijedi:

$$Q' = \frac{4r^3\pi}{3}\rho \tag{4.20}$$

Tako unutar homogeno nabijene kugle na radijusu r imamo po Gaussovom teoremu:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3}{3\varepsilon_0}\rho \tag{4.21}$$

Znači da unutar kugle naboja polje raste kao:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \tag{4.22}$$

Sada možemo pristupiti obratnom proračunu korištenjem (4.10) za nalaženje gustoće raspodjele naboja. Potražimo divergenciju električnog polja u području gdje nema naboja:

$$\rho = \varepsilon_0 div(\frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}) = \frac{Q}{4\pi} div(\frac{\vec{r}}{r^3}) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] + ciklički \ za \ varijable \ y \ i \ z \right\} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{1}{r^3} + x(\frac{-3x}{r^5}) + \frac{1}{r^3} + y(\frac{-3y}{r^5}) + \frac{1}{r^3}(z\frac{-3z}{r^5}) \right\} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left\{\frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}\right\} = 0 \tag{4.23}$$

što je ispravan rezultat jer izvan kugle nema naboja. Ako pak potražimo gustoću naboja koja odgovara polju unutar kugle imamo prema (4.10) i (4.22):

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 div(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}) = \frac{\rho}{3}(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}) = \rho \tag{4.24}$$

Tako smo odredili polje unutar homogeno nabijene kugle i ujedno vidjeli primjenu izraza za divergenciju kada tražimo gustoću naboja uz poznati izraz za električno polje.

DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA ZA VEZU POTENCIJALA I GUSTOĆE NABOJA

Već smo pokazali jednadžbe:

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{4.10}$$

i:

$$\vec{E} = -\nabla U \tag{3.19}$$

Supstituiranjem (3.19) u (4.10) imamo:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}U) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{4.25}$$

Ovdje smo vektorski diferencijalni operator napisali nabla $(\vec{\nabla})$ sa strjelicom iznad njega da podsjetimo na njegov vektorski karakter. Kako je U skalarna veličina , to se najprije smiju pomnožiti operatori nabla a rezultat primijeniti na U:

Tako slijedi diferencijalna jednadžba za direktnu vezu potencijala i gustoće:

$$(\vec{\nabla})^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.26}$$

Što u potankostima znači gornja jednadžba možemo vidjeti polazeći od (3.19) i pišući detalje:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -(\hat{x}\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}) \tag{4.27}$$

Uvrštenjem ovako napisanog električnog polja u (4.10) dobivamo:

$$div(\hat{x}\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{4.28}$$

Primjenom pravila za upotrebu operatora divergencije (4.15) , koje kaže da se x komponenta polja treba derivirati po x, tome dodati rezultat deriviranja y komponente polja po y i konačno dodati rezultat deriviranja z komponente istog polja po z, dobivamo iz (4.28)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.29}$$

Opažamo da dvije ekvivalentne jednadžbe (4.26) i (4.29) prelaze jedna u drugu korištenjem formalno jednostavnog postupka:

$$(\vec{\nabla})^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.30}$$

Operator (4.30) se naziva i Laplaceovim operatorom: Δ . Formalno rješenje jednadžbe (4.29) već znamo, to je izraz:

$$U(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \tag{3.20}$$

LAPLACEOVA JEDNADŽBA

Ako u (4.29) u razmatranom dijelu prostora nema naboja , u tom dijelu prostora vrijedi :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{4.31}$$

To je čuvena Laplaceova jednadžba. Često se fizikalni problem svodi na određivanje potencijala u prostoru kada je na nekoj površini zadana raspodjela naboja. Ovdje ćemo upoznati neka svojstva rješenja $\varphi(\vec{r})$ koja zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu simbolički napisanu:

$$(\vec{\nabla})^2 \varphi(\vec{r}) = 0 \tag{4.32}$$

Ako je $\varphi(\vec{r})$ rješenje jednadžbe (4.32) , tada je srednja vrijednost $\varphi(\vec{r})$ na površini bilo koje kugle jednaka vrijednosti te funkcije u središtu iste kugle. Mi ovo svojstvo možemo pokazati na slučaju električnog potencijala (u prostoru bez naboja). Uzmimo sferu koja je nalazi izvan položaja naboja q koji je izvor potencijala. Neka je po kugli površine S uniformno naseljen naboj q'. Rad potreban da se taj naboj q' dovede iz beskonačnosti na S je q' pomnožen sa srednjom vrijednošću potencijala koji potiče od q na površini S (po definiciji srednje vrijednosti). Istovremeno smo istu konfiguraciju mogli stvoriti tako da je q' već naseljen na kugli a da iz beskonačnosti dovodimo naboj q'. Taj pak rad znamo da je jednak q pomnoženom sa vrijednošću potencijala koji q pravi u središtu kugle.

NEMOGUĆNOST STABILNOG RAZMJEŠTAJA NABOJA U PROSTORU POD UTJECAJEM SAMO ELEKTROSTATSKIH SILA

Zamislimo da imamo električno polje koje pozitivni naboj q uravnotežuje u nekoj točki prostora. To bi značilo da proizvoljni mali pomak pozitivnog naboja nailazi na otpor sile koja ga vraća u stabilnu poziciju. To znači da u maloj sferi oko te pozicije postoji ponor silnica (koje vraćaju naboj u stabilni položaj). No to je prema Gaussovom zakonu nemoguće, jer tok polja na toj poziciji mora biti pozitivan (na toj je poziciji samo pozitivi naboj). Slični zaključak slijedi i iz teorema o srednjoj vrijednosti. Da bi konfiguracija bila stabilna, potencijal mora imati ekstremnu vrijednost. O teoremu o srednjoj vrijednosti, vrijednost potencijala je istovremeno i srednja vrijednost potencijala po kugli oko točke, što je ponovno nemoguće.

RAZLIKA GAUSSOVOG ZAKONA I GAUSSOVOG TEOREMA

To je razlika fizike i matematike. Gaussov zakon izriče fizikalnu činjenicu da je tok električnog polja po zatvorenoj površini proporcionalan zatvorenom naboju. Gaussov teorem , za svako vektorsko polje , povezuje tok vektorskog polja po zatvorenoj površini s volumskim integralom divergencije tog polja po prostoru zatvorenom tom površinom.

STOKESOV TEOREM ZA ROTACIJU VEKTORSKOG POLJA

Za konzervativne sile je poznato da krivuljni integral njihovog rada po zatvorenom putu iznosi nula. Kako je električno polje istih svojstva to je

$$\int_C \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}d\vec{s} = 0 \qquad (5.1)$$

gdje je C oznaka za zatvorenu (closed) krivulju. Kao i u prijašnjem odsječku razmatrat ćemo najprije opće vektorsko polje $\vec{F}(\vec{r})$, koje ne mora nužno imati svojstvo (5.1) . Slijedit ćemo proceduru koja je analogon postupka izvoda Gaussovog teorema samo ovdje imamo posla s krivuljnim integralima. Zatvorenu krivulju C presijecimo proizvoljno izabranom krivuljom ΔC, koja spaja dvije različite točke krivulje C. Tada možemo ukupni integral skalarnog produkta vrijednosti polja i vektora diferencijala pomaka po zatvorenoj konturi C razdvojiti u dva integrala po zatvorenim krivuljama. Jedan po C_1 jednom dijelu krivulje C i ΔC presječnoj krivulji i drugi po $C_{''}$ preostalom dijelu krivulje C i ΔC presječnoj krivulji ali u tom slučaju idući suprotnim smjerom pri putu po poresječnoj krivulji. Vrijedi dakle identitet:

$$\int_C \vec{F}d\vec{s} = \int_{C_1+\Delta C} \vec{F}d\vec{s} + \int_{C_2+\Delta C} \vec{F}d\vec{s} \qquad (5.2)$$

Gornji identitet vrijedi jer u pojedinoj točki vrijednost polja $\vec{F}(\vec{r})$ na presječnoj krivulji je ista za obadva smjera integriranja, ali su pomaci suprotni vektori tako da se u (5.2) doprinosi od integriranja po ΔC poništavaju. Nakon što smo ustanovili da se općenito krivuljni integral polja po zatvorenoj krivulji C može razbiti u dva integrala po zatvorenim krivuljama uvođenjem presječne krivulje ΔC i integrirajući po dijelovima $C_1 + \Delta C \; i \; C_2 + \Delta C$, to taj postupak možemo proširiti uvođenjem dodatnih presječnih krivulja unutar bilo koje zatvorene putanje. Pri tome će se integrali po presječnim krivuljama uvijek poništavati radi suprotnih predznaka vektora pomaka. Znači da vrijedi:¸

$$\int_C \vec{F}d\vec{s} = \sum_i \int_{C'_i} \vec{F}d\vec{s} \qquad (5.3)$$

Gdje je C'_i zatvorena krivulja dobivena usitnjavanjem ukupne konture C u manje zatvorene krivulje postupkom čiju osnovnu ideju smo vidjeli pri izvodu (5.2). Možemo sada član sume u (5.3) podijeliti s površinom Δa_i koja se nalazi unutar zatvorene krivulje C'_i. Tako dobiveni omjer jest u limesu kada krivulja postaje sve manja (i njena površina suglasno tome) definicija vektorske komponente rotacije vektorskog polja $\vec{F}(\vec{r})$ koja komponenta je okomita na površinu Δa_i. Matematički pisano definicija komponente vektora rotacije polja okomita na površinu Δa_i jest:

$$\hat{n}\cdot rot\vec{F}(\vec{r}) = \lim \left| {}_{\Delta a_i \to 0} \frac{\int_{C'_i} \vec{F} ds}{\Delta a_i} \right. \qquad (5.4)$$

Tako smo dobili definiciju jedne komponente vektora rotacije (često nazvanog i rotora). Jasno izborom triju ortogonalnih površina dobivamo sve tri komponente vektora rotacije. No vratimo se na (5.3) gdje proširivanjem i-tog sumanda s upravo izrazom za rotaciju imamo:

$$\int_C \vec{F} d\vec{s} = \sum_i \int_{C'_i} \vec{F} d\vec{s} = \sum_i \frac{\int_{C'_i} \vec{F} d\vec{s}}{\Delta a_i} \Delta a_i \Rightarrow \int_{površinaunutarC} rot\vec{F}(\vec{r}) d\vec{a} \qquad (5.5)$$

Time smo došli do vrlo važnog matematičkog teorema nazvanog Stokesovim teoremom:

$$\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_{površinaunutarC} rot\vec{F}(\vec{r}) d\vec{a} \qquad (5.6)$$

Odmah ovo možemo primijeniti na slučaj elektrostatskog polja $\vec{E}(\vec{r})$. S jedne strane je integral skalarnog produkta električnog polja i pomaka jednak nuli za svaku zatvorenu krivulju. S druge strane je taj krivuljni integral jednak površinskom integralu rotora električnog polja po površini zatvorenoj tom krivuljom. To naravno vrijedi za svaku zatvorenu krivulju.

$$\int_C \vec{E} d\vec{s} = 0 = \int_{površinizatvorenojs\,S} rot\vec{F} d\vec{a} \qquad (5.7)$$

Kako je površina integracije proizvoljna, to podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli:

$$rot\vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad (5.8)$$

Električno polje je irotacionalno, to jest njegov rotor u svakoj točki polja iščezava.
I ovdje vrijedi napomena iz prethodnog teorema. Student treba intuitivno prihvatiti definiciju rotacije-rotora vektorskog polja (5.4) a u slijedećem dijelu ćemo vidjeti kako se vrijednost tog vektora može izračunati ako imamo njegove Kartezijeve koordinate.

ROTACIJA VEKTORSKOG POLJA U KARTEZIJEVIM KOORDINATAMA

U (5.4) smo definirali komponentu vektora rotacije u smjeru koji je okomit na površinu oko koje se proračunava krivuljni integral skalarnog produkta polja i pomaka (podijeljen s površinom zatvorenom ophodnom krivuljom). Pokazat ćemo rezultat proračuna komponente rotacije vektorskog polja koja je u smjeru osi z . Prema (5.4) smjer normale je smjer jediničnog vektora $\hat{z}$. Vektor površine koji je također usmjeren duž osi z jest:

$$\Delta\vec{a} = \hat{z}\Delta x \Delta y \qquad (5.9)$$

Sukladno (5.4)

$$\hat{z}\cdot rot\vec{F}(\vec{r})=(rot\vec{F}(\vec{r}))_z=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\int\limits_{oko\ \Delta a}\vec{F}d\vec{s}}{\Delta a} \qquad (5.10)$$

Površinu Δa ćemo izabrati kao pravokutnik paralelan x-y ravnini. Početna točka pravokutnika je: (x_0, y_0, z_0). Zatim slijedi točka $(x_0+\Delta x, y_0, z_0)$ pa točka $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0)$ i točka $(x_0, y_0+\Delta y, z_0)$. Krivuljni integral ide po dužinama koje spajaju ove četiri točke.

$$\int\limits_{oko\ \Delta a}\vec{F}d\vec{s}=\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\vec{F}(x,y_{0,}z_0)\hat{x}dx+\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\vec{F}(x_0+\Delta x,y,z_0)\hat{y}dy-\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\vec{F}(x,y_0+\Delta y)\hat{x}dx-\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\vec{F}(x_0,y,z_0)\hat{y}dy=$$

$$\int\limits_{oko\ \Delta a}\vec{F}d\vec{s}=\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}F_x(x,y_{0,}z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}F_y(x_0+\Delta x,y,z_0)dy-\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}F_x(x,y_0+\Delta y)dx-\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}F_y(x_0,y,z_0)dy=$$

$$\int\limits_{oko\ \Delta a}\vec{F}d\vec{s}=\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}F_x(x,y_{0,}z_0)dx-\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}F_x(x,y_0+\Delta y)dx+\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}F_y(x_0+\Delta x,y,z_0)dy-\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}F_y(x_0,y,z_0)dy=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x\ +\Delta x}(-\frac{\partial F_x}{\partial y})\Delta y dx+\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x dy=\Delta y(-\frac{\partial F_x}{\partial y})\Delta x+\Delta x\frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta y=$$

$$=\Delta x\Delta y(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}) \qquad (5.11)$$

Ako (5.11) podijelimo s površinom koju smo obilazili: $\Delta x\Delta y$, tada iz (5.11) dobivamo z komponentu rotacije polja $\vec{F}(\vec{r})$:

$$(rot\vec{F}(\vec{r}))_z=(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}) \qquad (5.12)$$

Sada možemo istu proceduru primijeniti i na ostale komponente vektora rotacije. No kako su Kartezijeve koordinate potpuno ravnopravne, to se iz (5.12) može dobiti ispravne izraze za ostale komponente jednostavnim cikličkim zamjenama simbola:

$$(rot\vec{F}(\vec{r}))_x=(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}) \qquad (5.13)$$

$$(rot\vec{F}(\vec{r}))_y=(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}) \qquad (5.14)$$

Prema pravilima o determinanti trećeg reda možemo provjeriti da se tri relacije (5.12) do (5.14) mogu kompaktno napisati kao vektor:

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \qquad (5.15)$$

Ili također:

$$rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F} \qquad (5.16)$$

PRIMJERI ZA VJEŽBANJE RAČUNANJA ROTACIJE

Polje brzina točke krutog tijela koje rotira oko z osi:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r} \quad i \quad \vec{\omega}=\hat{z}\omega \qquad \vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=\hat{x}(-\omega y)+\hat{y}(\omega x) \qquad (5.17)$$

$$rot\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=\hat{x}(-\frac{\partial(\omega x)}{\partial z})+\hat{y}(\frac{\partial \omega y}{\partial z})+\hat{z}(\omega-(-\omega))=\hat{z}2\omega \qquad (5.18)$$

Polje brzina za slučaj da brzine rotiranja oko osi z opadaju linearno s udaljenošću od osi z.

$$\vec{v}=(\vec{\omega}\times\vec{\rho})/\rho^2 \qquad (5.19)$$

$$rot(\frac{\vec{\omega}\times\vec{\rho})}{\rho^2}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\frac{\omega y}{\rho^2} & \frac{\omega x}{\rho^2} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\hat{x}\left[-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\omega x}{\rho^2})\right]+\hat{y}\left[-\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{\omega y}{\rho^2})\right]+\hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\omega x}{\rho^2})-\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\omega y}{\rho^2})\right]=$$

$$\hat{z}\omega(\frac{1}{\rho^2}-\frac{2x^2}{\rho^4}+\frac{1}{\rho^2}-\frac{2y^2}{\rho^4})=0 \qquad (5.20)$$

Ovaj primjer je edukativan za intuiciju i fizikalno. Rezultat da je rotacija gornjeg polja jednaka nuli mogli smo anticipirati. U njemu tangencijalno polje pada obrnuto proporcionalno s radijusom, a opseg kruga po kojem integriramo raste s linearno s radijusom. Tako integral skalarnog produkta pri varijaciji radijusa ostaje stalan! To povlači iščezavanje rotacije. (Njen površinski integral po prstenu između koncentričnih kružnica raznih radijusa je odgovoran za promjenu linijskog integrala cirkulacije polja. S druge strane, fizikalno svojstvo irotacionalnosti je bitno kod superfluida i supravodiča.

Rotacija vektorskog polja koje je gradijent skalarnog polja je nula.
Ovo student može sam provjeriti pišući eksplicitno izraze za gradijent i rotaciju. Mi ćemo to pokazati kompaktnijim postupkom .

$$\int_C gradU(\vec{r})\cdot d\vec{s}=0 \ \ (jer\ je\ gradUd\vec{s}=dU; C\ zatvorena\ krivulja=\int_{unutar C} rot(gradU)d\vec{a} \qquad (5.21)$$

Kako rezultat (5.21) ne zavisi o izboru krivulje, odnosno plohe unutar te krivulje, već smo vidjeli da to povlači iščezavanje podintegralne funkcije to jest:

$$rot(gradU)=0 \qquad (5.22)$$

Primjer kvadrupolnog polja

Student može sam provjeriti iz eksplicitnog izraza (3.26) za oblik kvadrupolnog polja da je rotacija kvadrupolnog polja jednaka nuli . S druge strane smo u (3.30) pokazali eksplicitni izraz za potencijal električnog kvadrupolnog polja. Svako vektorsko polje za koje postoji skalarni potencijal, čiji je to polje gradijent prema (5.22) ima svoju rotaciju jednaku nuli prema (5.22). Znači, rotor kvadrupolnog električnog polja iščezava!

ELEKTRIČNA POLJA UNUTAR I OKO RAZNIH MATERIJALA

Nevodiljivi materijali dopuštaju vanjskom električnom polju da ima svoj nastavak unutar materijala. U njima se unutrašnji dipoli mogu orijentirati i smanjiti polje unutar materijala. To ćemo posebno studirati kao fenomen polarizacije kasnije. No električno polje unutar njih ne iščezava ako postoji vanjsko električno polje.

Na površini vodiča i u njihovoj unutrašnjosti vanjsko električno polje nema nastavka; ono iščezava. Razlog je očit. Vodič se ne opire premještanju naboja. Ako unutar vodiča na trenutak uspostavimo polje, naboji će se prerazmjestiti dok to polje ne nestane. Ovo ćemo demonstrirati pokusom u kojem najprije izolirane metalne prstene dovedemo u kontakt vodičem preko njih. Taj sustav izložimo vanjskom polju. Versorij će nam pokazati da unutar sustava prstenova nema polja. Ako sada uklonimo vodič, vrsorij još uvijek ne će registrirati polje. Međutim , ako uklonimo vanjsko električno polje, versorij će registrirati polje koje postoji kao rezultat prerazmještaja naboja. (Pozitivni naboji su po vodiču otišli na prsten dalje od izvora polja, a negativni na prsten bliže izvoru polja.

Električno polje u prostoru neposredno uz vodič je:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (5.23)$$

Ovo lako dokazujemo Gaussovim zakonom na način kojim smo računali električno polje beskonačne ravnine homogeno raspodijeljenih naboja. Razlika u rezultatu za faktor dva potječe od činjenice da pri formiranju Gaussovih ploha toka kroz plohu u unutrašnjosti vodiča nema pa je tok od naboja na površini sav izbačen van vodiča. Nadalje, kako je površina vodiča ekvipotencijalna ploha, to je električno polje na nju okomito, kako smo općenito pokazali za odnos ekvipotencijala i silnica. To je porijeklo indeksa n u (5.23). U unutrašnjosti šupljih vodiča nema polja također, što dokazujemo Gaussovim zakonom. Moramo međutim voditi računa o činjenici da ovo vrijedi tako dugo, dok u unutrašnjost vodiča nismo izvana unijeli naboj.

NA ŠILJCIMA NABIJENIH VODIČA FORMIRAJU SE SNAŽNA POLJA

Za intuitivno razumijevanje ovog fenomena razmotrimo sustav dviju kugli načinjenih od vodiča spojenih vodljivom žicom i nabijenih nabojem. Jasno je da je potencijal po cijelom sustavu isti. Stoga za naboje Q i q na velikoj i maloj kugli vrijedi:

$$Q/R = q/r \qquad (5.24)$$

gdje su R i r radijusi velike i male kugle. Ako s Σ *i* σ označimo gustoće naboja na velikoj i malo kugli, tada se preko izraza za površinu kugle (kojim moramo podijeliti naboj da dobijemo površinsku gustoću) dobiva

$$\Sigma = Q/(4\pi R^2) \quad \sigma = q/(4\pi r^2) \qquad (5.25)$$

Uvrštenjem (5.24) u (5.25) dobivamo:

$$\sigma/\Sigma = R/r$$

gustoće naboja su obrnuto proporcionalne radijusima kugala. To se generalizira na odnos gustoća naboja i radijusa zakrivljenosti vodiča. Iz toga se vidi da su polja, koja su proporcionalna gustoći naboja prema (5.23), snažna upravo na šiljcima. Ovo demonstriramo vrtuljkom koji je metalna šipka sa šiljcima koji su okomiti na šipku. Kada taj vrtuljak nabijemo nabojem on se počinje vrtjeti, jer snažno polje uzrokuje pokretanje naboja materijala. Takvi šiljci kontroliraju stalnu vrijednost napona na nekim visokonaponskim točkama. Kada potencijal prijeđe kritičnu vrijednost, iz šiljka se suvišni naboj odbacuje analognim postupkom.

ILUSTRACIJA POSTUPKA DOKAZIVANJA JEDINSTVENOSTI RJEŠENJA LAPACEOVE JEDNADŽBE ZA ZADANE RUBNE UVJETE

Neka imamo zatvorenu vodljivu šupljinu koja je uzemljena. Neka su unutra smješteni naboji Q_i na plohama istoimenim plohama. U prostoru šupljine bez naboja potencijal zadovoljava Laplaceovu jednadžbu s rubnim uvjetima danim naseljenošću naboja na površinama. Pretpostavimo da imamo dva rješenja Laplaceove jednadžbe koja nisu identična, no naravno moraju koincidirati na rubnim plohama:

$$U(\vec{r}_k) = V(\vec{r}_k) \tag{5.26}$$

Tada je i

$$W=U-V \tag{5.27}$$

jednak nuli ne samo na površini k nego i u cijelom prostoru. Ako nije jednak nuli u cijelom prostoru, on u njemu mora imati ili minimalnu ili maksimalnu vrijednost. To pak nije u suglasju s teoremom o srednjoj vrijednosti. Stoga je W=0 po cijelom prostoru; dva su rješenja identična.

POTENCIJAL UNUTAR ŠUPLJEG VODIČA

Već smo ilustrirali da u unutrašnjosti šupljeg vodiča nema polja. Možemo dokazati da je u njegovoj unutrašnjosti potencijal konstantan i jednak onom na površini. Naime potencijal je konstantan i iznosi U_0 na površini vodiča. Ta se vrijednost nastavlja i u unutrašnjost. To je očito jer stalna vrijednost zadovoljava Laplaceovu jednadžbu i rubni uvjet na površini i prema gornjem teoremu je jedinstveno rješenje.

FARADAYEV KAVEZ

Na gornjem zaključku se zasniva Faradayev kavez. Naime unutar vodljive šupljine nema električnog polja koje bi bilo izazvano vanjskim poljem. Metalna šupljina štiti unutrašnjost od vanjskih električnih polja. To je temelj zaštite od električnih polja . isto može biti problem i s primanjem električnih signala u unutrašnjost metalnih površina. Naime statičko polje ne prodire u Faradeyev kavez. Na brze promjene polja moguće je ipak da se naboj koji se po vodiču pomiče ne stigne pomaknuti da polje poništi.

VAN DE GRAAFOV GENERATOR

Neka imamo zatvorenu vodljivu sferu i na njoj na primjer pozitivni naboj. Dok u unutrašnjost ne unesemo naboj, u njoj nema polja. Ako međutim u unutrašnjost unesemo pozitivni naboj, on stvara polje koje tjera naboje prema površini vodiča, ma kako taj naboj bio mali, a naboji na površini veliki. Na tom se principu temelji Van de Graafov akcelerator. Temelji se na velikoj metalnoj kugli u čiju untrašnjost se mehanički strojem koji pokreće izolatorsku traku na koju je smješten naboj. Traka unosi naboj u unutrašnjost kugle , a četkice koje stružu po izolatoru omogućuju naboju da niz polje, koje stvara prisutnost drugih naboja trake, prijeđu na vodljivu sferu i time joj dižu potencijal. Tipični su terminalski naponi u sedamdesetim godinama bili 6 mega elektronvolta. To je razdoblje kada su Van de Graaf generatori bili u širokoj upotrebi u istraživačkim laboratorijima radi induciranja nuklearnih reakcija na atomskim jezgrama. Studentima će se demonstrirati rad generatora. Van de Graaf generator je prva sprava pri kontaktu s kojom život može biti u opasnosti; eksperimentator treba biti na dobro izoliranoj podlozi za slučaj kontakta s visokim naponom. Naime štetne posljedice izaziva gibanje naboja kroz ljudsko tijelo mjereno strujom. Kapacitet ljudskog tijela je mali tako da za velike napone, ne će pri kontaktu poteći velika struja, ali ako tijelo nije izolirano, struje može biti velika i smrtonosna, naročito, ako prelazi preko srca.

ELEKTRIČNI POTENCIJALI I POLJA ZA DVIJE KONCENTRIČNO SMJEŠTENE VODLJIVE KUGLE

Radijus manje kugle je r_1 *i naboj* Q_1.Unutrašnji radijus druge kugle je r_2 *vanjski* r_3 *naboj* Q_2.
U untrašnjosti manje kugle nema polja jer nema naboja. Između kugala polje potječe samo od naboja manje kugle. Unutar sloja vodiča veće kugle nema polja. Izvan veće kugle polje potječe od naboja obadvije kugle. Tako imamo redom:

$$r < r_1 \qquad \vec{E} = 0 \tag{5.28}$$

$$r_1 < r < r_2 \qquad \vec{E} = \frac{Q_1 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{5.29}$$

$$r_2 < r < r_3 \qquad \vec{E} = 0 \tag{5.30}$$

$$r_3 < r \qquad \vec{E} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \tag{5.31}$$

Kod rekonstrukcije potencijala vodimo računa da se potencijali zbrajaju. Polazeći izvana uz znanje izraza za potencijal kugle imamo:

$$r > r_3 \qquad U = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{5.32}$$

$$r_3 > r > r_2 \qquad U = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3} \tag{5.33}$$

$$r_2 > r > r_1 \qquad U = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \tag{5.34}$$

Ako studentu (5.34) nije očit treba poći od (5.33) i dodati rad koji se od radijusa r_2 do radijusa r vrši za jedinični naboj protiv polja (5.29). Taj rad su dva posljednja člana u (5.34).

$$r > r_1 \qquad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{Q_1 + Q_2}{r_3} + \frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_1}{r_2}\right) \tag{5.35}$$

Izrazi se pojednostavljuju ako vanjska kugla ima zanemarivu debljinu, to jest ako je $r_2 = r_3$.

KAPACITORI

Kapacitori su uređaji koji služe za efikasno uskladištenje naboja. Nastoji se uskladištiti što veća količina naboja uz što manju razliku potencijala među dijelovima. Možemo početi s gornjim primjerom pri čemu nam je $r_3 = r_2$ *a* $Q_2 = Q_1 = Q$
Tada je razlika potencijala

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) \equiv \frac{Q}{C} \qquad (5.36)$$

Gdje je (5.36) definicijska jednadžba za kapacitet C. Drugim riječima:

$$Q = CU \qquad (5.37)$$

Što je veći kapacitet to za isti potencijal (napon) u uređaj stane više naboja. Iz (5.36) vidimo da u limesu kada radijus veće kugle ide u beskonačnost, preostaje kapacitet manje kugle kao:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r_1 \qquad (5.38)$$

ENERGIJA USKLADIŠTENA U KAPACITORU

Rad potreban da se naboj dQ prebaci s jednog dijela kapacitora na drugikada je među njima potencijalna razlika U jest:

$$dW = UdQ = \frac{Q}{C}dQ = \frac{1}{C}d(\frac{1}{2}Q^2) \qquad (5.39)$$

Tako je očito energija spremljena u kapacitor:

$$Energija = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 \qquad (5.40)$$

PLANPARALELNI KAPACITOR

Ako na jednu ploču kapacitora nanesemo naboj gustoće $+\sigma\ a\ na\ drugu\ -\sigma$, ia ako su te ploče paralelne , prema razmatranjima (3.12-(3.14) lako zaključujemo da je polje između ploča (isključujući rubne efekte) :

$$E = \sigma / \varepsilon_0 \qquad (5.41)$$

Razlika potencijala među pločama, rad da se jedinični naboj među njima prenese je:

$$U = E \cdot d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} \qquad (5.42)$$

Ovdje je Q naboj nanesen na pojedinu ploču, S je njena površina. Odavdje proističe da je kapacitet pločastog kapacitora (kondenzatora) :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (5.42)$$

Može se pokazati da ovaj izraz vrijedi približno i općenitije za sve situacije u kojima razmak među plohama ostaje konstantan.

Važno za upamtiti: micanje naboja unutar polja mijenja razliku potencijala kapacitora. Ovo lako razumijemo. Zamislimo da smo usred polja stvorili par naboja , za što nam ako nemaju mase ne treba energija. Kako naboji , pod djelovanjem polja, putuju svaki prema svojoj ploči, vrši se rad. Kao rezultat ,past će razlika potencijala među pločama, što je vidljivo i iz činjenice da će se neutralizacijom stvorenog naboja , naboj na pločama smanjiti. Ovo razmatranje direktno se primjenjuje pri radu detektora ionizacije izazvane zračenjem. Ako je ploča povezena vodičem s osciloskopom, gibanje naboja se vidi na osciloskopu kao puls. Detekcijska elektronika taj signal dalje obrađuje. To možemo i matematički pratiti.
Ako je razlika potencijala na pločama U, tada je rad dobiven dolaskom naboja q na ploču naboja Q:

$$dEnergije = qU = d(\frac{1}{2}CU^2) = CUdU \qquad (5.43)$$

Simbol za kapacitor je slijedeći : $-\vert \quad \vert-$. Uz okomite linije može se dodati i polaritet pojedine ploče. Jedinica za kapacitet je Farad. Iz (5.36) možemo naći i jednu od mogućih veza s ostalim jedinicama SI sustava:

$$Farad = \frac{Kulon^2}{Džul} = \frac{Kulon}{Volt} \tag{5.44}$$

METODA ZRCALNIH SLIKA ZA RJEŠAVANJE ELEKTROSTASKIH PROBLEMA

Brojne su metode za proračun električnog polja i/ili potencijala za zadani raspored naboja. Jednu mogućnost ćemo ilustrirati sada. Potražimo rješenje za jedan točkasti naboj smješten na visini h od vodljive površine. Najprije je jasno da će silnice polja sve biti okomite na vodič. Također je jasno da će silnice biti gušće raspoređene uz točku dobivenu kao nožište položaja naboja na ravnini nego u udaljenijim dijelovima ravnine.(Naime, ako blizu nožišta izaberemo točku koja još nije na ravnini i kroz tu točku prolaze kugle sve većeg radijusa, s tim da one prolaze tom točkom a da im je središte na zraci koja ide od nožišta okomice kroz točku u kojoj je naboj, ukupni tok kroz dobivene Gaussove kugle uvijek je isti: q/ε_0 . Očito gustoća silnica opada s radijusom kugle, dok se tok oko dijela oko nožišta ne mijenja!) Također je jasno da se oblik silnica ove konfiguracije ne mijenja, ako vodljivu ploču zamijenimo identičnim nabojem suprotnog predznaka koji je sa suprotne strane ravnine . Tako se navedeni problem svodi na računanje polja dva naboja razmaknuta 2h suprotnih predznaka.
Najprije preko Coulombovog zakona računamo rezultantno polje na ravnini:

$$E_z = -2\frac{q\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0(r^2+h^2)} = -\frac{qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{5.45}$$

U (5.45) r je udaljenost točke ravnine u kojoj računamo polje od nožišta, a ϑ je prikloni kut pod kojim se iz naboja q vidi točka u kojoj računamo polje mjeren od okomice iz naboja na ravninu. U (5.45) je u krajnjoj relaciji unesena i veza polja i površinske gustoće naboja za vodič. Gornji slučaj ima šire posljedice. Naime ako sada iz polja proračunamo i ekvipotencijalne plohe, te ako nadalje dvije ekvipotencijalne vodljive plohe sa suprotnih strana ravnine naselimo jednakim ali suprotnim nabojima q, rješenje tog problema bit će identično rješenju problema dva suprotno nabijena točkasta naboja!

E L E K T R I Č N E   S T R U J E

KONCEPCIJSKI KOMENTARI

Uvodno će se studentima demonstrirati pražnjenje kapacitora velikog kapaciteta: Leydenske boce s dramatičnim vizuelnim i akustičkim efektima. Jasno je da pri tom pražnjenju velika količina naboja fenomenom strujanja naboja prelazi s jednog dijela kapacitora na drugi.

Student također može prihvatiti, imajući u vidu kapacitorski model, da za razliku potencijala nije važno da li se jedan naboj pokreće u jednom smjeru ili suprotni naboj u suprotnom smjeru. Efekt na razliku potencijala (napon na kapacitoru) je isti.

Studenti su u svom prijašnjem školovanju informirani da se pod terminom struje podrazumijeva količina naboja protekla nekim sredstvom u jedinici vremena:

$$I = dQ/dt \tag{6.1}$$

Iz izraza (6.1) očito je da se struju mjeri u jedinicama Coulomb/sekunda. Ta jedinica nosi ime amper. Radi boljeg razumijevanja iznenađujućih fenomena poput Ohmovog zakona, radije ćemo poći od mikroskopskog fenomena gustoće struje! Uočimo površinu a karakteriziranu kao i do sada vektorom čiji je iznos a , smjer okomit na površinu. Promatrajmo bilo kakav protok koji brzinom $\vec{v}$ protječe kroz površinu. Volumen koji je protekao u jedinici vremena jest $\vec{v}\cdot\vec{a}$. Ako s n označimo broj naboja u jedinici volumena a s q iznos naboja tada je prema spomenutoj definiciji struje I (6.1),

$$I = nq\vec{v}\cdot\vec{a} \qquad (6.2)$$

Faktor $nq\vec{v}$ je dio podloge pojma gustoće struje. Naime, često u ukupnoj struji učestvuju razne komponente . Indeksirat ćemo ih s indeksom i . Tada će ukupna struja biti:

$$I = dQ/dt = \vec{a}\sum_i n_i q_i \vec{v}_i \qquad (6.3)$$

Jedan primjer raznih komponenti je pokretanje elektrona na jednu stranu i pozitivnih iona od kojih su elektroni ionizacijom otrgnuti na drugu stranu . Kako tih iona može biti različitih vrsta, razumljivo je da svaka vrsta ima svoj indeks i . Sada možemo definirati gustoću struje :

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \qquad (6.4)$$

No gustoću struje možemo izraziti i drukčije obzirom da je n_i broj čestica po jedinici volumena:

$$\vec{j} = \frac{\sum\limits_{\check{c}esticeu\ \Delta V} q_l \vec{v}_l}{\Delta V} \qquad (6.5)$$

Izraz (6.5) je mikroskopski, jer se odnosi na mali volumen; u (6.4) se može raditi također o malom ali može biti i prosječna vrijednost po većem dijelu prostora.

JEDNADŽBA KONTINUITETA

Izraz za struju možemo pisati i u diferencijalnoj formi, kada opisujemo struju koja je prošla kroz diferencijal površine $d\vec{a}$.

$$dI = \vec{j}\cdot d\vec{a} \qquad (6.6)$$

Tok vektora strujne gustoće kroz zatvorenu površinu S jest:

$$I(S) = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{a} \qquad (6.7)$$

Izraz (6.7) očito opisuje koliko je naboja isteklo iz volumena S. Ako s $Q(S)$ označimo naboj unutar S , tada vrijedi , radi zakona sačuvanja naboja:

$$\int_S \vec{j}\cdot d\vec{a} = -\frac{dQ(S)}{dt} - \frac{d}{dt}\int_S \rho(\vec{r})dV \qquad (6.8)$$

gdje je ρ lokalna gustoća naboja. No početni izraz u (6.8) je po Gaussovom teoremu:

$$\int_S \vec{j}\cdot d\vec{a} = \int_S div\vec{j}dV \qquad (6.9)$$

Usporedbom desnih strana (6.8) i (6.9) uz proizvoljnost izbora površine S slijedi:

$$div\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{dt} \qquad (6.10)$$

Izraz (6.10) , nazvan jednadžbom kontinuiteta, lako interpretiramo. Izviranje struje može nastupiti samo od vremenske promjene naboja na danoj lokaciji.

OHMOV ZAKON

U nekom strujnom krugu koji se sastoji od izvora razlike potencijala U, instrumenta za mjerenje prolaska struje kroz njega (ampermetra) i objekta kroz koji mjerimo prolaz struje povezanih vodljivim žicama u zatvoreni električni krug eksperimentalno se opaža proporcionalnost mjerene struje I i napona U:

$$U = RI \tag{6.11}$$

gdje je R eksperimentalno nađena konstanta proporcionalnosti koja se mjeri u Ohmima. To je glasoviti Ohmov zakon. Ohm je očito kvocijent Volta i Ampera. Konstanta proporcionalnosti se naziva otporom. Ohmov zakon je utvrđen mjerenjem. Do njegovog postojanja možemo doći takozvanim Drudeovim modelom. Napominjemo da bez takvog modela Ohmov zakon opisuje dosta iznenađujuće ponašanje povezanosti struje i razlike potencijala , kao što ćemo tijekom Drudeovog izvoda vidjeti. No prije uvida u Drudeov model razradit ćemo potankosti Ohmovog zakona prihvaćajući zasad da on vrijedi .
Prema definiciji gustoće naboja , ako kroz površinu A protječe okomito na nju struja I, imamo uz Ohmov zakon:

$$j = \frac{I}{A} = \frac{1}{A}\frac{U}{R} \tag{6.12}$$

Ako je duljina vodiča koji promatramo l tada je razlika potencijala na njegovim krajevima povezana s jakošću polja koje postoji unutar njega i uzrokuje protok električne struje:

$$E = U/l \tag{6.13}$$

Kombiniranjem (6.12 i (6.13) imamo

$$j = \frac{1}{A}\frac{1}{R}El \tag{6.14}$$

postoji proporcionalnost gustoće struje j i električnog polja unutar vodiča E. Očito smo prestali raditi u uvjetima elektrostatike; naboji struje kao posljedica vodiču izvana nametnutog polja E koje se gibanjem naboja ne poništava, jer je vanjskim izvorom razlike potencijala osigurana stalnost tog napona. Konstanta proporcionalnosti između gustoće struje i električnog polje naziva se vodljivošću i prema (6.14) ona je :

$$\sigma = \frac{l}{AR} \tag{6.15}$$

Student uočava nesretnu okolnost da se isto slovo sada upotrebljava za dvije potpuno različite veličine. Prije je to bila površinska gustoća naboja, ovdje je to vodljivost. U literaturi postoje i druge oznake za vodljivost. Uz vodljivost se definira i otpornost kao njena inverzna vrijednost

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{6.16}$$

Tako se otpor vodiča može karakterizirati s dvije fenomenološke konstante zavisne o materijalu od kojeg je vodič napravljen. Iz (6.15) i (6.16) slijedi:

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A} = \rho.\frac{l}{A} \tag{6.17}$$

Relacije (6.15) - (6.17) nemaju temeljno značenje, ali iskazuju način kako se iz tabeliranih vrijednosti za fenomenološko ponašanje materijala to jest $\rho \; ili \; \sigma$ može izračunati otpor pojedinog uzorka materijala znajući njegove dimenzije i vrstu materijala.

DRUDE-ov MODEL VOĐENJA ELEKTRIČNE STRUJE

Električni naboj q u električnom polju $\vec{E}$ izložen je sili $\vec{F}$ koja po drugom Newtonovom zakonu rezultira u akceleraciji tog naboja. Prema Newtonu bi trebalo vrijediti:

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} \tag{6.18}$$

Ubrzanje naboja q mase m bi trebalo rezultirati njegovom stalnom akceleracijom. No, mikroskopska verzija Ohmovog (fenomenološkog) zakona (6.14) i veza gustoće struje s brzinom kretanja naboja $\vec{v}$ izražena preko (6.4) , ukazuju da električno polje u stvari određuje ne akceleraciju, nego brzinu naboja!!! Vidimo da mjerenja ukazuju na posve neočekivan rezultat. Napon na krajevima vodiča, koji definitivno stvara električno polje ne rezultira prema empirijski utvrđenom Ohmovom zakonu u akceleraciji naboja, nego određuje njegovu srednju brzinu. To je ta neočekivanost Ohmovog zakona, koju treba objasniti. U Drudeovom modelu koji će se studentima ilustrirati gibanjem kuglice kroz mrežu vertikalno postavljenih igličastih zapreka, naboj se nakon sudara s rešetkom zapreka ponovno akcelerira prema(6.18), ali ta akceleracija dovodi samo do ponovnog sudara koji rezultira u prosječnoj brzini nula nakon sudara. Tako se naboj stalno akcelerira kako bismo očekivali, ali doživljavanjem sudara ponovno se vraća nultoj brzini. Kao sveukupni rezultat ovog zamršenog procesa on ima neku srednju brzinu pomicanja kao što to i izriče Ohmov zakon. Sada ćemo ući u potankosti Drudeovog opisa. Nosioci struje su elektroni negativnog naboja (-q) i ioni naboja (+q). Sila električnog polja E koje postoji u vodiču dobiva se množenjem naboja i polja. Polazimo od stanja u kojem je početna brzina jednaka nuli, a sila je stalna. Indeks i kao i do sada nam označava vrstu nosioca naboja. Integrira se jednadžba:

$$q_i \vec{E} = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = konst \qquad (6.19)$$

Mase nosioca naboja nisu iste. Dobiva se rezultat:

$$\vec{v}_i(t) = \frac{q_i \vec{E}}{m_i}(t - t_0) \qquad (6.20)$$

Za gustoću struje i-te komponente imamo prema (6.4) :

$$\vec{j}_i = n_i q_i \left[\frac{q_i}{m_i} \vec{E} \cdot (t - t_0) \right] \qquad (6.21)$$

Iz (6.20) ili (6.21) uzimajući da se nakon prosječno stalnog vremenskog intervala τ_i sudarom nosilac naboja vraća na brzinu nula imamo:

$$\vec{j}_i = \left(\frac{n_i q_i^2 \tau_i}{m_i}\right)\vec{E} \qquad (6.22)$$

Izraz u okrugloj zagradi u (6.22) je prema (6.14) i (6.15) doprinos vodljivosti koji dolazi od i-te komponente struje. Kako i pozitivni ioni idući na jednu stranu i negativni ioni idući na drugu stranu daju doprinos struji, možemo za ukupnu vodljivost σ

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad (6.23)$$

prema (6.23) i (6.22) napisati:

$$\sigma = \sum_i \frac{n_i q_i^2}{m_i} \tau_i \qquad (6.24)$$

U (6.24) dominantnu ulogu igraju elektroni radi veće pokretljivosti (manje mase) . Štoviše, ako u električnom krugu imamo jasne granice raznih materijala, ioni jednog materijala ne prelaze u drugi materijal.

Ohmov zakon prestaje vrijediti ako se između dva sudara brzina bitno promijeni, to jest ako se efekti ubrzanja akumuliraju nakon sudara. Povreda Ohmovog zakona nastupa i pri visokofrekventnim titranjima polja ako je njihov period manji od τ . Slom Ohmovog zakona se dešava i ako se povećava broj nosioca naboja kao na primjer pri proboju iskrenjem ili pojavom munje.

E L E K T R I Č N I   K R U G O V I

Iako električni krugovi ne predstavljaju posebnu spoznajnu kategoriju, njihova svakodnevna ogromna primjena traži da su fizičari s njima dobro upoznati. Radi se o zatvorenim sustavima različitih elemenata kroz koje teče ili uključivanjem sklopke/prekidača može poteći struja. Prvi element koji daje pogon gibanju naboja jest elektromotorna sila. U pravilu to je izvor stalnog napona na svojim krajevima. Taj izvor napona povezuje se vodljivim žicama s ostalim elementima strujnog kruga. Kroz vodljivu žicu idealno teče struja bez otpora, bez nagomilavanja naboja ; struja je u zatvorenom krugu s jednom petljom (bez račvanja kretanja naboja) ista u svim dijelovima strujnog kruga. Slijedeći je element potrošač i/ili otpornik. Na njemu se često električna energija pretvara u drugu formu, na primjer toplinsku. Kapacitor smo već upoznali; njegova uloga je da nagomilava ili otpušta nagomilani naboj. Čvor je točka u kojem se struja grana u odvojene komponente kruga. Sklopka služi za ostvarivanje ili prekidanje kontinuiteta kruga. Uzemljenje je kombinacija vodiča i odličnog kontakta sa potencijalom Zemlje. Uzemljenje definira potencijal neke točke električnog kruga. Temeljni instrumenti su voltmetar i ampermetar. Kako oni funkcioniraju govorit ćemo kasnije. U principu voltmetar ima neizmjerno velik otpor i priključuje se paralelno potrošaču na kojem želimo ustanoviti pad potencijala. Ampermetar služi za mjerenje struje u krugu. Idealno je njegov otpor jednak nuli. Ampermetar se u krug uključuje serijski, to jest on mjeri struju koja i kroz njega i kroz krug protječe. U ovom poglavlju će se uz opće zakone krugova razraditi i nekoliko primjera rješavanja specifičnih problema koji se često mogu primijeniti.

KIRCHHOFFOVI ZAKONI

Temelj za rješavanje električnih krugova su Kirchhoffovi zakoni.

1) Vrijedi Ohmov zakon; pada potencijala na vodiču je produkt struje i otpora.
2) Zbroj struja u svakom čvoru je jednak nuli.
3) Zbroj promjena napona u petlji je jednak nuli

Dok prvi zakon ne treba komentirati, drugi zakon se intuitivno lako prihvaća kao rezultat sačuvanja naboja. Drugim riječima, ako oko čvora načinimo zatvorenu kuglu , integral gustoće struje se Gaussovim teoremom prevodi u vremensku derivaciju promjene naboja, a ona je jednaka nuli . Naboj nigdje ne izvire niti nestaje. Naboj se samo premješta. Treći zakon proističe iz činjenice da taj zbroj promjena napona možemo shvatiti kao krivuljni integral električnog polja množenog s pomakom duž električnog kugla. Po Stokesovom teoremu to je jednako rotaciji električnog polja po površini zatvorenoj petljom . No za nas je zasada rotacija električnog polja jednaka nuli.

Potenciometar:

Promatra se samo dio kruga koji uključuje čvor. Na jednom kraju potenciometra je potencijal U_1 a na drugom je potencijal U_2 . Na prvi potencijal se nadovezuje otpornik R_1, a na drugi otpornik R_2. Između dva otpornika je čvor. Njime su otpornici povezani, a treća grana izvodi struju I van potenciometra. Za zadane vrijednosti potencijala na krajevima , otpora otpornika i jakosti struje koja izlazi iz čvora traži se napon U u čvoru. Počinjemo najprije sa drugim Kirchhoffovim zakonom u čvoru:

$$I_1 = I + I_2 \tag{7.1}$$

Prva struja teče prvim otpornikom, druga struja drugim, a I teče van potenciometra.
Pad napona na prvom otporniku Ohmovim zakonom jest:

$$U_1 - U = R_1(I + I_2) \tag{7.2}$$

Analogno:

$$U - U_2 = R_2 I_2 \tag{7.3}$$

Izračunom I_2 iz (7.2) i (7.3) te izjednačavanjem dobivenih izraza imamo:

$$\frac{U - U_2}{R_2} = \frac{U_1 - U}{R_1} - I \tag{7.4}$$

Združivanjem faktora uz U imamo :

$$U(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}) = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 R_2} - I \tag{7.5}$$

S (7.5) je uspostavljena relacija koju smo željeli. Ona se može napisati i u obliku koji je simetričan i zgodan za memoriranje:

$$U = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{7.6}$$

Predotpor i paralelni otpor za mjerne instrumente:

Svojom konstrukcijom instrumenti imaju određeno mjerno područje. Ovdje se opisuje kako se dodavanjem otpornika to područje primjene može povećati (naravno plaća se cijena manjom osjetljivošću).

Voltmetar i predotpor

Voltmetar u suštini mjeri struju koja njime prolazi a ima u odnosu na druge elemente kruga veliki unutrašnji otpor R_0 . Ako ispred voltmetra dodamo otpor R_1 , tada će voltmetar za istu struju kojom je očitavao napon $U = R_0 I$ imati priključen napon $U' = (R_0 + R_1)$. Time je omogućeno mjerenje višeg napona za faktor:

$$\frac{U'}{U} = \frac{R_0 + R_1}{R_0} \tag{7.7}$$

Ampermetar i paralelni otpor (shunt)

Struju ampermetrom očitavamo uz prisutnost nekog unutrašnjeg otpora R_A. Ideja je sada da se većina struje propusti (dobro poznavajući omjer struje koja ide instrumenta a koja paralelnim otporom) kroz paralelni otpor R_s. Struja na novoj konstrukciji jest pad napona U podijeljen s otporom konstrukcije R. No ukupna struja kroz novu konstrukciju je zbroj struja ktoz ampermetar i shunt (paralelni otpor):

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_A} + \frac{U}{R_S} = F\frac{U}{R_a} \tag{7.8}$$

Ovdje je faktor F faktor povećanja kojim se ukupna struja povećala u novoj konstrukciji u odnosu na onu koja je ampermetrom tekla u konstrukciji bez shunta. Iz (7.8) lako računamo F.

Wheatstone-ov most

Upotrebljava se za mjerenje otpora otpornika u krugu u kojem imamo tri dodatna otpornika. Shema započinje izvorom elektromotorne sile U (vrh sheme). Zatim slijedi čvor kojim se struja račva na lijevu i desnu granu. U lijevoj grani su u seriji otpori $R_x \; i \; R_2$. U desnoj grani su otpornici $R_3 \; i \; R_4$ .također u seriji. Dvije grane su međusobno povezane tako da iza $R_x \; i \; R_3$ postoje čvorovi iz kojih izlazi iz lijeve grane poveznica s desnom. U poveznici su ampermetar i peti otpornik kojem u osnovnoj varijanti mjerenja ne trebamo znati vrijednost. Petlja završava povezivanjem otpornika $R_2 \; i \; R_4$ sa uzemljem izvršenim kroz treći vodič čvora. Proces mjerenja teče tako da se izabere kombinacija otpora $R_3 \; i \; R_4$ za koju kroz poveznicu (a time i kroz ampermetar) ne teče struja. Prema rješenju problema potenciometra za lijevu stranu možemo pisati:

$$U_L = \frac{UR_2}{R_x + R_2} - I\frac{R_x R_2}{R_x + R_2} \tag{7.9}$$

$$U_D = \frac{UR_4}{R_3 + R_4} + I\frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \tag{7.10}$$

Indeksirani naponi se odnose na vrijednosti u čvorovima. Predznaci struje su uz pretpostavku da ona teče s lijeve strane na desnu. Stoga su i odgovarajući članovi u obadva izraza suprotnih predznaka. Ako ampermetrom ne teče struja, ona u gornjima izrazima iščezava, štoviše, nema razlike potencijala u središnjim čvorištima dviju grana. Iz toga slijedi:

$$\frac{R_2}{R_x + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \tag{7.11}$$

Odatle sređivanjem dobivamo:

$$R_2 R_3 = R_x R_4 \tag{7.12}$$

Što je tražena relacija među otporima. Napomena: namještanje pravog odnosa otpora $R_3 \; i \; R_4$ postiže se reometrom : otpornikom koji ima klizni kontakt na inače kontinuiranom vodiču , zbroju otpora desne strane. Taj klizni kontakt je čvor za poprečnu struju I . Student može za vježbu izvesti mnogo kompleksniji izraz za struju I ako ona nije nula korištenjem (7.9) , (7.10) i Ohmovog zakona za poveznicu:

$$U_L - U_D = R_5 I \tag{7.13}$$

Gdje je R_5 otpor već spomenutog petog otpornika u poveznici dvije grane.

Pretvorba shema konfiguracija otpornika: zvijezda –trokut će se studentima demonstrirati na seminaru/vježbama. To je vrlo upotrebljiva kratica za analizu krugova s više petlji.

TROŠENJE ELEKTRIČNE ENERGIJE PRI VOĐENJU

Pogledajmo rad koji električno polje vrši potičući gibanje naboja $q_i \; za \; pomak \; d\vec{s}_i$.

$$dW_i = q_i \vec{E} d\vec{s}_i \tag{7.14}$$

Sumiranjem po nabojima unutar volumena ΔV imamo $(\sum_i q_i \vec{E} d\vec{s}_i)_{unutar\ \Delta V}$. Proširenjem diferencijala pomaka s vremenom dobivamo produkt brzine i proteklog vremena:

$$dW_{\Delta V} = \vec{E} \cdot (\sum_i q_i \frac{d\vec{s}_i}{dt})dt \tag{7.15}$$

No izraz u okrugloj zagradi je prema (6.5) zapravo gustoća struje pomnožena s volumenom ΔV . Tako iz (7.15) i (6.5) slijedi:

$$\frac{dW_{\Delta V}}{dt} = \Delta V \cdot \vec{E} \cdot \vec{j} \tag{7.16}$$

Tako dobivamo iz (7.16) dijeljenjem s volumenom snagu koja se troši:

$$\frac{dP}{dV} = \vec{j}\vec{E} \tag{7.17}$$

Izraz se bitno pojednostavljuje kada su gustoća struje i polje paralelni i svi pomaci jednaki. Tada je

$$dW = UdQ \tag{7.18}$$

i također :

$$\frac{dW}{dt} = U\frac{dQ}{dt} = U \cdot I \tag{7.19}$$

STACIONARNO STRUJNO POLJE U HOMOGENOM VODIČU

U homogenom vodiču u stacionarnoj situaciji nema nakupljanja naboja. Vremenska derivacija gustoće naboja iščezava, što prema jednadžbi kontinuiteta povlači:

$$div\,\vec{j} = 0 \tag{7.20}$$

S druge strane uz 3. Kirkhoffov zakon :

$$rotE = 0 = rot\sigma\vec{E} = rot\,\vec{j} \tag{7.21}$$

U gornjoj smo relaciji iščezavanje rotacije električnog polja mogli povezati s iščezavanjem rotacije gustoće struje jer su dvoje proporcionalni, a konstanta proporcionalnosti σ u homogenom sredstvu ne varira. Iščezavanje rotacije gustoće struje povlači da se ona može prikazati kao gradijent skalarnog polja ϕ_j, no kako divergencija gustoće struje iščezava prema (7.20), očito

$$div\,grad\,\phi_j = 0 \tag{7.22}$$

Potencijal iz kojeg se izvodi gustoća struje zadovoljava Laplaceovu jednadžbu!

ELEKTROMOTORNA SILA

Elektromotorna sila je primarni uzrok pokretanja naboja u strujnom krugu. Postoje varijante elektromotornih sila. Mi ćemo se koncentrirati na elektromotornu silu koja daje stalan napon na svojim krajevima. Već smo vidjeli Van de Graafov uređaj koji koristi mehanički rad da bi na određeni potencijal dignuo naboj. U električnim baterijama i akumulatorima umjesto mehaničke energije koristi se kemijska energija. Ovdje ćemo analizirati jedan slučaj elektromotorne kemijske sile poznate pod imenom Westonov članak . U principu druge varijante članaka (općeniti naziv za elektromotorne sile pogonjene kemijskom energijom) utemeljene su na analognoj ideji. Naime, u Van de Graafovom slučaju se napon (razlika potencijala osigurava mehaničkim radom. Kod članaka se razlika potencijala osigurava untrašnjom kemijskom energijom uskladištenom u komponentama članka. Westonov članak možemo predstaviti s dvije vertikalne epruvete koje se međusobno spojene horizontalnom cijevi, tako da je moguć transport komponenta otopine između vertikalnih dijelova (otopine u uređaju ima toliko da njena razina nadilazi vertikalnu koordinatu spojne cijevi. Neka je u u dnu lijeve epruvete čista živa, a na njoj kristalići Hg_2SO_4. U dnu desne epruvete je kadmij (Cd) otopljen u živi. U kombiniranoj posudi dominira vodena otopina kadmijevog sulfata koji se pri tome disocira (razdvaja u ione) u Cd^{++} i SO_4^{--}. U dvije epruvete teku paralelno dva različita kemijska procesa. Iz kristalića Hg_2SO_4 se disociranjem izdvajaju Hg^+ koji se pridružuju živi na dnu. Tako se oslobađaju SO_4^{--}. Oni će stvarati nabojnu ravnotežu s Cd^{++} ionima koji se oslobađaju paralelno u desnoj epruveti. Taj proces oslobađanja teče ovako. Kadmij otopljen u živi otpušta dva elektrona predajući ih živi i iz žive izlaze Cd^{++} ioni. Tako se postiže određena koncentracija otopine u sustavu. Time se u lijevoj epruveti u živi povećava broj pozitivnih naboja, a u desnoj epruveti je isti broj negativnih naboja. Do kada teče ovaj složeni proces. Kada potencijalna razlika dvije elektrode (materijala na dnu epruveta) dosegne dobitak u kemijskoj energiji koji nastupa tijekom kombinacije ovih procesa, proces se prekida jer kemijska reakcija više nema mogućnosti svojom potencijalnom energijom dizati razliku napona na nivo koji je viši od njenog vlastitog. Ako kroz dvije elektrode koje spojimo preko potrošača poteče struja, kemijske će se reakcije nastaviti ; kemijska će se energija trošiti na potrošaču držeći na elektrodama stalni napon. Westonov članak se inače upotrebljava kao naponski standard!

Pri konkretnoj upotrebi članaka mora se uzeti u obzir ne samo kemijski potencijal kojeg otopina daje na raspolaganje negi i činjenica da pri gibanju naboja kroz članak postoji unutrašnji otpor. Tako je uz oznaku kemijskog potencijala ε i struje kroz članak I, stvarni napon koji daje članak:

$$V = \varepsilon - R_i I \qquad (7.23)$$

R_i je unutrašnji otpor članka, a struja I je:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_i} \qquad (7.24)$$

gdje je R otpor vanjskog potrošača. Gornje izraze student lako opaža u jednostavnom krugu u kojem su vanjski otpor i unutrašnji otpor povezani u seriju, a V je napon koji preostaje za potrošač.

R-C KRUG ISTOSMJERNE VREMENSKI PROMJENLJIVE STRUJE:

Za serijsku vezu nabijenog kapacitora C na napon U , Otpornika R kroz koji teče (kao i kroz cijeli krug) struja I vrijede tri relacije poznate otprije:

$$Q=CU \quad I=U/R \quad I= -dQ/dt \qquad (7.25)$$

U vezi naboja i struje je negativni predznak; struja je to pozitivnija i veća , što naboj kapacitora koji se prazni biva manji!
Njihovim korištenjem slijedi:

$$dQ/dt= -U/R= -Q/(CR) \qquad (7.26)$$

Odatle premještanjem diferencijala imamo:

$$dQ/Q= -dt/(RC) \qquad (7.27)$$

Integriranjem (7.27) dobivamo:

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (7.28)$$

$$I = -\frac{dQ}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (7.29)$$

Vrijeme potrebno da vrijednost struje padne za faktor e zove se vremenskom konstantom i u ovom slučaju je to očito RC. Iz ovog primjera slikovito vidimo da za preraspodjelu naboja treba određeno vrijeme.

M A G N E T I Z A M I P O V E Z A N O S T S A S T R U J O M

Činjenicu da pojedini materijali, posebno željezo imaju magnetska svojstva studenti su sreli u srednjoj školi. Komad magnetiziranog materijala privlači na primjer željeznu piljevinu ili druge komade željeza silom. Na prvi pogled izgleda da postoje elementi sličnosti s pojavom naelektriziranosti, no razlika je ogromna. Komad magnetizirane materije nema jedan „magnetski naboj“ , svaki je komad sa svojstvima dipola . Ako uzmemo dva magnetizirana štapa, jedan par njihovih krajeva će se na primjer odbijati, no ako jedan štap zadržimo u istoj poziciji, a prema njemu približimo suprotni kraj drugoga, oni će se privlačiti . No samo jedan pol magneta ne možemo izolirati. Vidjet ćemo kasnije kako se ovo svojstvo magnetskog polja matematički izražava.

OERSTEDOVO OTKRIĆE DJELOVANJA ELEKTRIČNE STRUJE NA MAGNET

Oersted je otkrio da stalna električna struja djeluje na magnetsku iglu orijentirajući je tangencijalno na plašt zamišljenog cilindra kojem je os simetrije vodič kojim teče struja. Osim Oerstedovog pokusa studentima će se demonstrirati i pokus sa Brownovom cijevi u kojoj elektronski snop, pod utjecajem magnetskog polja biva otklonjen pravilom vektorskog produkta brzine elektrona i magnetskog polja. Studentima će se također demonstrirati da se dva vodiča kroz koje teku struje paralelno privlače, a ako su struje antiparalelne, vodiči se odbijaju. Sve ovo nas navodi na zaključak da ukupna sila na naboj q u poljima E i B iznosi:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (8.1)$$

Električno polje je kao i prije E a magnetsko je B.
Relaciju (8.1) se može prihvatiti kao eksperimentalno utvrđenu činjenicu. No studenti koji očekuju istraživačku budućnost trebaju postati svjesni da je gornju relaciju moguće dokazati kao relativistički efekt djelovanja električnog naboja koji se giba na drugi naboj koji se giba .

SILA IZMEĐU STRUJE I ELEKTRIČNOG NABOJA U GIBANJU

Pokazat ćemo kako se suprotnim gibanjem suprotnih naboja u laboratorijskom sustavu može relativistički ispravnim postupkom objasniti postojanje sile na izolirani naboj koji se u tom sustavu giba. Ideja je u suštini jednostavna; u nastavku ćemo je matematički obraditi. Linearna gustoća naboja koji se giba različita je u raznim sustavima radi efekta kontrakcije duljine. Ako se jedna vrsta naboja giba na jednu stranu , a druga na drugu, a izolirani naboj na jednu od tih strana, očito će kontrakcija duljine, a time i gustoća naboja biti različita gledana iz sustava u kojem izolirani naboj miruje. To znači da će postojati (od nule različita) rezultantna električna sila na izolirani naboj u smjeru okomitom na tok struje. Polazimo od laboratorijske linearne gustoće naboja λ koji se giba prema desno (pozitivna x-os). U suprotnom smjeru se giba negativna gustoća naboja $-\lambda$. Brzina pozitivnih i negativnih naboja je po modulu ista i iznosi v_0. Tako je ukupna struja u laboratorijskom sustavu :

$$I = 2\lambda v_0 \qquad (8.2)$$

Ako testni naboj q miruje u laboratorijskom sustavu (znamo preko Gaussovog teorema izračunati polja koja postoje) , djelovanja dvaju struja suprotnog predznaka se poništavaju. No sada možemo izračunati pomoću Lorentzovih transformacija originalne gustoće naboja u sustavima u kojima naboji struja miruju. Općenito je :

$$\lambda = dq/dx \qquad (8.3)$$

Naboj je invarijantna veličina. Kako je duljina štapa L_0 u sustavu koji miruje povezana s duljinom štapa L u sustavu u kojem se štap giba relacijom:

$$L_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = L \qquad \sqrt{1 - v^2/c^2}) \equiv 1/\gamma \qquad (8.4)$$

Tada su gustoće naboja u sustavima u kojima naboji struja miruju:

$$\lambda_0^+ = \lambda/\gamma_0 \qquad \lambda_0^- = -\lambda/\gamma_0 \qquad (8.5)$$

Faktor γ_0 je procedurom (8.4) povezan s laboratorijskom brzinom v_0 kojom linearne gustoće naboja napreduju u suprotnim smjerovima unutar laboratorijskog sustava. U tom laboratorijskom sustavu testni naboj q giba se brzinom v u smjeru pozitivne x-osi. Najprije ćemo u sustavu u kojem naboj q miruje izračunati brzine čestica dvije struje. Prema transformacijama brzina iz prošlog semestra brzine pozitivnih i negativnih naboja u sustavu u kojem testni naboj miruje su:

$$v_+' = \frac{v_0 - v}{1 + \left[(-v)v_0/c^2\right]} \qquad v_-' = \frac{-v - v_0}{1 + \left[(-v)(-v_0)/c^2\right]} \qquad (8.6)$$

Kako se u relativističkoj notaciji $\beta = v/c$ upotrebljava kao pokrata, dijeleći (8.6) s c , imamo:

$$\beta_+' = \frac{\beta_0 - \beta}{1-\beta\beta_0} \qquad \beta_-' = \frac{-\beta - \beta_0}{1+\beta\beta_0} \qquad (8.7)$$

Sada možemo odrediti linearne gustoće naboja pojedinih struja kako ih vidi mirni izolirani testni naboj q . One su povezane s gustoćom u laboratorijskom sustavu relacijom analognoj (8.5) s time da se faktor γ pojedine struje povezuje s odgovarajućim faktorom β iz relacija (8.7) .

$$\lambda_+' = (\lambda^+{}_0)\gamma_+' = (\frac{\lambda}{\gamma_0})\frac{1}{(1-(\beta_+')^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda}{\gamma_0}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{-\beta+\beta_0}{1-\beta\beta_0})^2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{\gamma_0}\frac{1-\beta\beta_0}{\sqrt{1-2\beta\beta_0+\beta^2\beta_0{}^2-\beta_0{}^2-\beta^2+2\beta\beta_0}} = \lambda\sqrt{1-\beta_0{}^2}\,\frac{1-\beta\beta_0}{\sqrt{(1-\beta_0{}^2)((1-\beta^2)}} = \qquad (8.8)$$

$$= \gamma\lambda(1-\beta\beta_0)$$

Te analogno:

$$\lambda_-' = -\frac{\lambda}{\gamma_0}\gamma_-' = -\frac{\lambda}{\gamma_0}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{-\beta-\beta_0}{1+\beta\beta_0})^2}} = -\frac{\lambda}{\gamma_0}\frac{1+\beta\beta_0}{\sqrt{(1-\beta_0{}^2)(1-\beta^2)}} = \qquad (8.9)$$

$$= -\lambda\gamma(1+\beta\beta_0)$$

Ukupna linearna gustoća naboja u sistemu izoliranog naboja je superpozicija gustoća (8.8) i (8.9) .

$$\lambda' = \lambda_+' + \lambda_-' = -2\gamma\lambda\beta\beta_0 \qquad (8.10)$$

U sustavu mirnog testnog naboja je prema Gaussovom zakonu polje koje djeluje na q :

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi r\varepsilon_0} = -\frac{2\gamma\lambda\beta\beta_0}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{\gamma v 2\lambda v_0}{2\pi\varepsilon_0 r c^2} \qquad (8.11)$$

Silu na naboj u tom sustavu , koja je u transverzalnom smjeru dobivamo množenjem polja i naboja:

$$F_\perp' = -qv\frac{\gamma I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} \qquad (8.12)$$

Ovu transverzalnu silu u sustavu u kojem testni naboj miruje se transformira u transverzalnu silu u laboratorijskom sustavu transformacijom (vidi relativistički dodatak neposredno po ovom tekstu (*)):

$$F_\perp = F_\perp'/\gamma = -qv\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} \qquad (8.13)$$

Ovaj rezultat je trijumfalan za relativistički pristup elektromagnetizmu. On ne samo da predviđa oblik međudjelovanja električne struje i naboja u pokretu, nego daje i eksplicitni izraz za to djelovanje koje se u kompaktnom obliku piše kao (8.1) s tim da je magnetsko polje prouzročeno strujom I analitičkog oblika za apsolutni iznos:

$$|B| = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} \qquad (8.14)$$

Kako je česta pokrata:

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \tag{8.15}$$

to se (8.13) uglavnom piše kao:

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{8.16}$$

Smjer tog polja je tangencijalan na plašt cilindra koji je aksijalno simetrično smješten oko struje s promjerom r. Njegov smisao je pak u odnosu na struju koja teče dan pravilom desne ruke.

*RELATIVISTICKI DODATAK TRANSFORMACIJE SILE NA TIJELO KOJE MIRUJE

Promatramo transformaciju transverzalne sile za tijelo koje miruje u sustavu S'. Notacija koordinata je ista kao i u prošlom semestru. Mala je modifikacija da umjesto oznaka za y i z osi , koje su međusobno ravnopravne upotrebljavamo oznaku transverzalnosti: $\perp$.
Koristeći se pokratama ponovljenim u ovom odjeljku : β i γ te poznatim svojstvima o transformaciji transverzalne komponente impulsa i transformaciji vremena, imamo:

$$F_\perp = \frac{dp_\perp}{dt} = \frac{dp_\perp'}{\gamma(dt' + \beta c dx')} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp_\perp'}{dt'} \tag{Dodatak.1}$$

Posljednja jednakost u gornjem nizu slijedi iz činjenice da je za tijelo koje miruje u S' sustavu dx' jednak nuli. Tako dobivamo izraz za transformaciju transverzalne komponente sile za tijelo koje u S' miruje:

$$F_\perp = \frac{F_\perp'}{\gamma} \tag{Dodatak.2}$$

To je upravo izraz koji smo upotrijebili pri izvodu efekta magnetskog polja kao posljedice relativističkog efekta struje na naboj koji se giba.

UJEDINJENI POGLED NA MAGNETSKO POLJE

U (8.1) smo naveli fenomenološki izraz za opis djelovanja ne električni naboj u pokretu kao

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{8.17}$$

Slijedeći relativističko razmatranje smo dokazali da je u stvari :

$$|B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{8.16}$$

Gdje je I struja koja teče vodičem, a r je udaljenost naboja od te struje.

SILA IZMEĐU DVIJE USPOREDNE STRUJE I DEFINICIJA AMPERA

Najprije upozoravamo studenta da prelazimo s modela struje u kojem se kroz vodič gibaju naboji suprotnih predznaka kada je struja bila $I = 2\lambda v$ na model u kojem se giba samo jedan naboj $I = \lambda v$. Ako imamo dva paralelna (beskonačno duga) vodiča kroz koje teku paralelno struje:

$$I_i = \lambda_i v_i \tag{8.18}$$

tada je sila kojom struja 1 djeluje na naboje u vodiču 2 :

$$F = q_2 v_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \tag{8.19}$$

Gornji izraz smo dobili koristeći Lorentzovu silu i upravo izvedeni izraz za magnetsko polje.

Zanima nas sila na segment vodiča duljine dl; za to koristimo linearnu gustoću naboja na drugom vodiču:

$$q_2 = \lambda_2 dl \tag{8.20}$$

Kada ovu relaciju i izraz za struju u prvom vodiču ubacimo u izraz za silu , dobivamo:

$$F = \lambda_2 dl v_2 \lambda_1 v_1 \frac{\mu_0}{2\pi r} \tag{8.21}$$

Sada se možemo vratiti na vezu struja s gustoćom naboja i brzine naboja (8.18) i izračunati iznos sile kojom jedan vodič sa strujom djeluje na drugi vodič sa strujom po jedinici duljine druge struje:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \tag{8.22}$$

Ovaj izraz je temelj definicije ampera. Kada kroz dva beskonačna vodiča na udaljenosti 1 metar teku paralelno struje od jednog ampera, tada je sila po jedinici duljine vodiča kojom se vodiči privlače: $2 \cdot 10^{-7}\, N/m$!

Neposredno slijedi permeabilnost vakuuma:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, N/A^2$$

Naravno i dalje vrijedi za susceptiblinost:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{8.23}$$

AMPERMETAR S POKRETNIM SVITKOM

Prema izrazu za Lorentzovu silu množenjem s diferencijalom duljine vodiča dl dobivamo diferencijal sile na vodič te duljine koji se nalazi u magnetskom polju B:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \tag{8.24}$$

Ako na petlju postavljenu okomito na magnetsko polje priključimo izvor struje/napon, na nju će djelovati par sila proporcionalan struji kroz petlju. Na tome se temelji ampermetar s pokretnim svitkom. Radi pojačanja djelovanja, struja se šalje kroz mnogo navoja koji svi doprinose ukupnom paru sila na svitak. Zapravo, pri kraju semestra ćemo upoznati fenomen feromagnetizma, koji objašnjava kako se magnetsko djelovanje svitka pojačava umetanjem željezne jezgre u svitak.

OSNOVNE RELACIJE MAGNETOSTATIKE

Kompletan opis magnetskog polja prouzročenog beskonačnim ravnim vodičem kroz koji teče struja I u ravnini okomitoj na pravac struje jest:

$$\vec{B} = \hat{\varphi}_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{8.25}$$

$\hat{\varphi}_0$ je azimutalni jedinični vektor u ravnini transverzalnoj toku struje i smještenom na radijalnoj udaljenosti r od struje.

Cirkulacija magnetskog polja:

Cirkulacija magnetskog polja je po svojoj definiciji integral skalarnog produkta magnetskog polja i pomaka po zatvorenoj krivulji. Cirkulaciju magnetskog polja po kružnici aksijalno simetrično položenoj u odnosu na struju lako izračunavamo, jer su pomak i polje kolinearni:

$$\int_C \vec{B}d\vec{s} = \int_C Bds = B\int_C dl = B2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}2\pi r = \mu_0 I \tag{8.26}$$

Ovo je integralna forma Amperovog zakona kojeg ćemo kasnije dopuniti u jednu od Maxwellovih jednadžbi. Izveli smo je u jednostavnoj geometriji kružnice, no možemo pokazati da vrijedi za svaku zatvorenu petlju:

$$\int_C \vec{B}d\vec{s} = \int_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}d\vec{s} = \int_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_C d\varphi = \mu_0 I \tag{8.26a}$$

No ukupna struja koja teče kroz zatvorenu petlju jest:

$$I = \int_C \vec{j}d\vec{a} \tag{8.27}$$

Kako se Stokesovim teoremom cirkulacija vektorskog polja $\vec{B}$ može povezati s njegovom rotacijom:

$$\int_C \vec{B}d\vec{s} = \int_C rot\vec{B}d\vec{a} \tag{8.28}$$

to se uspoređivanjem posljednjih triju relacija zaključuje da vrijedi:

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{8.29}$$

Ovoj važnoj relaciji pridružuje se i činjenica da je tok magnetskog polja kroz svaku zatvorenu plohu jednak nuli . Drugim riječima magnetsko polje nema izvora, to jest

$$div\vec{B} = 0 \tag{8.30}$$

Ovo je bitna razlika od situacije s električnim poljem, čiji su izvori naboji. Stručnjaci tu situaciju nazivaju odsustvom magnetskih monopola. Sada možemo komentirati da smo s izrazima za divergenciju električnog i magnetskog polja kompletirali dvije od četiri Maxwellove jednadžbe. Druge dvije jednadžbe odnose se na rotacije istih veličina. Do sada smo upoznali samo one dijelove izraza za rotaciju koji se odnose na stacionarne (vremenski nepromjenljive) situacije.

OSNOVNE JEDNADŽBE MAGNETOSTATIKE ; MATEMATIČKE POSLJEDICE

U integralnom obliku one glase:

$$\int_C \vec{B}d\vec{s} = \int_C rot\vec{B}d\vec{a} = \mu_0 I = \mu_0 \int_{unutar C} \vec{j}d\vec{a} \tag{8.31}$$

$$\int_{unutar C} \vec{B}d\vec{a} = 0 \tag{8.32}$$

U diferencijalnom obliku su:

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{8.33}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{8.34}$$

To se može usporediti s osnovnim jednadžbama elektrostatike:

$$rot\vec{E} = 0 \tag{8.35}$$

$$div\vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \tag{8.36}$$

Električno polje nema rotacije ; električno polje je bez vrtloga. Njegovi su izvori naboji. Magnetsko polje nema izvora. Protok struje stvara njegovu rotaciju; vrtlozi magnetskog polja potječu od struje. U matematici bezvrtložno vektorsko polje se može reprezentirati kao gradijent skalarne funkcije (električno polje je gradijent električnog potencijala). Obratno vektorsko polje bez izvora može se napisati kao rotacija vektorskog potencijala! Ove su nam činjenice važne. Naime , kako smo pokazali sasvim općenito da se električni potencijal rasporeda naboja može dobiti integriranjem doprinosa gustoće naboja množene potencijalom u dotičnom dijelu prostora, tako će nam vektorski potencijal biti pomoćno sredstvo da dođemo do Biot-Savartovog zakona koji za zadani raspored električnih struja daje prostorni rasored magnetskih polja.Prvi korak na tom putu je dokaz da divergencija polja koje je rotacija vektorskog polja iščezava.

DIVERGENCIJA ROTACIJE VEKTORSKOG POLJA

$$div\,rot\,\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial}{dx}\left[(rot\vec{F})_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(rot\vec{F})_y\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(rot\vec{F})_z\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right] = 0 \qquad (8.37)$$

Naime po Schwartzovom teoremu pri parcijalnom deriviranju (osim u točkama singulariteta) , može se zamijeniti poredak deriviranja. Tada se za svaki član pozitivnog predznaka u gornjem retku može naći poništavajući član suprotnog predznaka. Znači divergencija svakog polja , koje je rotacija vektorskog polja iščezava. Sada prihvaćamo matematički teorem koji kaže da se polje čija je divergencija nula može prikazati kao rotacija nekog polja. Stoga za magnetsko polje mora postojati polje čije je magnetsko polje rotor. Ovo se polje naziva vektorskim potencijalom magnetskog polja i vrlo često označava s $\vec{A}$. Znači vrijedi:

$$\vec{B} = rot\vec{A} \qquad (8.38)$$

Pokazat ćemo najprije da komponente vektorskog potencijala magnetskog polja zadovoljavaju formom identičnu jednadžbu kakva je jednadžba za potencijal električnog polja , a za koju znamo rješenje. Studenti mogu pisanjem eksplicitnih izraza za rotore provjeriti relaciju koju ovdje pišemo koristeći pravilo o dvostrukom vektorskom produktu:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \qquad (8.39)$$

Kako se vektorski potencijal magnetskog polja može izabrati tako da njegova divergencija iščezava, to možemo kombinirati gornju relaciju, vezu magnetskog polja i njegovog potencijala (.) i vezu rotacije magnetskog polja i struje. Tako na primjer za x komponentu vektorskog potencijala istovremeno vrijedi:

$$(rot\vec{B})_x = \left[\ rot(rot\vec{A})\ \right]_x = -\nabla^2 A_x \qquad (8.40)$$

i relacija

$$(rot\vec{B})_x = \mu_0 j_x \qquad (8.41)$$

Analogne relacije vrijede i za preostale dvije komponente tako da kombiniranjem gornjih dviju relacija i skupljanjem svih komponenti imamo:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \qquad (8.42)$$

Ovoj pak diferencijalnoj jednadžbi po analogiji s jednadžbom električnog potencijala odmah znamo rješenje:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \qquad (8.43)$$

Vektorski potencijal magnetskog polja igra sa skalarnim potencijalom električnog polja ogromnu ulogu u teoriji elektromagnetizma. Svjesni smo, međutim da student za njega nije razvio intuiciju. Stoga ćemo ga prestati upotrebljavati, čim ga kao međukorak iskoristimo za dobivanje Biot-Savartovog zakona.

DODACI U TEHNIČKOJ OBRADI ELEKTRIČNIH KRUGOVA

Spajajanje otpornika u seriju:
Ako u krug elektromotorne sile uključimo dva otpornika jedan makon drugoga u seriju imamo za cijeli sustav iz Ohmovog zakona:

$$\varepsilon = IR \tag{A1}$$

S druge strane iz trećeg Kirchhoffovog zakona:

$$\varepsilon - IR_1 - IR_2 = 0 \tag{A2}$$

Što eliminacijom elektromotorne sile i kraćenjem s I daje:

$$R = R_1 + R_2 \tag{A3}$$

Paralelno spajanje otpornika:
Ako nakon elektromotorne sile uslijedi čvor u kojem se struja grana na dva otpornika , obadva su na istom naponu elektromotorne sile, a ukupna struja je zbroj struja u granama:
Tako slijedi:

$$\frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} \tag{A4}$$

odakle slijedi:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{A5}$$

Spajanje kapacitora u paralelu:
Ako zajednički napon priključimo preko čvora na dva paralelna kapacitora dodani naboj dQ dijeli se na obadva kapacitora:

$$CdU = dQ = C_1 dU + C_2 dU \tag{A6}$$

Odatle kraćenjem s dU dobovamo:

$$C = C_1 + C_2 \tag{A7}$$

Spajanje kapacitora u seriju:
Ako na izvor napona priključimo dva kapacitora serijski jedan poslije drugoga, na njihovim pločama će biti naseljeni (po iznosu) isti iznosi naboja:

$$\frac{dQ}{C} = dU = \frac{dQ}{C_1} + \frac{dQ}{C_2} \tag{A8}$$

Odatle slijedi:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} \tag{A9}$$

KONVENCIJA O PREDZNAKU MAGNETSKOG POLJA

Sjeverni pol magnetske igle pokazuje prema sjevernom geografskom polu! Pozitivnim smjerom polja se smatra smjer silnica koje iz sjevernog pola magneta izlaze!

BIOT SAVARTOV ZAKON

U ovom dijelu predavanja često ćemo prelaziti između doprinosa volumskog doprinosa magnetskom polju gustoće struje $\vec{j}\Delta V$ i doprinosa tankog vodiča predstavljenog vektorom $d\vec{l}$ gdje navedeni vektor modulom reprezentira duljinu tankog vodiča, a kroz njega teče struja I. Prema (6.5) veličina

$$\vec{j} = \frac{\sum\limits_{\check{c}esticeu\ \Delta V} q_l \vec{v}_l}{\Delta V} \qquad (6.5)$$

predstavlja gustoću struje koja postoji unutar volumena ΔV. Ako se ta veličina pomnoži s tim volumenom, dobiva se ukupna struja unutar tog volumena, a ona se dalje može karakterizirati i površinom presjeka vodiča i njegovom duljinom:

$$\vec{j} \cdot \Delta V = j \cdot \hat{j} \cdot A \cdot dl \qquad (8.44)$$

Uz

$$jA=I \qquad (8.45)$$

i

$$\hat{j}dl = d\vec{l} \qquad (8.46)$$

Imamo iz (8.44)

$$\vec{j} \cdot \Delta V = I \cdot d\vec{l} \qquad (8.47)$$

Postavlja se pitanje doprinosa tankog elementa vodiča reprezentiranog vektorom $d\vec{l}\,'$ kroz koji teče struja I vektroskom potencijalu magnetskog polja na koordinati $\vec{r}$. Odgovor na to se nalazi u integralnoj formuli (8.43) . Njenim diferenciranjem dobivamo:

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\Delta V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (8.48)$$

Sada kada znamo doprinos vektorskom potencijalu elementa $d\vec{l}\,'$ vektorskom potencijalu u točki $\vec{r}$, možemo preko veze vektorskog potencijala i magnetskog polja nastaviti s računanjem doprinosa istog elementa upravo magnetskom polju (tako će nam vektorski potencijal izići iz upotrebe:

$$d\vec{B} = rot\left[d\vec{A}(\vec{r})\right] = rot\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \qquad (8.49)$$

U računanju rotora možemo preskočiti konstante i koncentrirati se samo na dio zavisan o varijabli (prostornoj koordinati).

$$rot\left(\frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{d\vec{l}\,'_x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} & \frac{d\vec{l}\,'_y}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} & \frac{d\vec{l}\,'_z}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{vmatrix} \qquad (8.50)$$

Potražimo x-komponentu rotora ; iz njenog analitičkog oblika jasan je izgled ostalih komponenti i ukupnog rezultata:

$$\left[rot\left(\frac{d\vec{l}\,'}{|\ \vec{r}-\vec{r}\,'\ |}\right)\right]_x = d\vec{l}\,'_z \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - d\vec{l}\,'_y \cdot \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} =$$

$$= d\vec{l}\,'_z\,(-\frac{1}{2})\frac{2(y-y')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} + d\vec{l}\,'_y\,\frac{2(z-z')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = d\vec{l}\,'_y\,\frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - d\vec{l}\,'\frac{y-y'}{|\ \vec{r}-\vec{r}\,'\ |^3} = \tag{8.51}$$

$$= \left[d\vec{l}\,'\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]_x$$

Tako diferencijal magnetskog polja dobivamo uzimanjem sve tri komponente kao:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l}\,'\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{8.52}$$

Ukupno magnetsko polje može se dobiti integracijom:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{8.53}$$

To je poznati Biot-Savartov izraz za proračun magnetskog polja iz poznavanja rasporeda i jakosti struja. Ovaj izraz koji je integral po vodiču kojim teče struja može se generalizirati na volumski integral po gustoći struje korištenjem transformacije (8.47) no sada u obratnom smjeru!

Studentima se sada redom demonstrira silnice magnetskog polja stvorenog strujama kroz: ravni vodič, kružnu petlju, solenoid i torusnu konfiguraciju.

PRORAČUN MAGNETSKOG POLJA STRUJNE PETLJE NA OSI SIMETRIJE PETLJE

Sa skice geometrijskih odnosa na petlji polumjera b i točke na njenoj osi simetrije na visini h uočavamo da pri proračunu polja prema (8.53) $d\vec{l}\,'$ ide obodom kružnice petlje. Kut pod kojim se s obodne točke petlje vidi točka u kojoj računamo polje je α (on je komlement kuta β pod kojim se iz točke na osi za koju računamo polje vidi točka čiji doprinos promatramo mjeren u odnosu na os simetrije petlje). S $\vec{r}\ i\ \vec{r}\,'$ su označene točke u kojima računamo polje odnosno ona iz koje dolazi doprinos polju, respektivno. Modul diferencijala magnetskog polja lako izračunavamo prema (8.52) jer su vektori $d\vec{l}\,'\,i\ (\vec{r}-\vec{r}\,')$ međusobno okomiti!

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl'|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{8.54}$$

Doprinosi polju B na osi petlje u horizontalnom smjeru se poništavaju jer svakoj točki na kružnici postoji suprotna točka na istoj kružnici s horizontalnim doprinosom polju koji je suprotan onom prve točke. Vertikalni se pak doprinosi koherentno sumiraju. Tako na osi preostaje samo:

$$dB_z = dB\cdot\cos\alpha = \frac{\mu_0 I dl'}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{h^2+b^2}} \tag{8.55}$$

Integracija po obodu ostavlja sve veličine u (8.55) stalnima osim što se integral po diferencijalu oboda pretvara u opseg kružnice:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{b^2}{(h^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{8.56}$$

Na visini h=0 izraz se pojednostavljuje:

$$B_z(h=0)=\frac{\mu_0 I}{2b} \tag{8.57}$$

MAGNETSKO POLJE SOLENOIDA NA NJEGOVOJ OSI SIMETRIJE

Namatanjem mnogo petlji kroz koje se pušta struja (namatanje se dominantno vrši tako da petlje imaju zajedničku os simetrije i leže jedna do druge) dobivamo solenoid. Na skici solenoida uočavaju se slijedeće krakteristične veličine: b-polumjer solenoida , z koordinata navoja mjerena duž osi simetrije solenoida, kut ϑ pod kojim se iz točke na osi solenoida vidi navoj smješten na koordinati z (mjereno u odnosu na os solenoida. Očito vrijedi:

$$\cos\vartheta=\frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}} \tag{8.58}$$

Za polje na osi solenoida možemo koristiti (8.56) na slijedeći način. Promatramo interval dz na osi z . Neka petlje jednoliko namotane tako da se po jedinici duljine solenoida nalazi n zamotaja. Tada umjesto struje I u (8.56) treba doći nIdz kada se traži doprinos sloja navoja dimenzije dz ukupnom polju na osi solenoida; dakle:

$$dB_z=\frac{\mu_0 nIdz}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}} \tag{8.59}$$

Ovaj izraz postaje pogodan za integriranje kada se uoči da se diferenciranjem (8.58) dobiva:

$$d(\cos\vartheta)=\frac{dz}{(b^2+z^2)^{1/2}}+z(-\frac{1}{2})\frac{2z}{(b^2+z^2)^{3/2}}=\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}} \tag{8.60}$$

Kada (8.60) iskoristimo u (8.59) , dobivamo:

$$dB_z=\frac{\mu_0 nI}{2}d(\cos\vartheta) \tag{8.61}$$

Ako s $\vartheta_{\min}$ *i* $\vartheta_{\max}$ označimo početnu i konačnu točku integracije po kutu ϑ, tada je konačni rezultat za z komponentu polja na osi simetrije solenoida:

$$B_z=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\vartheta_{\max}-\cos\vartheta_{\min}) \tag{8.62}$$

U posebnom slučaju beskonačnog solenoida (granice integracije 0 i π),
imamo

$$|B_z|=\mu_0 nI \tag{8.63}$$

Identičan rezultat za beskonačni solenoid se dobiva i primjenom znanja o cirkulaciji magnetskog polja (8.26). Naime, načinimo petlju integracije od dvije stranice duljine l paralelne osi solenoida. Druge dvije stranice spajaju prve dvije stranice smjerom okomitim na os solenoida. Jedna stranica duljine l je unutar solenoida a druga stranica duljine l je izvan solenoida. Uočimo najprije da rezultat integracije ne zavisi ni o koordinati paralelnoj ni okomitoj na os solenoida. Cirkulacija uvijek iznosi $\mu_0 nIl$ (rezultat je direktna posljedica (8.26) i činjenice da je ukupna struja koja se obilazi upravo $\mu_0 nI\cdot l$) . Neovisnost o položaju linije izvan solenoida potječe od činjenice da je tamo magnetsko polje nula. Neovisnost o koordinati paralelnoj osi solenoida potječe od beskonačnosti solenoida : ni jedna paralelna točka nije istaknuta. Ako pak cirkulaciju podijelimo s duljinom na kojoj postoji polje (l), dobivamo rezultat (8.63) .

MAGNETSKO POLJE PLOŠNE STRUJE

I spoznajno i s praktične strane korisno je ponekad ne razmatrati tok struje jedne petlje i onda efekte zbrajati , nego kao veličinu na kojoj temeljimo proračun polja uzeti struju, koja struji jediničnom širinom (mjerenom dakle okomito na smjer toka struje) tog toka. Dakle prema skici: ako plohom širine l teče ukupna struja I_{uk} , tada je plošna struja definirana kao :

$$J = \frac{I_{uk}}{l} \tag{8.64}$$

Shemom putanje cirkulacije koja oponaša onu iz jednadžbe (8.63) , samo ide neposredno blizu navoja solenoida s njegove unutrašnje i vanjske strane, dobivamo razliku komponenti magnetskog polja paralelnih osi solenoida:

$$\mu_0 I_{uk} = \int_C \vec{B} d\vec{s} = (B_{\parallel}^{unutrašnje} - B_{\parallel}^{vanjsko}) l \tag{8.65}$$

Time je skok paralelne komponente magnetskog polja pri prijelazu preko navoja struje dan s:

$$\Delta B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I_{uk}}{l} = \mu_0 J \tag{8.66}$$

Ova relacija je u suštini analogon relacijama (3.14) i (3.58) koje obadvije svjedoče koliki je skok električnog polja pri prijelazu preko ravnine naboja. Ovdje se pak radi o skoku vrijednosti magnetskog polja pri prijelazu preko ravnine struje!

TLAK MAGNETSKOG POLJA

Kao što nagomilani električni naboj na nekoj površini proizvodi tlak, koji ima tendenciju izbacivanja naboja iz površine, tako i električna struja vrši tlak na naboj. Ova se pojava koristi u uređajima koji bi jednog dana u fuzijskim reaktorima trebali osigurati novi izvor električne energije temeljen na eksploataciji fuzije lakih atomskih jezgri (procesom koji smanjenjem mase sustava , iz mase mirovanja crpi energiju). Tehnološki problem u fuzijskim uređajima jest držati užarenu plazmu (mnogo električnih naboja suprotnih predznaka) u što manjem prostoru (plasma confinement) . Magnetski tlak dobiven strujom jest rješenje ovog problema već u upotrebi u pokusnim fuzijskim uređajima. Ako izaberemo z os sustava paralelno osi solenoida, izbjeći ćemo nezgrapni simbol za paralelni smjer. Neka je s druge strane smjer y onaj okomit na os solenoida.
Silu na element struje I duljine Δl već smo pisali u (8.24) s pojašnjenjem u (8.47).

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \tag{8.24}$$

Znajući da je element pomaka duž x osi a magnetsko polje duž z osi, to je rezultatna sila duž y osi i njen je modul:

$$\Delta F_y = I \Delta l \cdot \overline{B}_z = J \Delta w \cdot \Delta l \cdot \overline{B}_z \tag{8.67}$$

Ovdje je $\overline{B}_z$ srednja vrijednost polja za polja unutar i izvan solenoida, a Δw je širina pojasa kojim kroz koji teče struja u solenoidu (na koju razmatramo djelovanje sile).
Uvrštavanjem izraza za plošnu struju (8.66) i izraza za prosječno polje, imamo dijeljenjem s elementom površine:

$$\frac{\Delta F_y}{\Delta w \Delta l} = \frac{(B_{unutrašnje})_z - (B_{vanjsko})_z}{\mu_0} \cdot \frac{1}{2} \left[(B_u + B_v \right]_z \tag{8.68}$$

U gornjoj smo formuli u faktoru s uglatom zagradom prešli na skraćene indekse: unutrašnje-u, vanjsko-v . Tlak očito postoji kao posljedica skoka magnetskog polja pri prijelazu preko plohe struje. Taj tlak ne djeluje samo na elemente unutar solenoida ; tlak postoji uvijek kada postoji neravnoteža u jakosti magnetskog polja.
Tako za tlak dobivamo:

$$\frac{\Delta F_y}{\Delta w \Delta l} = \frac{1}{2\mu_0} \left[(B_{u,z})^2 - (B_{v,z})^2 \right] \tag{8.69}$$

U literaturi se najčešće koristi pojednostavljeni izraz:

$$P = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{8.70}$$

ENERGIJA (ULOŽENA) U MAGNETSKOM POLJU

Kao što je za stvaranje električnog polja potrebno uložiti rad , analogna je situacija s magnetskim poljem. Naime, ako bismo protiv sile ΔF_y radili na putu Δy , stvarajući magnetsko polje u elementu volumena $\Delta V = \Delta w \Delta l \Delta y$, to se proširenjem izraza (8.69) s Δy dobiva za izvršeni rad ΔW po jedinici volumena (to jest za gustoću energije uloženu u postojanje električnog polja):

$$\frac{\Delta F_y \Delta y}{\Delta w \Delta l \Delta y} = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{8.71}$$

analitički gledano isti izraz kao i za tlak magnetskog polja. Podsjećamo da istu situaciju imamo i sa električnim poljem.

HALLOV EFEKT:

Ako se kroz vodič pusti struja gustoće $\vec{j}$, a okomito na taj smjer uspostavi magnetsko polje $\vec{B}$, suglasno Lorentzovoj sili, naboj će reagirati otklonom prema odgovarajućoj strani vodiča (okomito i na gustoću struje i na magnetsko polje) . Naboj će se nagomilavati asimetrično dok njegovim nakupljanjem ne nastane električno polje u vodiču koje uravnotežuje jakost Lorentzove sile na naboje u pokretu. Tako se transverzalno na struju i polje javlja električno polje koje se može mjeriti preko razlike potencijala na odgovarajućim krajevima vodiča. U ravnoteži vrijedi:

$$q\bar{v} \times \vec{B} + q\vec{E}_{transv} = 0 \tag{8.72}$$

U geometriji okomitih smjerova struje i magnetskog polja vrijedi:

$$E_{transv} = \bar{v}B \tag{8.73}$$

Za module vektora također vrijedi:

$$j = nq\bar{v} \tag{8.74}$$

Tako je konačni izraz za električno polje:

$$E_{transv} = \frac{1}{nq} \cdot j \cdot B \tag{8.75}$$

Često se faktor 1/nq naziva Hallovom konstantom.
Izraz za transverzalno električno polje (8.73) pogodan je za uočavanje mjere za jakost magnetskog polja Tesle (T).
Iz (8.73) je jasno da je

$$1T = \frac{kg}{s \cdot C} \tag{8.76}$$

Studentima se demostrira Hallova proba. Dok kroz vodič teče struja; vodič je u okomitom magnetskom polju, na priključcima se osjetljivim ampermetrom registrira protok struje kao posljedica stvorenog električnog polja.

Napomena o mjernim instrumentima za mjerenje magnetskog polja.
Hallov efekt se koristi kao vrlo česta (ne naročito precizna) metoda mjerenja magnetskog polja. Povijesno možemo spomenuti razvoj mjerenja magnetskog polja kroz više faza.

Magnetometri su se oslanjali na određivanje para sila na kalibrirani magnetski dipol koji se otklanjao u magnetskom polju (obješen na torzijsku nit) od svog položaja ravnoteže. U slijedećem koraku se mijenjao tok magnetskog polja kroz vodljivu petlju od nultog do onog koje izaziva mjereno magnetsko polje. Kako ćemo u nastavku vidjeti, efektom Faradayeve indukcije, to izaziva elektromotornu silu proporcionalnu magnetskom polju. Slijedeći korak je bilo mjerenje Hallovom probom koje smo upravo opisali. Višu preciznost mjerenja magnetskog polja postiže se nuklearnom magnetskom rezonancijom (NMR) kvantno-mehaničkim efektom povezanim s magnetskim momentom atomske jezgre, o kojoj će biti govora u četvrtoj godini studija. Najsavršenija metoda jest SQUID, koja obuhvaća kvantno-mehaničke efekte na makroskopskoj razini.

Z A K O N   E L E K T R O M A G N E T S K E   I N D U K C I J E

Poglavlje se započinje s više pokusa. U prvom na krajeve solenoida spajamo osjetljivi ampermetar i time zatvaramo električni krug. U solenoid ulažemo jedan pol permanentnog magneta , a ampermetar reagira otklonom na jednu stranu registrirajući pojavu elektromotorne sile u solenoidu. Ako uložimo suprotni pol magneta, ampermetar ponovno registrira pojavu elektromotorne sile, ali suprotnog predznaka. Isti rezultat dobijemo ako u solenoid unosimo drugi solenoid kroz koji teče električna struja , pa i on manifestira magnetska svojstva. Konačno, efekt eksperimenta sa solenoidom možemo pojačati, ako u solenoid koji proizvodi polje uložimo jezgru mekog željeza. Svi ti pokusi pokazuju efekt poznat kao Faradayevu indukciju. Faraday je otkrio da se promjenom magnetskog polja kroz petlju vodiča inducira elektromotorna sila unutar te petlje. Fenomen možemo razumjeti na principu Lorentzove sile i njenog efekta na linearni vodič koji se giba okomito na smjer magnetskog polja. Jasan je rezultat da će naboji koji postoje, radi gibanja vodiča, krenuti na njegove suprotne krajeve pod djelovanjem Lorentzove sile. Time nastaje inducirano unutrašnje električno polje i ravnotežna situacija za naboj jest:

$$q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}_{induc} = 0 \tag{9.1}$$

TRANSLACIJA VODLJIVE PRAVOKUTNE PETLJE U OKOMITOM MAGNETSKOM POLJU

Ako vodljivu petlju postavimo okomito na magnetsko polje, s time da par stranica jest paralelan smjeru gibanja petlje a drugi par je okomit i na polje i na smjer gibanja petlje imat ćemo slijedeće rezultate:

Gibanje petlje u homogenom magnetskom polju:
U petlji se ne će manifestirati elektromotorna sila. Naime u dvije strane okomite na smjer gibanja se doduše razdvoje naboji i nastane u njima unutrašnje električno polje ali se promatrano kao električni krug, dvije inducirane elektromotorne sile poništavaju (jer za zamišljeni obilazak petlje u jednom smjeru kruženja petljom daju zbroj elektromotornih sila jednak nuli) .

Gibanje petlje u nehomogenom magnetskom polju:
U petlji će se sada inducirati elektromotorna sila, jer unutrašnja polja inducirana u dvije stranice petlje ne će biti jednaka. Ako stranice okomite na i na magnetsko polje i na smjer

gibanja označimo s 1 i 2 , s time da je u stranici 1 vrijednost magnetskog polja $\vec{B}_1$ veća od one u stranici 2 : $\vec{B}_2$. tada će inducirano polje u stranici 1 biti veće od induciranog polja u stranici 2 i postojat će elektromotorna sila koja će tjerati naboj od pozitivnog pola stranice 1 prema manje pozitivnom polu stranice 2. Elektromotorna sila je u suštini promjena potencijalne energije naboja podijeljena s nabojem pri izračunu cirkulacije električne sile po zatvorenoj petlji:

$$\varepsilon = \frac{1}{q}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{l} \qquad (9.2)$$

Sada ćemo pokazati da se tako nastala elektromotorna sila povezuje s promjenom toka magnetskog polja kroz petlju.
Uključenjem izraza za Lorentzovu silu u (9.2) dobivamo:

$$\varepsilon = \int_C \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l} = v(B_1 - B_2)\cdot w \qquad (9.3)$$

gdje je w širina petlje (mjerena okomito na smjer gibanja petlje). Promjena toka u petlji jest:

$$d\Phi = B_2 wvdt - B_1 wvdt \qquad (9.4)$$

Kombiniranjem (9.3) i (9.4) slijedi:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (9.5)$$

Tako smo dobili Faradayev zakon elektromagnetske indukcije; to je integralni oblik treće kompletirane Maxwellove jednadžbe. Izraz (9.5) je izveden u posebnoj geometriji gibanja pravokutne petlje u magnetskom polju. Pokazat ćemo da (9.5) vrijedi općenito bez obzira na izbor oblika površine kroz koju se tok računa i bez obzira na oblik petlje koja tu površinu obilazi.

Nezavisnost toka magnetskog polja kroz petlju o obliku površine koja je ograničena tom petljom

Zamislimo proizvoljnu zatvorenu krivulju C . Neka su njom ograničene dvije različite površine. Njih dvije ograničuju zatvorenu plohu koja se dijeli razdjelnom linijom C. Nazovimo plohe imenima $S_1 \; i \; S_2$. Tokovi magnetskog polja kroz te plohe su $\Phi_1 \; i \; \Phi_2$.
Ukupni tok magnetskog polja kroz ukupnu zatvorenu plohu jest nula. To je temeljno svojstvo magnetskog polja. To se inače vidi i iz činjenice da je divergencija magnetskog polja jednaka nuli. Tok magnetskog polja kroz zatvorenu plohu može se naime Gaussovim teoremom svesti na volumski integral divergencije magnetskog polja,a koja je nula. Dakle:

$$\Phi_1 + (-\Phi_2) = 0 \qquad (9.6)$$

Porijeklo minusa u (9.6) potječe od činjenice da pri upotrebi zaključka o iščezavanju ukupnog toka doprinosi dviju ploha nisu računati s istom orijentacijom vektora površine; kod zatvorene plohe vektori površine su uvijek prema van. Dakle (9.6) iskazuje neovisnost toka o obliku površine.

Nezavisnost Faradayevog zakona indukcije o obliku krivulje:

Pođimo od konture C u vremenu t koja se pomiče u konturu istovjetnog oblika samo translatiranog za pomak

$$d\vec{s} = \vec{v}dt \qquad (9.7)$$

Promjena toka jest:

$$d\Phi = \int_C \vec{B}d\vec{a} \qquad (9.8)$$

gdje je $d\vec{a}$ vektor promjene površine:

$$d\vec{a} = \vec{v} \times d\vec{l} \cdot dt \qquad (9.9)$$
a $d\vec{l}$ je vektorski diferencijal pomaka duž krivulje C. Uvrštenjem (9.9) u (9.8) imamo:
$$d\Phi = \int_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l})dt \qquad (9.10)$$
Dijeljenje (9.10) s dt i promjenom poretka u mješovitom produktu vektora, rezultira promjenom predznaka pa imamo:
$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\varepsilon \qquad (9.11)$$
Ovo je identično rezultatu za Faradayevu indukciju (9.5) ; dobiveno je međutim bez pretpostavke o obliku zatvorene krivulje. Treba uočiti da su smjer linijskog integrala u cirkulaciji Lorentzove sile i pozitivni smjer toka Φ povezani pravilom desne ruke. Znači da (9.5) i (9.11) izriču da će na pozitivni naboj u vodiču inducirana elektromotorna sila tjerati taj naboj u smjeru protiv kazaljke na satu (pozitivni smjer ophodnje) , ako u petlji magnetski tok pada.

FARADAYEV ZAKON U MIKROSKOPSKOM OBLIKU

Možemo sada kombinirati (9.2) i (9.5) u :
$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (9.12)$$
Lijeva strana od (9.12) može se prema Stokesovom teoremu transformirati u površinski integral rotacije električnog polja, a desnu stranu napisati kao derivaciju površinskog integrala magnetskog polja po istoj površini:
$$\int_C rot\vec{E} \cdot d\vec{a} = -\int_C \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{a} \qquad (9.13)$$
Radi nezavisnosti rezultata (9.13) o izboru krivulje C već poznatim zaključivanjem slijedi:
$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad (9.14)$$
Ovo je treća kompletna Maxwellova jednadžba koju smo upoznali u ovom kolegiju za vakuumske uvjete. (U prisutnosti materijala Maxwellove jednadžbe se dodatno modificiraju).

LENZOVO PRAVILO I PREDZNAK U FARADAYEVOM ZAKONU

Polazimo od pravokutne petlje koja je kompletno uronjena u magnetsko polje. Petlja je horizontalna, magnetsko polje je vertikalno. Petlju izvlačimo brzinom v u desno u područje u kojem nema polja. To činimo vanjskom silom $\vec{F}_V$ na ravnotežan način (stalna jer brzina $\vec{v}$). Tome se opire sila $\vec{F}_{magn}$, koja je reakcija petlje na prisilnu promjenu toka, čiji je rezultat generiranje struje u petlji. Dakle
$$\vec{F}_V = -\vec{F}_{magn} \qquad (9.15)$$
Kroz petlju teče inducirana struja I. Na stranicu koja je još unutar magnetskog polja djeluje upravo ta sila koja uravnotežuje vanjsku, a prema Lorentzovom izrazu njena je veličina:
$$\vec{F}_{magn} = I\vec{w} \times \vec{B} \qquad (9.16)$$
Rad vanjske sile možemo pratiti slijedećim relacijama:
$$dW = \vec{F}_V d\vec{s} = \vec{F}_V \cdot \vec{v}dt \qquad (9.17)$$
Uključivanjem(9.15) i (9.16) imamo:

$$dW = -I(\vec{w} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}dt = -I(\vec{v}dt \times \vec{w}) \cdot \vec{B} \qquad (9.18)$$

Kako je za petlju

$$(\vec{v}dt \times \vec{w}) \cdot \vec{B} = d\Phi \qquad (9.19)$$

to se niz relacija za diferencijal rada vanjske sile nastavlja prema (9.18) i (9.19) :

$$dW = -Id\Phi \qquad (9.20)$$

S druge strane se taj rad vanjske sile može izraziti preko snage koja se u krugu postoji, ,a koja je produkt struje i napona:

$$dW = \varepsilon I dt \qquad (9.21)$$

Usporedbom (9.20) i (9.21) zaključujemo:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (9.22)$$

Zapravo, možemo vidjeti da se izvlačenjem petlje iz magnetskog polja, u petlji (s induciranom strujom) stvara dodatni tok, koji nastoji kompenzirati izgubljeni.
Efekt Lenzovog pravila dramatično će se demonstrirati studentima naglim prodorom magnetskog toka kroz aluminijski prsten. Struje nastale u prstenu omogućit će nastanak sile, koja će odbaciti prsten uvis.

Foucaltove vrtložne struje
Kada god vodljivi materijal izložimo promjenljivom magnetskom polju u njemu se inducira elektromotorne sile , a time i struje koje se zovu prema fizičaru: Foucaultove struje.
Demonstrirat ćemo njihov efekt pokušajem njihanja vodljive pločice u magnetskom polju.

INDUCIRANJE ELEKTROMOTORNE SILE U PETLJI KOJA ROTIRA:

Polazimo od petlje postavljene tako da su silnice magnetskog polja usmjerene okomito na njezinu ravninu. Ako reprezentiramo površinu petlje s $\vec{a}$, a Magnetsko polje s $\vec{B}$, tada je tok magnetskog polja kroz petlju:

$$\Phi = \vec{B}\vec{a} \qquad (9.23)$$

Ako se petlja rotira tako da prikloni kut između vektora površine i vektora magnetskog polja ima oblik:

$$\vartheta = \omega t \qquad (9.24)$$

tada elektromotorna sila ima oblik:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\frac{d}{dt}\cos\vartheta = -Ba\frac{d}{dt}\cos\omega t = \omega aB\sin\omega t \qquad (9.26)$$

Tako smo došli do izvora izmjenične struje. U domaćinstvima je upravo izmjenična struja dominantno u upotrebi. Njena je frekvencija u Europi 50 titraja u sekundi. Američki standard je 60 Hz.

MEĐUVODIČKA INDUKCIJA

Pojam međuvodičke indukcije razmatra utjecaj struje jedne petlje na tok kroz drugu petlju. Oznaka $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ ima značenje magnetskog polja koje prva petlja svojom strujom stvara u točki unutar druge petlje koja se uzima u obzir pri proračunu toka magnetskog polja kroz drugu petlju. Prema Biot-Savartovom zakonu slijedi:

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int_{C_1}\frac{d\vec{s}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad (9.27)$$

Integriranjem gornjeg polja po površini druge petlje imamo tok koji je prva petlja svojom strujom prouzročila u drugoj petlji:

$$\Phi_2(I_1) = \int_{S_2} \left[\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] \cdot d\vec{a} \qquad (9.28)$$

Ako konstantu proporcionalnosti između toka $\Phi_2(I_1)\ i\ I_1$ nazovemo s $M_{2,1}$, međuindukcijom,

$$M_{2,1} = \int_{S_2} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right] \cdot d\vec{a} \qquad (9.29)$$

tada vrijede izrazi:

$$\Phi_2(I_1) = M_{2,1} I_1 \qquad (9.30)$$

$$\varepsilon_2(1) = -\frac{d\Phi_2(1)}{dt} = -M_{2,1} \cdot \frac{dI_1}{dt} \qquad (9.31)$$

Napomena: u velikom broju situacija koeficijent međuindukcije doista jest stalan. Oprez je potreban samo u situacijama kad se zbog fenomena zasićenja magnetizacije željeza magnetsko polje počinje deformirati. Iz relacije (9.31) može se očitati veza jedinice za međuindukciju (Henry : H) i SI jedinica:

$$H = \frac{Vs}{A} \qquad (9.32)$$

Primjer međuindukcije velikog i malog prstena smještenih koncentrično:
Jakost magnetskog polja u sredini prstena smo računali prije:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \qquad (9.33)$$

Oznaka 1 odnosi se na veliki strujni prsten. U makom prstenu polje je blizu homogenosti i ima približno stalan iznos dan s (9.33). Za tok nam je potrebna stogabjoš samo iznos površine malog prstena:

$$a_2 = \pi R_2^{\,2} \qquad (9.34)$$

Tako je ukupni tok kroz mali prsten 2 :

$$\Phi_2(1) = \frac{\pi R_2^{\,2} \mu_0}{2R_1} \cdot I_1 \qquad (9.35)$$

Tako je koeficijent međuindukcije:

$$M_{2,1} = \frac{\pi R_2^{\,2} \mu_0}{2R_1} \qquad (9.36)$$

Ako se prvi prsten sastoji od N_1 navoja , a drugi od N_2 , tada se izraz za međuindukciju treba pomnožiti s produktom ova dva broja navoja!

TEOREM O JEDNAKOSTI KOEFICIJENATA MEĐUINDUKCIJE

Za izvod dokaza o jednakosti koeficijenata $M_{1,2}\ i\ M_{2,1}$ polazimo od toka kojeg na drugoj petlji ostvaruje prva:

$$\Phi_2(1) = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{a}_2 \Rightarrow Stokes \Rightarrow \int_{C_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2) d\vec{s}_2 \qquad (9.37)$$

gdje vektorski potencijal znamo napisati:

$$\vec{A}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{s}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \tag{9.38}$$

Tako uvrštenjem (9.38) u (9.37) imamo izraz potpuno simetričan u indeksima 1 i 2 :

$$\Phi_2(1) = I_1 \int_{C_2}\int_{C_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \tag{9.39}$$

Vidimo ,dakle, da istovremeno vrijedi:

$$\Phi_2(1) = I_1 M_{2,1} = I_1 M_{1,2} \tag{9.40}$$

To jest:

$$M_{2,1} = M_{1,2} \tag{9.41}$$

SAMOINDUKCIJA

Činjenica je da promjena struje u zavojnici inducira promjenu toka kroz nju. S druge strane, promjena toka inducira elektromotornu silu koja se po Lenzovom pravilu toj promjeni toka odupire. Koeficijent proporcionalnosti između promjene struje u krugu i inducirane protusile se naziva koeficijentom samoindukcije:

$$\varepsilon_1(1) = -M_{1,1} \frac{dI_1}{dt} \equiv -L \frac{dI_1}{dt} \tag{9.42}$$

Naravno jedinica i dimenzija za samoindukciju jest ista kao i za indukciju.

Primjer računanja samoindukcije za toroidalnu zavojnicu pravokutnog profila:
Najprije opisujemo geometriju torusa. On ima unutrašnji polumjer (na kojem počinju pravokutni navoji) r_1. Vanjski polumjer (na kojem završavaju navoji) je r_2 .Visina navoja je h. Načinit ćemo najprije primjenu Ampere-ovog zakona o cirkulaciji po zatvorenoj krivulji (kružnici smještenoj s centrom na osi torusa i polumjerom r) koju zovemo C.

$$\int_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I_{ukupno} = \mu_0 N I \tag{9.43}$$

N je broj navoja u torusu , a I je struja u svakom navoju, to jest struja koja teče torusom. Kako je magnetsko polje duž radiusa r stalno to je cirkulacija s jedne strane umnožak polja i opsega kruga polumjera r. Tako iz (9.43) dobivamo izraz za magnetsko polje na radiusu r:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \tag{9.44}$$

Promotrimo sada tok tog polja kroz jedan pravokutni navoj. U tom navoju iznos polja zavisi prema (9.44) samo o radiusnoj koordinati i njegovu vrijednost znamo izračunati s (9.44) . To je polje stalno u pravokutniku površine $da = hdr$. Tako je navedeni tok kroz jedan navoj:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{presjektorusa} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \cdot h dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \tag{9.45}$$

Ukupni tok kroz torus je suma tokova kroz sve navoje, njih N. Tako je

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \cdot I \tag{9.46}$$

Prema definiciji samoindukcije:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln(\frac{r_2}{r_1}) \qquad (9.47)$$

Sa samoindukcijom kompletiramo sve veličine koje se pojavljuju u jednostavnijim strujnim krugovima. Evo popisa elemenata i njihovog doprinosa elektromotornim silama

Osnovna elektromotorna sila ε

Otpornik: U=IR

Kapacitor: U=Q/C

Zavojnica:U=LdI/dt

Električna struja u L-R krugu priključenom na napon:

Ako smjer struje izaberemo da teče od + pola osnovne elektromotorne sile (za koju pretpostavljamo da se u vremenu ne mijenja) prema – polu, imamo prema 3. Kirchhoffovom zakonu:

$$\varepsilon - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (9.48)$$

Svođenjem diferencijalne jednadžbe u uobičajeni oblik imamo:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L} \qquad (9.49)$$

Nehomogena linearna jednadžba prvog stupnja , prema našem iskustvu s linearnim jednadžbama se najprije riješi za homogeni dio (koristit ćemo pokratu $\tau = L/R$)

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{\tau} I = 0 \qquad \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{\tau} \qquad (9.50)$$

Rješenje ove jednadžbe nam je poznato:

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \qquad (9.51)$$

Ako ovom rješenju dodamo konstantu, derivacija struje u (9.49) i dalje će poništavati vremenski zavisan dio struje, dok se konstantni član može iskoristiti za poništenje nehomogenosti na desnoj strani jednadžbe (9.49). Student može provjeriti da je ispravan izbor konstanti:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (9.52)$$

Struja se diže do vrijednosti koju bi imala bez zavojnice uz vremensku konstantu τ . Slično možemo pokazati da isključenjem elektromotorne sile, struja nastavlja teći krugom, no smanjuje svoju jakost s istom vremenskom konstantom.

ENERGIJA ULOŽENA U STVARANJE MAGNETSKOG POLJA SAMOINDUKCIJOM

Za solenoid ili neku drugu geometriju mogli bismo energiju uloženu u stvaranje magnetskog polja računati integrirajući izraz za gustoću energije polja. Na sreću postoji mnogo brži put do rezultata. Upravo smo razmatrali pojave povezane s jednostavnim krugom u kojem su bili otpornik i induktivitet. Pretpostavimo da smo iz kruga isključili elektromotornu silu. Postojeća struja bi zamirala prema (9.51). Energija magnetskog polja bi se trošila na Jouleovu toplinu snagom:

$$\frac{dW}{dt} = RI^2 \qquad (9.53)$$

Energiju koja postoji u trenutku t u induktivitetu možemo lako izračunati slijedećim putem: Integriramo snagu koja se troši od vremena t do beskonačnosti, to jest:

$$E_{induktiviet} = \int_t^\infty dW = \int_t^\infty RI_0^{\,2} e^{-2t/\tau} dt = RI_0^{\,2}\frac{\tau}{2}\int e^{-2t/\tau} d(\frac{2t}{\tau}) =$$
$$= \frac{1}{2}R\frac{L}{R}I_0^{\,2}(-e^{-2t/\tau})\Big|_t^\infty = \frac{1}{2}L(I_0 e^{-t/\tau})^2 = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (9.54)$$

K O M P L E T I R A N J E   M A X W E L L O V I H   J E D N A DŽ B I

Do sada imamo u konačnom obliku tri od četiri Maxwellove jednadžbe za vakuum. To su dva izraza za divergencije električnog i magnetskog polja i izraz za rotaciju električnog polja. Pokazat ćemo da Ameperov zakon za rotaciju magnetskog polja treba nadopuniti za situacije u kojima se električno polje mijenja u vremenu. Već smo prije savladali jednadžbu kontinuiteta koja se odnosi na električni naboj:

$$div\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{dt} \qquad (6.10)$$

Amperov zakon u diferencijalnom obliku jest:

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} \qquad (8.33)$$

Promatrajmo nesklad među njima u eksperimentu u kojem nabijeni kapacitor izbijamo kroz ohmski otpor. Na kapacitoru se naboj smanjuje i sasvim izvjesno gustoća struje i njena divergencija postoje prema (6.10). No ako u isti izraz uvrstimo gustoću struje prema (8.33) :

$$\vec{j} = \frac{rot\vec{B}}{\mu_0} \qquad (10.1)$$

Prema dokazanom teoremu o divergenciji rotacije lijeva strana u (6.10) iščezava, što znamo da ne odgovara istini na ploči kapacitora!!! Ampere-ov zakon smo izveli u uvjetima stacionarnih struja. Stoga je logično pretpostaviti da on ne mora vrijediti ako struje nisu stacionarne . Pedagošku stimulaciju u kojem smjeru treba raditi korekciju (6.10) dobivamo praćenjem toka magnetskog polja koji se može računati po različitim plohama koje su sve obrubljene zatvorenom krivuljom oko vodiča koji s kapacitora odvodi naboj. Prije smo pokazali da tok ne smije ovisiti o plohi nego samo o krivulji kojom je ploha obrubljena. Kako krivulja ide oko vodiča kojim teče struja, to je po Stokesovom teoremu magnetski tok jednostavno proprcionalan struji oko koje ide zatvorena krivulja. Diskontinuitet u rezultatu nastaje kada krivulja uđe u prostor kapacitora. Tamo više nema struje i rezultat za očekivani tok pada na nulu! Očito treba (6.10) nadopuniti nečim što se u vremenu mijenja ritmom iščezavanja struje kroz vodič (radi koje struje i postoji problem). Pokušajmo u (8.33) dodati nepoznatu veličinu i na osnovi manipulacija s provjerenim rezultatima odrediti tu veličinu. Pretpostavljamo da (8.33) treba nadopuniti ovako:

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\vec{x} \qquad (10.2)$$

Da bi uvjet da divergencija rotacije magnetskog polja iščezava bio ispunjen, treba iščezavati divergencija desne strane (10.2) to (radi konstantnosti faktora μ_0) povlači:

$$div\vec{j} + div\vec{x} = 0 \qquad (10.3)$$

Istovremeno sigurno vrijedi jednadžba kontinuiteta (6.10). Uvrštavanjem izraza za divergenciju gustoće struje iz (10.3) u (6.10) dobivamo:

$$0 = div\mu_0\vec{x} - \mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (10.4)$$

No prema Maxwellovoj jednadžbi (4.10)

$$\rho = \varepsilon_0 div\vec{E} \qquad (10.5)$$

Uvrštenjem (10.5) u (10.4) imamo:

$$0 = div\mu_0\vec{x} - \mu_0\varepsilon_0 div(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \qquad (10.6)$$

Očito se modifikacijom (8.33) u :

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (10.7)$$

rješava problem nekonzistencije koji se pojavio s promatranjem efekata nestacionarnih struja. Ova dopuna zaključuje ukupnost četiri maxwellove jednadžbe za vakuum; (10.7) je ta četvrta jednadžba . Iz njenog oblika se vidi da ona doprinosi vrsti simetrije među električnim i magnetskim fenomenima. Naime , sada ne samo da promjene magnetskih polja uzrokuju električna polja, nego i promjene električnih polja uzrokuju magnetska polja. Ovo je sudbonosno za fenomen elektromagnetskih valova kako ćemo uskoro demonstrirati. Komentar: ako se vratimo originalnom problemu s pražnjenjem kapacitora, vidimo da ulogu struje unutar dimenzija kapacitora (gdje struje nema) preuzima promjena električnog polja. I u tom prostoru dakle postoji rotacija magnetskog polja, samo je njen uzrok umjesto struje derivacija električnog polja po vremenu. Ona se naravno i sama mijenja ritmom kojim se kapacitor prazni (to jest ritmom odumiranja struje, kao što smo na početku anticipirali).

SUSTAV MAXWELLOVIH JEDNADŽBI PROSTORU BEZ MATERIJALA

Dok nemamo razmatranja električnih i magnetskih polja u materijalima s unutrašnjim poljima, sada imamo kompletiran sustav Maxwellovih jednadžbi. Uz njihovu staru numeraciju pisat ćemo i novu kako bismo naglasili njihovo zajedništvo:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(prije (4.10))} \qquad (10.8)$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad \text{(prije (8.30))} \qquad (10.9)$$

$$rot\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad \text{(prije (9.14))} \qquad (10.10)$$

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(prije (10.7))} \qquad (10.11)$$

Ovaj skup u elektromagnetizmu ima svoj analogon u Newtonovim zakonima u mehanici. Sve moguće električne i magnetske pojave (bez unutrašnjih polja) mogu se ovim opisati. Poseban uspjeh Maxwellovih jednadžbi je bilo predskazivanje elektromagnetskih valova u vrijeme kada se nije znalo za njihovo postojanje niti njihovo objašnjenje prirode svjetlosti.

ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Razmatramo prostor u kojem nema naboja i kojem nema struja. Tada Maxwellove jednadžbe imaju poseban oblik:

$$div\vec{E} = 0 \qquad (10.12)$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad (10.13)$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (10.14)$$

$$rot\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (10.15)$$

Ako na relaciju (10.14) primijenimo operaciju rotora , iskoristimo relaciju za dvostruki produkt i činjenicu da je divergencija električnog polja prema (10.12) nula, s lijeve strane

(10.14) preostaje nam samo: $-\nabla^2\vec{E}.$ S desne pak strane, ako za rotor magnetskog polja iskoristimo (10.15), preostaje $-(1/c^2)(\partial^2\vec{E}/\partial t^2)$. Time je ukupni rezultat:

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{10.16}$$

Ako pak primijenimo operaciju rotora na jednadžbu (10.15) , potpuno analognom procedurom slijedi:

$$\nabla^2\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \tag{10.17}$$

Ovo su poznate valne jednadžbe za električno i magnetsko polje elektromagnetskih valova u vakuumu.

Student može lako provjeriti da je jedno moguće rješenje jednadžbe (10.16) putujući val oblika:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{x}E_0\cos(z-ct) \tag{10.18}$$

Provjeru će načiniti uvrštenjem (10.18) u (10.17), pri čemu će se dvostrukim deriviranjem po vremenu na desnoj strani pojaviti kvadrat od c , a sve ostale veličine će izgledati identično. Kraćenjem ovog faktora s postojećim istim faktorom u nazivniku, dobiva se identitet. Dakle (10.18) zadovoljava valnu jednadžbu (10.17). Inspekcijom analitičkog opisa (10.18), vidimo da on predstavlja kosinusoidalni oblik u prostoru ako ga gledamo za fiksno vrijeme (na primjer t=0). S druge strane isto stanje miče se u vremenu brzinom c. Ovo zaključujemo osmatrajući kakvu relaciju moraju ispunjavati koordinata z i vrijeme t da bi argument kosinusa bio stalan. To je očito relacija:

$$z - ct = konstanta \tag{10.19}$$

što je opis jednolikog gibanja duž osi z brzinom c. (10.18) još zovemo valom polariziranim duž osi x jer opisuje vektor usmjerenja duž osi x.

Potpuno je jasno da i za magnetsko polje $\vec{B}$ rješenja moraju imati isti analitički oblik eventualno pomaknut u fazi. Pokazat ćemo sada da u vakuumu električno i magnetsko polje sinkronizirano titraju, s tim da su vektori električnog polja, magnetskog polja i smjer širenja vala okomiti. Poći ćemo od relacije (10.14) za rotor električnog polja baš za konkretni oblik opisan s (10.18) :

$$rot\vec{E} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -(\hat{x}\frac{\partial B_x}{\partial t} + \hat{y}\frac{\partial B_y}{\partial t} + \hat{z}\frac{\partial B_z}{\partial t}) \tag{10.20}$$

Iz (10.20) čitamo da ni u smjeru z ni u smjeru x nema titrajućih komponenti. Postoji samo y komponenta magnetskog polja. Ona pak je povezana s x komponentom električnog polja relacijom:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{10.21}$$

Najpoćenitija je pretpostavka dakle da je rješenje oblika:

$$B_y(z,t) = B_s\sin(z-ct) + B_c\cos(z-ct) \tag{10.22}$$

Uvrštenjem (10.22) i (10.18) u (10.21) imamo:

$$-E_0\sin(z-ct) = B_s\cos(z-ct) + B_c(-c)\sin(z-ct) \tag{10.23}$$

Iz (10.23) zaključujemo da koeficijent B_s iščezava, a da za drugi koeficijent vrijedi:

$$B_c = \frac{E_0}{c} \tag{10.24}$$

Kompletiranje opisa elektromagnetskog vala koji se duž z-osi širi s električnom komponentom titranja duž osi-x završavamo znači s

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \hat{y}\frac{E_0}{c}\cos(z-ct) \qquad (10.25)$$

Time smo pokazali da smjerovi titranja električnog polja, magnetskog polja i širenje elektromagnetskog vala jesu svi međusobno okomiti i da slijede pravilo desne ruke. S druge strane smo odredili i relativnu jakost električnog i magnetskog polja relacijom (10.24) . Utvrdili smo da su titranja električnog i magnetskog polja u fazi, to jest među njima u vakuumu nema zaostajanja. Možemo napomenuti da ovi odnosi komponenata električnog i magnetsjkog polja ne vrijede uvijek, nego samo u vakuumu. Općenito, moguća su i druga stanja faznih odnosa transverzalnog dijela titranja. Konačno, na primjer unutar valovoda postoji čak i longitudinalna komponenta titranja!

Elektromagnetski valovi koje je predvidio Maxwell demonstrirani su i eksperimentalno . Fizičar Heinrich Hertz je pokusom koji je grubo gledano LC krug , u kojem među elektrodama kapacitora preskaču iskre promjenjivog smjera, proizveo i detektirao istom metodom Hertzove valove u mikrovalnom području. Fantastičnu domišljatost Hertza može se procijeniti činjenicom da u to vrijeme ne postoje nikakve elektroničke komponent, koje su danas temelj proizvodnje komunikacijskih elektromagnetskih valova.

I Z M J E N I Č N E   S T R U J E

Ovo poglavlje je primjena našeg ukupnog znanja o elektromagnetizmu i rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog stupnja koje smo stekli u mehanici. Ovaj dio profesionalnog znanja rješavanja krugova izmjenične struje zajednički je fizičarima i studentima elektrotehnike. Nakon uvodnog primjera slobodnog LRC kruga i komentara o prisilnom titranju svladanog u mehanici moglo bi se reći da je problem razriješen, jer postoji jasna i poznata procedura kako formalno rješavati bilo koji krug. Ipak , u ovom poglavlju će se vrlo detaljno razmatrati pojedine kombinacije uključenja različitih elemenata linearnih krugova. Naime od studenta se na kraju semestra očekuje intuitivno reagiranje na specifične krugove o faznim odnosima napona koji je krugu nametnut i rezultantne struje.

SLOBODNO TITRANJE LRC KRUGA:

Takav krug se sastoji od kapacitora nabijenog nabojem na određeni potencijal, Ohmskog otpora i induktiviteta. Uz prijašnje oznake imamo slijedeće elektromotorne sile:

$$U = \frac{Q}{C} \qquad (11.1)$$

$$\Delta V = RI \qquad (11.2)$$

$$|\varepsilon| = L\left|\frac{dI}{dt}\right| \qquad (11.3)$$

Izborom predznaka da struja teče od nabijenog + pola kapacitora u trenutku uključenja imamo po Kirchhoffovom pravilu slijedeći odnos elektromotornih sila:

$$U - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (11.4)$$

Jasan je i odnos predznaka između naboja na kapacitoru i struje u krugu. Struja prazni kapacitor; smanjuje mu naboj:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -C\frac{dU}{dt} \qquad (11.5)$$

Uvrštenjem (11.5) u (11.4) dobivamo:

$$U + RC\frac{dU}{dt} + LC\frac{d^2U}{dt^2} = 0 \tag{11.6}$$

Dijeljenjem s LC i ovođenjem pokrata:

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\tau} \tag{11.7}$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^{\ 2} \tag{11.8}$$

dobivamo:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dU}{dt} + \omega_0^{\ 2}U = 0 \tag{11.9}$$

Matematički gledano to je jednadžba identična onoj za slobodno (neprisiljeno) titranje gušenog harmoničkog oscilatora. Ponovit ćemo korake koji nas vode na rješenje. Već smo u prvom semestru obrazložili zašto tražimo rješenje oblika:

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \tag{11.10}$$

Ovdje treba odrediti $\beta\ i\ \omega$ da bi se zadovoljila jednadžba (11.9). $U_0\ i\ \varphi$ su integracijske konstante . One se određuju iz početnih uvjeta. Početni napon U_0 pojavljuje se u sva tri člana (11.9); stoga s njime možemo pokratiti. Ako tada na oblik (11.10) primijenimo binomnu formulu za deriviranje produkta funkcija u (11.9) dobivamo:

$$e^{-\beta t}\begin{bmatrix}(-\beta)^2\ \cos(\omega t+\varphi) + 2(-\omega)(-\beta)\sin(\omega t+\varphi) + (-\omega^2)\cos(\omega t+\varphi) \\ +(-\beta)\cos(\omega t+\varphi)/\tau + (-\omega)\sin(\omega t+\varphi)/\tau + \omega_0^{\ 2}\cos(\omega t+\varphi)\end{bmatrix} = 0 \tag{11.11}$$

Gornji izraz može se skratiti s eksponencijalnim faktorom, a zatim posebno izjednačiti s nulom faktor koji množi kosinus i faktor koji množi sinus u (11.11), jer su to dvije linearno nezavisne funkcije. Tako dobivamo:

$$2\beta\omega - \omega\frac{1}{\tau} = 0 \qquad \text{to jest} \qquad \beta = \frac{1}{2\tau} \tag{11.12}$$

$$\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2 - \frac{1}{2\tau^2} + \omega_0^{\ 2} = 0 \qquad \text{to jest} \qquad \omega^2 = \omega_0^{\ 2} - \frac{1}{4\tau^2} \tag{11.13}$$

S izrazima (11.12) i (11.13) završili smo određivanje rješenja jednadžbe (11.9) u obliku (11.10) odredivši potrebne konstante.

Da bismo pratili ponašanje energije u električnom krugu trebamo znati ponašanje struje:
U gornjem slučaju je struja:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{U(t)}{C}) = \frac{U_0}{C}\left[-\frac{1}{2\tau}\cos(\omega t+\varphi) - \omega\sin(\omega t+\varphi)\right]e^{-t/(2\tau)} \tag{11.14}$$

Kako iz poznate struje i napona možemo izračunati energiju uskladištenu i u induktivitetu i u kapacitoru:

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 \qquad\qquad E_L = \frac{1}{2}LI^2 \tag{11.15}$$

uočavamo da će ukupna električna i magnetska energija biti suma gornjih energija. Prosječnu energiju po periodu titranja možemo računati slično proceduri u prošlom semestru za prigušeni oscilator iz prošlog semestra i ona će imati oblik:

$$< E >= E_0 e^{-t/\tau} \tag{11.16}$$

Gdje je E_0 početna energija kruga. Vrijeme jednog „titraja“ je :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{11.17}$$

Ponavljamo i definiciju Q vrijednosti gušenog oscilatora (ovo naravno nije naboj) :

$$Q = 2\pi \frac{Energija\,u\,sutavu}{Gubitak\,energije\,u\,titraju} = 2\pi \frac{E}{T\left|\frac{dE}{dt}\right|} \tag{11.18}$$

Iz (11.16) vrijedi :

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| = \frac{E}{\tau} \tag{11.19}$$

čijim uvrštenjem u (11.18) uz relaciju (11.17) slijedi:

$$Q = \omega \frac{E}{E/\tau} = \omega\tau \tag{11.20}$$

Također trebamo ponoviti i diskusiju prirode gušenog oscilatora:

$\omega > 0$ podkritično gušenje

$\omega < 0$ nadkritično gušenje

$\omega = 0$ kritično gušenje

U slučaju podkritičnog gušenja analitički oblik rješenja jest oblika (11.10) . u slučaju nadkritičnog gušenja analitički oblik ima hiperbolne funkcije kao što je pokazano u prvom semestru.

KRUGOVI TJERANI S IZMJENIČNIM NAPONOM

Kada je u krugu elektromotorna sila analogna onoj diskutiranoj kod generatora izmjenične struje (znači sinusnog ili kosinusnog oblika), tada umjesto jednadžbe (11.9) na desnoj strani dobivamo umjesto nule nehomogeni član takvog oblika. No umjesto prijelaza direktno na opći slučaj, diskutirat ćemo karakteristične kombinacije kako bi student pratio ulogu kapacitora i induktiviteta svakog posebno u određivanje faznog odnosa među naponom i rezultatnom strujom. Ovdje pak podsjećamo studenta da je prikaz koji slijedi često ograničen na određivanje specijalnih rješenja nehomogene jednadžbe, dok se kompletno rješenje dobiva superpozicijom tog specijalnog rješenja (koje asimptotski nakon dovoljno dugog vremena postaje i konačno rješenje) i općeg rješenja homogene jednadžbe (koje izumire u vremenu s karakterističnim vremenom τ) . Većina udžbenika preskače spomenuti da se to homogeno rješenje itekako upliće u ponašanje kruga efektom kojeg se zove tranzijent, što je zapravo sinonim za miješanje posebnog i općeg rješenja (student treba imati na umu da je specijalno rješenje fiksno, dok se početnim uvjetima prilagođavaju integracijske konstante općeg rješenja) . U tekstu koji slijedi standardizirat ćemo analitički oblik izmjeničnog napona izrazom $\varepsilon_0 \cos\omega t$.

Izmjenični napon priključen na ohmski otpornik:

Treći Kirchhoffov zakon daje:

$$\varepsilon_0 \cos\omega t - RI = 0 \tag{11.21}$$

$$I = \frac{\varepsilon_0 \cos\omega t}{R} \tag{11.22}$$

Ovo je jedina jednostavna konfiguracija. Napon i struja su u fazi i odnos među njihovim trenutnim vrijednostima je onaj iz Ohmovog zakona.

POKUS: relacija između napona i struje prikazat će se osciloskopom.

Izmjenični napon priključen na kapacitor:
Kao i gore pregledom elektromotornih sila imamo:

$$\varepsilon_0 \cos \omega t - \frac{Q}{C} = 0 \tag{11.23}$$

U ovom slučaju odnos vremenske derivacije naboja na kapacitoru i struje ima suprotni predznak. U ovoj konfiguraciji struja puni kapacitor:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{11.24}$$

Kada iz (11.23) izračunamo naboj i uvrstimo ga u (11.24) dobivamo:

$$I = C\frac{d}{dt}(\varepsilon_0 \cos \omega t) = -\varepsilon_0 (C\omega)\sin \omega t = \frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{C\omega}}\cos(\omega t + \pi / 2) \tag{11.25}$$

U (11.25) uočavavamo dvije bitne stvari. Prvo, u odnosu na napon (11.23) struja dolazi u fazi ranije za $\pi / 2$. Grafikon struje je na vremenskoj osi očito pomaknut na lijevo, to jest prema ranijim vremenima, u odnosu na grafikon napona. Drugo, ulogu ohmskog otpora u određivanju struje iz napona (analogon onom iz relacije (11.22)) je preuzeo:

$$\frac{1}{C\omega} \Rightarrow ekvivalent\ ohmskom\, otporu \tag{11.26}$$

Zaključujemo: dodatak kapacitora promijenio je fazni odnos struje i napona; struja prethodi naponu, a ulogu ohmskog otpora preuzima inverzna vrijednost produkta kapaciteta i kružne frekvencije.
POKUS: Na osciloskopu će biti prikazan odnos napona i struje.

Izmjenični napon priključen na induktivitet:
Inspekcija elektromotornih sila daje:

$$\varepsilon_0 \cos \omega t - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{11.27}$$

Odatle slijedi:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos \omega t \tag{11.28}$$

čijim integriranjem izraz za struju:

$$I = \frac{1}{L\omega}\sin \omega t = \frac{1}{L\omega}\cos(\omega t - \pi / 2) \tag{11.29}$$

Uzimajući opet (11.22) kao temelj usporedbe, vidimo da ovaj puta struja u krugu kasni za naponom u fazi za iznos $\pi / 2$, a da je ulogu ohmskog otpora preuzeo izraz:

$$L\omega \Rightarrow efektivni\, otpor \tag{11.30}$$

POKUS: odnos struje i napona je na osciloskopu.

Izmjenični napon priključen na serijski spoj kapacitora i otpornika:
Pregledom svih padova napona imamo:

$$\varepsilon_0 \cos \omega t - RI - Q / C = 0 \tag{11.31}$$

Nadalje i u ovom slučaju je veza vremenske derivacije naboja na kapacitoru pozitivna kao i u prijašnjem primjeru:

$$I = dQ / dt \tag{11.32}$$

Inspirirani gornjim primjerima očekujemo da će analitički oblik struje biti:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{11.33}$$

Naša je zadaća odrediti $\varphi\, i\ I_0$ tako da je s tim vrijednostima (11.31) zadovoljena!
Vremensko ponašanje naboja slijedi iz (11.32) ako se u njega uvrsti pretpostavka (11.33):

$$Q(t) = \int I(t)dt = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) \tag{11.34}$$

Uvrštenjem (11.34) i (11.33) u (11.31) slijedi:

$$\varepsilon_0 \cos\omega t - RI_0\cos(\omega t+\varphi) - \left[\ I_0/(C\omega)\ \right]\sin(\omega t+\varphi) = 0 \tag{11.35}$$

Ako se u (11.35) na $\cos(\omega t+\varphi)\, i \sin(\omega t+\varphi)$ primijeni adicijski teorem i izluči faktore $\cos\omega t\ i\ \sin\omega t$ dobiva se slijedeći izraz:

$$\cos\omega t(\varepsilon_0 - RI_0\cos\varphi - \frac{I_0}{C\omega}\sin\varphi) + \sin\omega t(RI_0\sin\varphi - \frac{I_0}{C\omega}\cos\varphi) = 0 \tag{11.36}$$

Kako su sinus i kosinus dvije linearno nezavisne funkcije, to svaka okrugla zagrada mora zasebno iščeznuti da bi (11.36) vrijedio. Radi iščezavanja faktora uz vremenski sinusnu ovisnost:

$$RI_0\sin\varphi - \frac{I_0}{C\omega}\cos\varphi = 0 \tag{11.37}$$

Odatle dobivamo tangens faznog kuta dijeljenjem (11.37) s $\cos\varphi$:

$$tg\varphi = \frac{1/(C\omega)}{R} \tag{11.38}$$

Također u (11.36) treba iščeznuti faktor uz kosinusnu vremensku zavisnost:

$$\varepsilon_0 - RI_0\cos\varphi - \frac{I_0}{C\omega}\sin\varphi = 0 \tag{11.39}$$

Odatle slijedi

$$\varepsilon_0 = (RI_0\cos\varphi + \frac{I_0}{C\omega}\sin\varphi) = RI_0(\cos\varphi + \frac{1}{RC\omega}\sin\varphi) \tag{11.40}$$

Nadalje korištenjem (11.38) u (11.40) slijedi:

$$\varepsilon_0 = RI_0(\cos\varphi + tg\varphi\sin\varphi) \tag{11.41}$$

Korištenjem veze koju student lako verificira:

$$\cos\varphi = 1/\sqrt{1+tg\varphi^2} \tag{11.42}$$

Da se izlučivanjem $\cos\varphi$ pred okruglu zagradu, zatim korištenjem (11.42) izraz (11.41) najprije transformira u :

$$\varepsilon_0 = RI_0/\cos\varphi \tag{11.43}$$

Iz te relacije se može izraziti apsolutna vrijednost struje tako da se koristi relacija između kosinusa i tangensa (11.42) i za tangens uvrsti eksplicitna vrijednost nađena u relaciji (11.38) .

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}\cos\varphi = \frac{\varepsilon_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+tg\varphi^2}} = \frac{\varepsilon_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\left[1/(C\omega)\right]^2}{R^2}}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2+(\frac{1}{C\omega})^2}} \tag{11.43}$$

Preko izraza (11.38) određen je fazni kut φ , a s (11.43) je izračunana vrijednost apsolutne vrijednosti struje; obadvoje potrebni za konačno rješenje kruga u kojem je na izmjenični napon priključen otpornik i kapacitor izraženo preko (11.33) .
POKUS: odnos struje i napona je na osciloskopu.

Izmjenični napon priključen na serijski spoj otpornika i induktiviteta:
Pregledom padova napona u krugu slijedi:

$$\varepsilon_0\cos\omega t - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{11.44}$$

Procedurom koja na analogan način slijedi proceduru iz kombinacije otpornik i kapacitor uslijedit će analitičko rješenje oblika :

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{11.45}$$

zatim

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}\cos\varphi = \frac{\varepsilon_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+tg\varphi^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}} \tag{11.46}$$

$$tg\varphi = \frac{-L\omega}{R} \tag{11.47}$$

NAPOMENA: ovaj specijalni slučaj se može dobiti i iz općenitijeg slučaja koji ćemo upravo obraditi stavljanjem kapaciteta C u tom općem slučaju jednakim nuli.

Izmjenični napon priključen na serijski spoj ohmskog otpora, kapacitora i induktiviteta:
Pregledom padova napona u krugu slijedi:

$$\varepsilon_0 \cos\omega t - RI - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{11.48}$$

I sada struja puni kapacitor tako da vrijedi:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{11.49}$$

Pretpostavka za analitičko rješenje je i dalje:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{11.50}$$

što uvrštenjem u (11.49) i integracijom daje:

$$Q(t) = \int I(t)dt = \frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) \tag{11.51}$$

Deriviranjem (11.52) po vremenu pak imamo:

$$\frac{dI}{dt} = -I_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{11.52}$$

Uvrštenjem (11.50)-(11-52) u (11.48) dobiva se jednadžba u kojoj se pojavljuju samo nepoznanice $I_0\ i\ \varphi$.

$$\varepsilon_0 \cos\omega t - RI_0\cos(\omega t+\varphi) - \left[\ I_0/(C\omega)\ \right]\sin(\omega t+\varphi) + L\omega I_0\sin(\omega t+\varphi) = 0 \tag{11.53}$$

Združivanjem članova sa sinusnom ovisnosti o vremenu slijedi:

$$\varepsilon_0 \cos\omega t - RI_0\cos(\omega t+\varphi) - I_0\sin(\omega t+\varphi)\left[\frac{1}{C\omega} - L\omega\right] = 0 \tag{11.54}$$

nalazimo da se dva izraza razlikuju samo utoliko da u (11.54) uz član sinusne zavisnosti o vremenu umjesto faktora $I_0(\frac{1}{C\omega})$ stoji faktor $I_0(\frac{1}{C\omega} - L\omega)$. Odmah je jasno da možemo prihvatiti rješenje oblika (11.33) s time da će umjesto izraza za tangens faznog kuta (11.38) sada pisati:

$$tg\varphi = \frac{1/(C\omega) - L\omega}{R} \tag{11.55}$$

a umjesto izraza za apsolutnu vrijednost struje (11.43) će biti:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}\cos\varphi = \frac{\varepsilon_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+tg\varphi^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2+(\frac{1}{C\omega}-L\omega)^2}} \tag{11.56}$$

ZAKLJUČAK

U općenitom krugu izmjeničnog napona za zadani napon $\varepsilon_0 \cos \omega t$ u električnom krugu nastaje rezultanta struja analitičkog oblika:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \tag{11.50}$$

Pri tome je vrijednost faze određena s:

$$tg\varphi = \frac{1/(C\omega) - L\omega}{R} \tag{11.55}$$

Apsolutna vrijednost struje se dobiva s:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}\cos\varphi = \frac{\varepsilon_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+tg\varphi^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2}} \tag{11.56}$$

S time student ima u rukama oruđe za rješavanje općenitog RLC kruga tjeranog izmjeničnim naponom. Ukoliko neki od elemenata nije prisutan u krugu, u općenitom izrazu treba ukloniti član kojim je reprezentiran. Na primjer, ako nemamo kapacitora, ispuštamo sve dijelove u kojima se pojavljuje kapacitet C.

FAZORSKI MODEL („PHASORS“)

U američkim udžbenicima česta je upotreba takozvanih fazora u proračunima RLC krugova. (Ovo je naročito pojačano popularnom serijom „Star Trek“). Metoda fazora vodi vrlo brzo na ispravne rezulutate , a ima i dobar intuitivni oslonac. Uočimo da se izmjenični napon $\varepsilon_0 \cos \omega t$ može interpretirati kao projekcija vektora ε_0, koji kutnom brzinom omega rotira, na x os. Slično vrijedi i za rezultantnu struju.

Iz (11.22) vidimo da je na otporniku struja u fazi s naponom, a da je njena amplituda povezana s naponom Ohmovim zakonom.

Iz (11.25) jasno je da na kapacitoru napon ide iza struje za $\pi/2$, a da se amplituda napona dobiva množenjem struje s faktorom $1/(C\omega)$.

U fazorskom pristupu se koristi činjenica iz Kirchhoffovog zakona da se struja u zatvorenom krugu nigdje ne nagomilava. Stoga je ponašanje struje referentni obrazac to jest ponašanje svih napona promatramo s obzirom na struju oblika: $I_0 \cos \omega t$.

Odnose struje i napona možemo grafički prikazivati kao kruženja vektora sa stalnim pomakom u fazi (u slučaju kombinacije otpornika i kapacitora otpornikov doprinos je u fazi s naponom, a kapacitorov je napon pomaknut u vremenu u smjeru kasnijih vremena za fazni pomak $\pi/2$).

Rezultantu njihovog djelovanja možemo shvatiti kao vektorski zbroj doprinosa dva vektora koji su okomiti, a imaju iznose $I_0 R$ i $I_0/C\omega$. Rezultanta se može shvatiti i kao djelovanje otpora oblika $\sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega})^2}$ što je ekvivalentno rezultatu (11.43). Zapravo, student si može znatno ubrzati rješavanje krugova izmjenične struje slijedećim receptom:

Kapacitoru napon kasni za $\pi/2$; njegov doprinos otporu ide kao $1/(C\omega)$, zavojnica daje napon u faziranije za $\pi/2$ i doprinosom otporu $L\omega$. Očito su radi suprotnih faza doprinosi kapacitora i zavojnice ukupnom otporu suprotnih predznaka. Ako je u krugu prisutan i otpornik , čiji je doprinos fazno okomit na rezultat kapacitora i zavojnice, jasno je da je efektivni rezultantni otpor: $\sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2}$ što je sukladno s (11.56). Tangense pripadnih faza također se lako računa znajući vrijednosti ekvivalentnih otpora i njihove orijentacije. Student to može provjeriti inspekcijom izraza: (11.38),(11.47) i (11.55). Bitno je međutim uočiti da je u našem egzaktom pristupu referentna veličina narinuti napon, a u fazorskom pristupu to je zajednička rezultantna struja. Radi tog su razloga izrazi za fazni kut u dva pristupa suprotnog prdznaka. Mnogo više detalja o fazorskom pristupu može se naći u preporučenom udžbeniku Younga i Freedmana.

POSEBNI SLUČAJ LC KRUGA:

Ukoliko nemamo prisile tjerajućeg napona($\varepsilon_0 = 0$), a u krugu su L i C element, tada imamo slijedeće karakteristične jednadžbe (Kirchhoff+izraz za struju)

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (11.57)$$

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad (11.58)$$

U (11.58) predznak – vodi računa da struja prazni kapacitor. Uvrštenje (11.58) u (11.57) rezultira u:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \qquad (11.59)$$

Što je karakteristična jednadžba harmonijskog titranja karakteristične frekvencije:

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \qquad (11.60)$$

i oblika:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Iz kojeg se preko (11.58) a onda i (11.57) lako računaju i struja i napon. Znači i bez pogona, LC krug će oscilirati frekvencijom danom s (11.60) ako ga se stavi u pogon bilo punjenjem kapacitora bilo postojanjem struje u zavojnici.

REZONANCIJA U LRC KRUGU

Relacija (11.56) nam pokazuje da se mijenjanjem kružne frekvencije izmjenične struje ω uz stalni napon ε_0 za stalne vrijednosti L,R,C karakeristika maksimalna struja dobiva uz uvjet (11.60) . to jest tada nastupa fenomen rezonancije. Također je jasno da sa snižavanjem otpora otpornika taj fenomen postaje sve izraženiji da bi pri iščeznuću ohmskog otpora izraz za struju u rezonantnom slučaju divergirao.

SNAGA IZMJENIČNE STRUJE

Ako imamo opis vremenske zavisnosti struje i napona u krugu:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\omega t \qquad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \qquad (11.61)$$

Znamo i izraz za trenutnu snagu:

$$\frac{dW}{dt} = P(t) = \varepsilon I = \varepsilon_0 I_0 \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi) \qquad (11.62)$$

Jasno je da je snaga periodička funkcija vremena. U slučaju da je faza jednaka nuli, to je cijelo vrijeme pozitivno definitna funkcija. Kako se faza povećava od nule prema $\pi/2$ dio snage u periodu postaje negativan. Negativni dio izjednačuje pozitivni kada faza dosegne vrijednost $\pi/2$. U tom trenutku je prosječna vrijednost snage po periodu nula. Analizirat ćemo sada prosječnu vrijednost snage po periodu kao funkciju razlike u fazi napona i struje.Iz (11.62) s adicionim teoremom imamo:

$$P(t) = \varepsilon_0 I_0 \cos\omega t(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) = \varepsilon_0 I_0 (\cos^2\omega t\cos\varphi - \sin(2\omega t)\frac{\sin\varphi}{2} \quad (11.63)$$

Već smo više puta pokazivali da je prosječna vrijednost sinusne funkcije preko jednog ili više perioda jednaka nuli, a da je prosječna vrijednost kvadrata sinusa ili kosinusa jednaka 1/2. Znači ako u gornjoj relaciji načinimo prosjek snage po periodu, dobivamo:

$$< P(t) >= \frac{1}{2}\varepsilon_0 I_0 \cos\varphi \quad (11.63)$$

Najprije je uočljivo da snaga koja se troši ovisi na vrlo važan način o faznoj razlici između struje i napona. Ako je fazni pomak četvrtina ili tri četvrtine perioda, snaga se ne troši. To na primjer karakterizira LC krug. S druge strane faktor 1/2 se dijeli između vršnog napona ε_0 i vršne struje I_0.

$$< P(t) >= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi \quad (11.64)$$

Faktore s drugim korijenima iz dva u nazivniku zovemo redom efektivnim naponom i efektivnom strujom. Ti faktori $1/\sqrt{2}$ uz vršne vrijednosti struje i napona imaju vrlo jednostavnu interpretaciju. Naime njihovo je porijeklo u proceduri računanja korijena iz kvadrata prosječne vrijednosti (Root of mean square value:r.m.s) računane po periodu titranja. Tako je na primjer naša izjava da upotrebljavamo komercijalni napon od 220 Volta zapravo izjava da je vršni napon 311 Volta.

E L E K T R I Č N A P O L J A U T V A R I M A

Pri pisanju Maxwellovih jednadžbi smještali smo naboje i struje u zrakoprazni prostor. Tvari , međutim, imaju svoje konstituente koji imaju određena električna svojstva, pa općenito unutar tvari postoje unutrašnja električna polja koja do sada nismo razmatrali. S jedne strane želimo, koliko je moguće, objasniti ta unutrašnja polja preko znanja o konstituentima materijala. S druge strane , u makroskopskom pristupu, želimo modificirati naše izraze u Maxwellovim jednadžbama pomoću jednostavnih konstanti koje u suštini uzimaju o obzir specifična svojstva materijala i opisuju električne fenomene u materijalima formalizmom koji je sličan Maxwellovim jednadžbama u vakuumu. Problem kojim započinjemo jest slijedeći. Konstituent materijala ima električna svojstva opisana svojom raspodjelom naboja (gustoća naboja $\rho(\vec{r})$ u lokaliziranom dijelu prostora koji je mali u usporedbi s dimenzijama prostora u kojem računamo polje) . Pokazuje se takozvanim multipolnim razvojem da se svojstva takve „grudice naboja" dadu parametrizirati s nekoliko parametara. Prirodno, što precizniji opis polja trebamo, potrebno je otići na veći broj članova opisa; situacija slična razvoju funkcije u red potencija.

MULTIPOLNI RAZVOJ LOKALIZIRANE RASPODJELE NABOJA

Poći ćemo od poznatog izraza za potencijal koji potječe od poznate raspodjele gustoće naboja:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \quad (3.20)$$

Nas zanima polje na velikoj udaljenosti od „grudice naboja" koju smještamo u blizinu ishodišta. Koordinate na kojima ima naboja su označene kao $\vec{r}\,'$, a koordinate u kojima nas zanima polje su označene s $\vec{r}$ kako je to očito iz (3.20). No prema gornjim napomenama mi radimo u režimu:

$$|\ \vec{r}\ | >> |\vec{r}\,'| \quad (12.1)$$

Izrazit ćemo najprije kvadrat modula razmaka točke u grudici i točke u dalekom polju:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta = r^2(1+\frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta) \qquad (12.2)$$

gdje je ϑ kut između smjerova vektora $\vec{r}\ i\ \vec{r}\,'$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}(1+\frac{r'^2}{r^2} - 2rr'\cos\vartheta)^{-1/2} \qquad (12.3)$$

Ponovit ćemo sada karakteristike binomnog razvoja kada je x malen prema 1 :

$$(1+x)^y = 1 + \binom{y}{1}x + \binom{y}{2}x^2 + ... \qquad (12.4)$$

gdje su koeficijenti:

$$\binom{y}{n} = \frac{y(y-1)...(y-n+1)}{n!} \qquad (12.5)$$

Primjenom izraza za binomni razvoj možemo okruglu zagradu u (12.3) razviti kako slijedi:

$$\begin{aligned}(1-2rr'\cos\vartheta+\frac{r'^2}{r^2})^{-1/2} &= 1+(-\frac{1}{2})(-2\frac{r'}{r}\cos\vartheta+\frac{r'^2}{r^2})+\frac{3}{8}(-2\frac{r'}{r}\cos\vartheta+\frac{r'^2}{r^2})^2+... \\ &= 1+\frac{r'}{r}\cos\vartheta+\frac{r'^2}{r^2}(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2\vartheta)+...\end{aligned} \qquad (12.6)$$

U razvoju po potencijama r'/r zaustavit ćemo se na kvadratnom članu. U principu razvoj se nastavlja i po višim potncijama od r'/r kao što ćemo još jednom spomenuti . Ako aproksimativni izraz (zaustavljen na kvadratnom članu r'/r) iz (12.6) uvrstimo najprije u (12.3), a potom u (3.20) dobivamo:
dobivamo :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{r} + \int\frac{r'\cos\vartheta\rho(\vec{r}\,')dV'}{r^2} + \int\frac{r'^2(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2\vartheta)\rho(\vec{r}\,')dV'}{r^3} + ...\right] \qquad (12.7)$$

ili preko pokrata :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + ...\right] \qquad (12.8)$$

Rezultati integriranja iz (12.7) imaju svoja posebna karakteristična imena u multipolnom razvoju (po potencijama od r'/r, koji je prema (12.1) mala veličina) .

$K_0 = \int\rho(\vec{r}\,')dV' = Q = ukupni\ naboj\ nakupine$ =monopolni član (12.9)

$K_1 = \int r'\cos\vartheta\rho(\vec{r}\,')dV' =$ dipolni član (12.10)

$K_2 = \int r'^2(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2\vartheta)dV' =$ kvadrupolni član (12.11)

Dalje slijede sekstupolni , oktupolni …članovi dobiveni sa sve višim potencijama omjera r'/r . Svrha je znači multipolnog razvoja pojednostaviti opis utjecaja konstituenta materijala koji ima kompleksnu raspodjelu naboja u sebi jednim ili eventualno dvoma članovima razvoja koji ne iščezavaju, a koji za velike udaljenosti dominiraju , a ujedno daje relativno jednostavnu zamjenu za opis električnog polja u velikoj udaljenosti. Na primjer, ako konstituent ima ukupni naboj različit od nule, polje u daljini će se ponašati kao obično kulonsko polje. Ako je konstituent građen tako kao da je sastavljen od dvije grudice naboja suprotnih predznaka, tog kulonskog utjecaja ne će biti nego će dominirati dipolni član. U slučaju da i dipolni dio opisa iščezava (što je opisano s (12.10), analizirat ćemo vrijednost kvadrupolog člana… Prvi neiščezavajući član u razvoju dominirat će poljem na velikoj udaljenosti.

ELEKTRIČNI DIPOL

Egzaktna definicija potencijala električnog dipola jest:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int r'\cos\vartheta\rho(\vec{r}\,')dV' \tag{12.12}$$

Uz pokrate:

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{r}\vec{r}\,'}{rr'} \tag{12.13}$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')dV' \tag{12.14}$$

potencijal (12.12) se može pisati i kao :

$$U(\vec{r}) = \frac{\vec{r}\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{12.15}$$

Vektor (12.14) je dipolni moment nakupine naboja opisane gustoćom naboja ρ. Lako se pokazuje da u slučaju da je integral gustoće naboja jednak nuli (nema monopolnog člana) , tada dipolni moment ne zavisi od izbora položaja ishodišta. (naime definicija novog ishodišta unosi vektor razmaka dva ishodišta pomnožena s integralom gustoće naboja, koji je integral jednak nuli).

Najjednostavniji model dipola: uzmimo da se dipol sastoji iz naboja +q i –q koji su lokalizirani na zanemarivo malim dimenzijama. Neka su njihovi položaji $\vec{r}_+ \; i \; \vec{r}_-$. Tada je dipolni moment prema (12.14):

$$\vec{p} = \vec{r}_+ \int_{oko\,+q} \rho(\vec{r}\,')dV' + \vec{r}_- \int_{oko\,-q} \rho(\vec{r}\,')dV' = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \equiv q\vec{s} \tag{12.16}$$

U tom jednostavnom modelu je dipolni moment jednak naboju jednog od dva suprotna naboja pomnoženom s razmakom naboja. Nadalje, iz (12.14) je jasno da sferno simetrična raspodjela naboja nema dipolnog momenta.

Ako želimo izračunati električno polje dipola, zgodno je skalarno polje njegovog potencijala raspisati prema (12.15):

$$U(\vec{r}) = \frac{\vec{r}\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xp_x + yp_y + zp_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{12.17}$$

Pokazat ćemo izgled električnog polja dipola računanjem njegove x komponente, koju ćemo napisati u formi iz koje će biti jasno kako izgledaju i ostale dvije i ukupni izraz:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(xp_x + yp_y + zp_z)(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[p_x\frac{1}{r^3} + (\vec{r}\vec{p})(-\frac{3}{2})\frac{1}{r^5}\cdot 2x\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-r^2 p_x + 3(\vec{r}\vec{p})x\right] \end{aligned} \tag{12.18}$$

Skupljanjem svih triju komponenti električnog polja imamo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-r^2\vec{p} + 3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} \tag{12.19}$$

Utjecaj sile na dipol u električnom polju:

Ukoliko se radi o homogenom električnom polju, jasno je da je suma sila na dipol jednaka nuli, jer koliko polje vuče jedan naboj u jednom smjeru, isto tolikom silom tjera drugi naboj u drugom smjeru. Međutim, postoji mehanički moment, kojeg u našem jednostavnom modelu očekujemo kao rezultat efekta para sila. U tu svrhu napisat ćemo (12.14) modificirano:

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')dV' = \int \vec{r}\,'dq' \qquad (12.20)$$

Diferencijal momenta sile na naboj dq' je:

$$d\vec{M} = \vec{r}\,'\times d\vec{F} = \vec{r}\,'\times \vec{E}dq' = \vec{r}\,'dq'\times \vec{E} \qquad (12.21)$$

$$\vec{M} = \int \vec{r}\,'dq'\times \vec{E} = (\int \vec{r}\,'dq')\times \vec{E} = \vec{p}\times \vec{E} \qquad (12.22)$$

Moment sile električnog polja na električni dipol je vektorski produkt dipola i polja!
Student može lako pokazati da u aproksimaciji malih kuteva, dipol malo odmaknut od smjera polja oscilira kao harmonički oscilator oko smjera polja zahvaljujući upravo momentu sile (12.22) .

Potencijalna energija dipola u homogenom polju.
Diferencijal potencijalne energije za unutrašnju silu sistema u slučaju homogenog polja jest:

$$dE_{pot} = -E_{elektr}r'\cos(\vec{r}\,',\vec{E}_{elektr})dq' = -\vec{E}_{elektr}\cdot \vec{r}\,'dq' \qquad (12.23)$$

Integrirajući (12.23) (uz konstantno električno polje dobivamo prema (12.20):

$$E_{pot} = -\vec{p}\cdot \vec{E} \qquad (12.24)$$

Možemo sada iskoristiti znanje električnog polja dipola (12.19) i potencijalnu energiju dipola u električnom polju da napišemo izraz za potencijalnu energiju para dva dipola:

$$E_{pot} = -\vec{p}_2\cdot \vec{E}_{elektr}(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2\vec{p}_1\vec{p}_2 - 3(\vec{r}\vec{p}_1)(\vec{r}\vec{p}_2)}{r^5} \qquad (12.24)$$

Ovo je inače analitički oblik interakcije i za interakciju spinova dva nukleona i dio opisa nuklearne sile.

ATOMSKI I MOLEKULSKI ELEKTRIČNI DIPOLNI MOMENTI

U nekim materijalima, usprkos električne neutralnosti atoma i molekula, ti konstituenti mogu imati svojstva električnih dipola. Dipolni moment definiran s (12.14) može biti statičan ili ga se može inducirati vanjskim električnim poljem. Radi svojstva sferne simetrije atomi nemaju statičnih dipolnih momenata. S druge strane, molekule koje nemaju takvu simetriju mogu imati statični električni dipolni moment. Najjednostavniji takav slučaj je molekula vode. Naime, lako je razumljivo da atomi raznih elemenata mogu svojim svojstvima malo privući elektronski oblak susjednih atoma u molekuli. Prema vodiku masivni i s 8 puta većim nabojem kisik , u strukturi koja nije osno simetrična, taj kisik osigurava postojanje velikog električnog dipolnog momenta vode. Statične dipolne momente se tabelira i ne ćemo objašnjavati njihovu vezu sa molekularnom strukturom. Studentima će se dati ideja o nastanku induciranog dipolnog momenta atoma čiji elektronski oblak je (dok nema vanjskog električnog polja) sferno simetričan.
U četvrtom semestru ćemo upoznati temelje građe atoma. Vrlo grubo atom ima pozitivno nabijenu masivnu jezgru dimenzija $10^{-15}\,m$ koja je oko 2000 puta teža od oblaka svojih elektrona. Elektronski oblak je dimenzija oko $10^{-10}\,m$. Primijenimo li snažno vanjsko električno polje, težište elektronskog oblaka će se odmaknuti od položaja jezgre u smjeru suprotnom od vanjskog polja. Razmak među centrima naboja oblaka i jezgre računamo ovim modelom. Poznato je iz elektrostatike da naboj smješten u sferno simetričnu raspodjelu naboja osjeća silu samo od naboja razmještenog na radijusima manjim od svojeg (rezultantno polje sfere naboja u unutrašnjosti je nula!). Ako je atomski radijus a, a pomak od jezgre b, tada je

naboj na koji postoji utjecaj privlačenja jezgre naboj u kugli polumjera b. Ako u atomskom oblaku pretpostavimo stalnu gustoću raspodjele naboja, tada je omjer volumena naboja koji osjeća privlačenje jezgre i ukupnog naboja: $(b/a)^3$. Tako je efektivni naboj na koji djeluje vanjsko polje: $e(b/a)^3$. Tako je efektivno polje atoma, koje uravnotežuje vanjsko polje:

$$E_{at} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e(b/a)^3}{b^2} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} b = E_{vanjsko} \qquad (12.25)$$

Kako je u našem jednostavnom modelu (12.16) dipolni moment dan s

$$p = eb \qquad (12.26)$$

Iz gornje dvije relacije slijedi:

$$p = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_{vanjsko} \qquad (12.27)$$

Koeficijent proporcionalnosti između induciranog dipolnog momenta i vanjskog polja se naziva atomska polarizibilnost.

ELEKTRIČNI POTENCIJAL I POLJE POLARIZIRANOG MATERIJALA

Na temelju našeg poznavanja svojstava polja i potencijala električnog dipola možemo razmatrati unutrašnja polja materijala koji su sastavljeni od elementarnih dipola. Radi jednostavnosti razmatrat ćemo konfiguracije u kojima su svi dipoli orijentirani u istom smjeru. Temeljna veličina u makroskopskom promatranju jest *POLARIZACIJA* . Po definiciji to je električni dipolni moment jedinice volumena:

$$\vec{P}(\vec{r}) \equiv \frac{(\sum \vec{p}_i)_{\Delta V}}{\Delta V} \qquad (12.28)$$

U (12.28) je brojnik suma dipolnih momenta svih dipola unutar volumena ΔV . Odatle je jasno da za volumski element ΔV diferencijal električnog dipolnog momenta iznosi:

$$\Delta\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})\Delta V \qquad (12.29)$$

Iako je oblik potencijala dipola relativno kompleksan (na primjer nije izotropno raspoređen po smjerovima), potencijal nakupine homogeno polariziranog materijala može se predstaviti u vrlo jednostavnom obliku. Da to pokažemo , analizirat ćemo doprinos potencijalu stupa polarizirane materije orijentiranog duž smjera vektora polarizacije (duž smjera jednako usmjerenih dipola konstituenata). Oznake u crtežu su slijedeće. Koordinata duž osi stupa kružnog presjeka je z. ishodište koordinatnog sustava je na osi z. Prikloni kut položaja $\vec{r}$ u kojem određujemo ukupni potencijal stupa u odnosu na os stupa je ϑ. Diferencijal dipolnog momenta materijala je prema (12.29) uz diferencijal volumskog elementa

$$\Delta V = \Delta a \Delta z \qquad (12.30)$$

(Δa je diferencijal površine okomit na z os, Δz je debljina tog elementa duž osu z),

$$\Delta\vec{p} = \vec{P}\Delta a \Delta z \qquad (12.31)$$

Sada možemo napisati doprinos potencijalu stupa:

$$dU = \frac{\vec{r}d\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{rdp\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{P\Delta a\Delta z\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{P\Delta a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-dr}{r^2}\right) = \frac{P\Delta a}{4\pi\varepsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (12.32)$$

Ako (12.32) integriramo od sloja 1 do sloja 2 duž stupa polariziranog materijala imamo:

$$U = \frac{P\Delta a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2} - \frac{P\Delta a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1} \qquad (12.33)$$

Gdje su r_1 *i* r_2 udaljenosti slojeva 1 i 2 od točke u kojoj želimo izračunati potencijal.

Očito dimenzijski faktor $P\Delta a$ se može interpretirati kao naboj na površini Δa. Tako se P može interpretirati kao površinska gustoća naboja σ. Potencijal stupa se sveo na potencijal gornje površine nabijene efektivnim nabojem površinske gustoće +P minus potencijal donje površine nabijene istim efektivnim nabojem suprotnog predznaka. Iako na prvi pogled izgleda da se tim izrazom mogu računati samo potencijali izvan polariziranog materijala, radi konzervativnosti električne sile (rad neovisan o putu), izraz vrijedi i u unutrašnjosti materijala za tzv. Srednje polje. (naime, ovaj postupak ne určunava činjenicu da se na putu integracije može naći singularitet naboja ; on vrijedi samo za srednje polje u kojem se singulariteti izbjegavaju).

ELEKTRIČNO POLJE POLARIZIRANE KUGLE

Polazimo od kugle napunjene permanentnim dipolima. Svi su dipoli orjentirani duž z-osi koordinatnog sustava, a kut ϑ se mjeri od te z osi. Ako je Δa iznos površine vertikalnog stupića analognog onom iz gornjeg razmatranja, tada element površine na kugli koji stoji na kraju stupića pri površini kugle ima iznos $\Delta a / \cos\vartheta$. Kako je gustoća dipola po pretpostavci stalna to je površinska gustoća naboja:

$$\sigma = P\cos\vartheta \qquad (12.34)$$

Integriranjem izraza analognog (12.33) uz upotrebu modificirane gustoće (12.34) dobili bismo rezultantni potencijal. No postoji i jednostavniji postupak. Kuglu napunjenu dipolima možemo zamisliti i kao dvije kugle nabijene suprotnim nabojima koje su razmaknute za razmak koji postoji u elementarnom konstitutivnom dipolu (označimo ga sa s) . Otprije znamo da se potencijal jednoliko nabijene kugle može zamijeniti izvan kugle izrazom za potencijal sveukupnog naboja smještenog u centru kugle. Nadalje potencijal dviju kugala sveden na potencijal dviju točaka razmaknutih za s . Tako je dipolni moment cijele kugle:

$$Qs = Nqsr_0^{\ 3} 4\pi / 3 \qquad (12.35)$$

gdje je N gustoća dipola, q je elementarni naboj prisutan u elementarnom dipolu a r_0 je radijus kugle.
S druge strane je ukupni dipolni moment kugle produkt njenog volumena i iznosa polarizacije:

$$Qs = \mathrm{Pr}_0^{\ 3} 4\pi / 3 \qquad (12.36)$$

Iz (12.15) i (12.36) možemo dobiti potencijal izvan kugle:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \vec{\mathrm{P}}\mathrm{r}_0^{\ 3} 4\pi / 3 \qquad (12.37)$$

Na površini kugle , kada su dva radijusa u (12.37) jednaka većina se vwveličina pokrati i ostaje:

$$U_{na\ površini} = \frac{Pz}{3\varepsilon_0} \qquad (12.38)$$

Sada imamo analitički izraz za potencijal na površini, koji izraz očito zadovoljava Laplaceovu jednadžbu. Po teoremu o jedinstvenosti rješenja, kako jedno rješenje imamo, ono vrijedi i u unutrašnjosti kugle. Znajući relaciju između potencijala i polja preko gradijenta (a potencijal zavisi samo o z koordinati) slijedi:

$$Elektr\ polje : -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \qquad (12.39)$$

Električno polje izvan kugle ima naravno oblik zadan s analitičkim oblikom (12.19) gdje se za dipol uvrštava vrijednost prema (12.36).

KAPACITOR ISPUNJEN DIELEKTRIČNOM TVARI

Pokusom smo demonstrirali da se umetanjem dielektrika (izolatora sastavljenog od dipola) među ploče kapacitora smanjuje napon na njima, a to znači i električno polje u međuprostoru. U vakuumu smo imali jednostavne veze između potencijala i polja te između površinske gustoće naboja i polja :

$$U = El_{polje} \cdot d \qquad (12.40)$$

gdje je d razmak ploča planparalelnog kapacitora.

$$El_{polje} = \sigma / \varepsilon_0 \qquad (12.41)$$

Jasno je iz (12.41) da se električno polje moglo promijeniti ako se nešto dogodilo sa površinskom gustoćom naboja σ. Već smo u prethodnom tekstu pokazali da se električna polja izvan dielektrika mogu računati pomoću vrijednosti polarizacije dielektrika, koja je na primjer u izrazu (12.33) poprimila ulogu površinske gustoće naboja. Pokazat ćemo na jednostacnom modelu očiglednost takve interpretacije. Nacrtajmo situaciju dielektričnog materijala neposredno uz pozitivno nabijenu ploču kapacitora. Idealno, svi negativni krajevi elementarnih dipola orijentirat će se u najbližem sloju dielektrika prema pozitivnoj ploči. Možemo proračunati površinsku gustoću naboja tih negativnih krajeva. Pretpostavljamo da je razmak naboja u elementarnom dipolu s , a da je naboj na kraju elementarnog dopla q . Nadalje polarizacija P je dipolni moment jedinice volumena dielektrika. To znači:

$$P = Nsq \qquad (12.42)$$

Gdje je N volumska gustoća dipola u dielektriku. Ako se koncentriramo na gornju površinu sloja dielektrika za volumen debeo s a površine Δa, broj dipola u njemu je $Ns\Delta a$. Ako taj broj pomnožimo s nabojem q koji nosi gornji kraj dipola, dobivamo ukupni naboj na površini Δa:

$$\Delta Q = qNs\Delta a \qquad (12.43)$$

Dijeljenjem tog naboja s pripadnom površinom dobivamo površinsku gustoću negativnih naboja neposredno u pozitivnu ploču kapacitora.

$$\sigma = Nqs = P \qquad (12.44)$$

Tako polarizacija ima dvojaki smisao. S jedne strane ona je dipolni moment jedinice volumena dielektrika (12.29) , a s druge strane ona predstavlja površinsku gustoću koja se pojavljuje na kontaktnoj površini dielektrika s nabijenim vodičem. Student mora uočiti da naboji dielektrika ne mogu migrirati, oni se samo orjentiraju. Sada imamo odgovor na fenomen slabljenja polja kada u kapacitor uguramo dielektrik. Originalnu gustoću naboja koju na pozitivnoj ploči u vakuumu postoji: $\sigma^{+}{}_0$ djelomično umanjuje gustoća negativnih naboja (12.44). Tako je ukupna gustoća naboja:

$$\sigma_{ukupno} = \sigma^{+}{}_0 - \sigma = \sigma^{+}{}_0 - P \qquad (12.45)$$

Dijeljenjem (12.45) s ε_0 dobiva se i izraz za ukupno električno polje.

$$E_{ukupno} = E_{vakuum} - P / \varepsilon_0 \qquad (12.46)$$

Gornji izraz je napisan preko apsolutnih izraza, no kako su sve veličine usmjerene duž smjera vanjskog električnog polja, relacija (12.46) vrijedi na pisana i u vektorskoj formi:

$$\vec{E}_{vakuum} = \vec{E}_{ukupno} + \vec{P} / \varepsilon_0 \qquad (12.47)$$

Interpretacija gornjeg izraza je slikovita: vanjsko električno polje se troši dijelom na polarizaciju medija a preostali dio je polje prisutno u mediju. Od sada ćemo veličine u vakuumu označavati kratko s indeksom 0 a veličine u mediju ne će imati indeksa. Tako na primjer , radi stalnosti naboja na pločama, kapacitora vrijedi:

$$CU = C_0 U_0 \qquad (12.48)$$

Možemo sada slijediti kapacitet kapacitora s dielektrikom u sebi kroz niz relacija do definicije veličina specifičnih za dielektrike:

$$C = \frac{C_0 U_0}{U} = C_0 \frac{E_0}{E} = C_0 \frac{E + P/\varepsilon_0}{E} = C_0 (1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}) \equiv C_0 \varepsilon_r \equiv C_0 (1 + \chi_r) \qquad (12.49)$$

Nove veličine uvedene definicijama u (12.49) su ε_r (relativna permitivnost) i χ_r relativna susceptibilnost. Iz definicijskog slijeda (12.49) je jasno da vrijedi:

$$\chi_r = \frac{P}{\varepsilon_0 E} \qquad (12.50)$$

i također:

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_r \qquad (12.51)$$

Ponekad se vakuumska vrijednost i relativna vrijednost kombiniraju u jednu:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad (12.52)$$

Ovo je na primjer zgodno pri izražavanju kapaciteta kapacitora. Tamo se na mjestu vakuumske vrijednosti piše jednostavno produkt (12.52). Iz (12.49) jasno je da ε_r jednostavno izražava faktor pojačanje kapaciteta kapacitora, kada se u njega unese neki dielektrik. Fizikalno značenje χ_r najbolje se vidi iz (12.50) kao omjer polarizacijskog efekta i preostalog polja.

GAUSSOV ZAKON ZA POLJA U DIELEKTRICIMA

Iz slijeda relacija (12.49) uočavamo i vezu vanjskog polja i polja u dielektriku:

$$E = E_0 / \varepsilon_r \qquad (12.53)$$

Naravno , reći da ε_r mjeri faktor povećanja kapaciteta ulaganjem dielektrika (12.49) istovremeno povlači da ε_r mjeri atenuaciju električnog polja koja nastupa istovremeno!
Tako Coulombov zakon doživljava svoju modifikaciju i sada prvi puta glasi drukčije nego do sada:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (12.54)$$

Računanjem toka preko (12.54) dobivamo promijenjeni Gaussov zakon:

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon} \qquad (12.55)$$

Preko Gaussovog teorema imamo i mikroskopsku verziju Gaussovog zakona, to jest modifikaciju Maxwellove jednadžbe:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (12.56)$$

ODNOS SLOBODNOG I VEZANOG NABOJA

Uobičajeni naboji koje prenosimo vodičima ili kontaktom su slobodni. Atomski i molekularni dipoli manifestiraju kroz polarizaciju neka svojstva naboja pa i proizvode polja. Bitna je razlika, da su oni vezani unutar konstituentove mikrostrukture i ne transportiraju se. Ipak ćemo vidjeti da se pri promjenama polarizacije događaju promjene koje su ekvivalentne pojavi struja. Nadalje, reduciranje električnog polja u prostoru oko naboja , za slučaj da je taj prostor ispunjen dielektrikom za slučaj jednog izoliranog naboja lako vizualiziramo. Oko naboja u radijalnom polju dipoli se orijentiraju , s time da uz plohu centralno postavljenog pozitivnog naboja ide sloj dipola potpuno analogno situaciji u kapacitoru. Ponavljajući ideju s površinskim gustoćama slobodnog naboja i negativnih krajeva dipola, koji doprinose površinsku gustoću naboja iznosa polarizacije P, dobivamo rezultat kao i prije (12.45) i (12.47) što nas vodi na rezultate (12.54) i (12.56) . Ako želimo Maxwellovu jednadžbu pisati i dalje preko slobodnog naboja, možemo poći od (12.47) pomnožene s ε_0 :

$$\varepsilon_0\vec{E}_0 = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad (12.57)$$

Kako divergencija lije strane vodi na gustoću slobodnog naboja, uvodi se nova veličina:

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E}_0 = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad (12.58)$$

Uzimanjem divergencije polja D u(12.58) je očito prema definiciji tog polja:

$$div\vec{D} = \rho_{slobodno} \qquad (12.58a)$$

Time smo dobili prvu modifikaciju Maxwellovih jednadžbi. Utjecaj slobodnih naboja se ne manifestira direktno kao divergencija električnog polja E nego nove veličine vektorskog polja D. Znači uzimanje divergencije lijeve strane (12.58) rezultira u gustoći slobodnih naboja (ovo znamo otprije) . Analogno

$$div\varepsilon_0\vec{E} = \rho_{ukupno} \qquad (12.59)$$

Uzimanjem divergencije ukupnog izraza (12.58) i korištenjem znanja o divergencijama vakuumskog i ukupnog polja slijedi:

$$\rho_{slobodno} - div\vec{P} = \rho_{ukupno} \qquad (12.60)$$

Očita je interpretacija :

$$\rho_{vezano} = -div\vec{P} \qquad (12.61)$$

PROCES POLARIZACIJE DIELEKTRIKA ZAHTIJEVA ULAGANJE RADA

U dijelu gradiva o kapacitora u vakuumu (5.40) smo pokazali da je energija uložena u stvaranje polja u kapacitor:

$$Energija_0 = \frac{1}{2}C_0U_0^{\ 2} \qquad (12.62)$$

Indeks nula označava da se veličine odnose na vakuumske uvjete. Istom procedurom, a pretpostavljajući da se kapacitor diže na isti napon kao i prije, imamo za energiju uloženu ako je kapacitor ispunjen dielektrikom:

$$Energija_{s\ dielektrikom} = \frac{1}{2}CU_0^{\ 2} = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0U_0^{\ 2} \qquad (12.63)$$

Kako je relativna permitivnost veća od jedan, jasno je da je za isti napon u dielektriku uložena dodatna energija. Postavlja se potreba obrazložiti tu razliku energija. Koristeći izraz za gustoću energije uskladištene u postojanje električnog polja (3.64) mogli smo napisati i slične izraze preko električnih polja:

$$Energija_0 = \frac{\varepsilon_o}{2}E^{\ 2}V \qquad (12.64)$$

Gdje je V volumen među kapacitorskim pločćama. Slično vrijedi (uzimajući u obzir povećanje kapaciteta radi dielektrika (12.49) :

$$Energija_{s\ dielektrikom} = \frac{\varepsilon_o}{2}\varepsilon_r E^{\ 2}V \qquad (12.65)$$

Očito se energija električnog polja kapacitora napunjenog dielektrikom (12.65) može rastaviti na dio koji bi postojao kada bi među pločama bio vakuum (12.64) i dio koji je rezultat ulaganja energije u polarizaciju (razlika između (12.65) i (12.64) :

$$Energija_{s\,dielektrikom} = \frac{\varepsilon_o}{2} E^{\,2} V + \frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2 V \qquad (12.66)$$

Faktor ispred volumena V u drugom članu desne strane relacije (12.66) treba objasniti kao gustoću energije, koja se ulaže u dielektrik tijekom polarizacije. To ćemo učiniti promatrajući diferencijala rada kojeg vanjsko polje čini pri orijentaciji dipola:

$$dW_1 = q\vec{E}\ d\vec{s}_+ - q\vec{E}\ d\vec{s}_- = q(d\vec{s}_+ - ds_-)\vec{E}\ = \vec{E}\ d\vec{p} \qquad (12.67)$$

Odatle se može izračunati gustoća energije uložene samo tijekom polarizacije:

$$\frac{dW}{\Delta V} = \frac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{E}\ d\vec{p}_i}{\Delta V} = \vec{E}\ d\vec{P} \qquad (12.68)$$

U čitanju (12.68) student treba uočiti da je početna veličina diferencijal rada normiran na jedinični volumen. Nadalje, iz (12.47) slijedi:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \qquad (12.69)$$

Njenim diferenciranjem imamo uvrštavanjem u (12.68):

$$\frac{dW}{\Delta V} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{1}{2} d(E^2) \qquad (12.70)$$

Time smo dokazali da drugi član u (12.66) možemo objasniti radom električnog polja na dipolima dielektrika.

KAKO RADI MIKROVALNA PEĆNICA

Rad mikrovalne pećnice je usko povezan s razmatranjima koja smo imali oko polarizacije. Već smo spomenuli da molekula vode ima električni dipolni moment. Ako električno polje mijenja svoj smjer, kako je slučaj na primjer kod izmjenične struje, elementarni dipoli će se preorjentirati. Može se studirati frekvencijska ovisnost relativne permitivnosti. Naime, kada je frekvencija titranja polja relativno niska, dipoli se mogu preokretati i na toj frekvenciji će ε_r imati svoju statičnu vrijednost. Kada frekvencija titranja postane previsoka, dipoli je ne će moći slijediti i ostat će „ukopani“ u mediju. Jasno je da između ova dva područja postoji dio u kojem se relativna permitivnost mijenja od svoje statične vrijednosti na jedinicu. U tom području imamo efekt „zapinjanja“ dipola o okolinu. Pri tom „zapinjanju“ dipoli prenose energiju titrajućeg elektromagnetskog polja na medij u kojem se nalaze. Hrana ima molekule vode. Voda ima električne dipole. U području kada relativna permitivnost tekuće vode počinje padati prema jedinici, molekule vode griju ostatak hrane. Fizičari također mogu znati da je ta kritična frekvencija različita za tekuću vodu i led!!! Ime mikrovalna pećnica potječe od frekvencije na kojoj ona radi; to je područje takozvanih mikrovalova.

JOŠ JEDNA MODIFIKACIJA MAXWELLOVIH JEDNADŽBI RADI POLARIZACIJE

Mijenjanje polarizacije u vremenu znači da se dipoli reorijentiraju . Drugim riječima vrhovi dipola s nabojima se miču. Znači naboji se miču. Znači postoji struja. Ako se dipol ppokreće (bilo rasteže bilo mijenja smjer, mijenja se položaj naboja. To znači da se svaka promjena dipola $d\vec{p}$ reflektira u struji:

Po našoj definiciji gustoće struje imamo:

$$\vec{j} = \frac{\sum\limits_i \frac{d}{dt} q_i \vec{r}_i}{\Delta V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum\limits_j q(\vec{r}_{j+} - \vec{r}_{j-})}{\Delta V}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum\limits_j \vec{p}_j}{\Delta V}\right) = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (12.71)$$

Znači da je vremenska derivacija polarizacija istovremeno gustoća struje vezanih naboja. To znači da našu Maxwellovu relaciju u kojoj se pojavljuje gustoća struje trebamo modificirati.

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}_{slobodno} + \mu_0 \frac{d\vec{P}}{dt} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{12.72}$$

ovo pak možemo dalje pisati preko veličine D:

$$rot\vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{slobodno} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \tag{12.73}$$

Tako imamo i drugu modifikaciju Maxwellovih jednadžbi ; ponovno ulogu električnog polja (kada smo unutar materijala) preuzima novo polje D podijeljeno s ε_0 .

M A G N E T S K A   P O L J A   U   T V A R I M A

Bogatstvo fenomena s magnetskim poljima u tvarima je veće od onog s električnim poljima. U to se uvjeravamo jednostavnim pokusom. Pomoću relativno snažnog elektromagneta se uspostavlja jako magnetsko polje. Ako su polovi željezne jezgre elektromagneta konusnog profila s osi simetrije konusa paralelne smjeru polja, tada je polje nehomogeno. To znači da, uzimajući os konusa kao os simetrije, polje opada kako se udaljavamo od osi. Stavljanjem različitih materijala izduženo oblikovanog profila, uočavaju se slijedeći fenomeni. Paramagnetski predmeti postavljaju se paralelno osi magnetskog polja. dijamagnetski predmeti postavljaju se okomito na os cilindrično simetričnog , ali radijalno opadajućeg magnetskog polja. Feromagnetski predmeti, od kojih je najznačajniji predstavnik željezo, smjerom postavljanja reagiraju kao i paramagnetski, no njihova reakcija na polje je mnogostruko snažnija od paramagnetskog materijala. Kvalitativno možemo konstatirati da se paramagnetski (a mnogostruko snažnije i feromagnetski) materijali smještaju u prostor maksimalne jakosti magnetskog polja i slijede u orijentaciji očekivanja analogna ponašanju dielektrika u vanjskom električnom polju. Dijamagnetski materijali se smještaju u prostoru nastojeći izbjeći magnetsko polje. Dok je ponašanje paramagnetskog i feromagnetskog materijala analogno ponašanju dielektrika, ponašanje dijamagnetskih materijala će očito tražiti drugo fundamentalno obašnjenje.

U uvodnom razmatranju naglašavamo i drugu temeljnu razliku električnog i magnetskog polja. Divergencija električnog polja postoji u prostoru u kojem postoje električni naboji. S druge strane već smo konstatirali da ne postoje magnetski naboji (nema magnetskih monopola) . To se matematički odražava iščezavanjem divergencije magnetskog polja po cijelom prostoru.

Mikroskopsko objašnjenje fenomena dielektrika počiva na temelju činjenice da daleko od raspodjele naboja, čiji je ukupni naboj nula, dominira utjecaj malog razmaka težišta pozitivnog i negativnog naboja , čime se stvara dipolni moment konstituenta materijala. Taj dipolni moment proizvodi posljedice na nivou makroskopskih dimenzija dielektričnog materijala. Ujedno stvara i unutrašnja polja u materijalu. Kako magnetsko polje nema elementarnih naboja, trebamo naći drugi način stvaranja dipolnog momenta. U tu svrhu služi proučavanje magnetskog polja na velikoj udaljenosti od male strujne petlje.

MAGNETSKO POLJE STRUJNE PETLJE NA VELIKOJ UDALJENOSTI:

Opis crteža na kojem temeljimo proračun je slijedeći. Petlja leži u ravnini x-y. Središte petlje je u ishodištu sustava. U gradivu magnetostatike smo računali polje na osi petlje. Sada ćemo računati polje i izvan te osi. Prikloni kut točke u kojoj promatramo polje jest kut ϑ . Koordinata točke u kojoj određujemo polje u odnosu na ishodište jest vektor $\vec{r}_1$, a vektor koji opisuje položaj točke petlje struje u odnosu na ishodište je $\vec{r}\,'$. dozvoljeno nam je orijentirati koordinatni sustav tako da je točka u kojoj promatramo vektorski potencijal magnetskog polja s koordinatom $x_1 = 0$. S crteža je očito:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}\,'| \cong r_1 - y'\sin\vartheta = r_1(1 - \frac{y'\sin\vartheta}{r_1}) \qquad (13.1)$$

Počinjući od (13.1) i korištenjem razvoja u red,te činjenice da je drugi član u okrugloj zagradi malen radi velike udaljenosti točke promatranja u odnosu na dimenzije petlje, imamo:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}\,'|} \cong \frac{1}{r_1}(1 + \frac{y'\sin\vartheta}{r_1}) \qquad (13.2)$$

Prema relaciji (8.43) primijenjenoj na situaciju u kojoj se integrira po žici,

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\hat{x}dx' + \hat{y}dy'}{|\vec{r}_1 - \vec{r}\,'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{r_1}\oint(\hat{x}dx' + \hat{y}dy')(1 + \frac{y'\sin\vartheta}{r_1}) \qquad (13.3)$$

Integracija po varijabli y' daje rezultat nula, jer se za svaki pomak duž te osi nalazi s druge strane osi y protupomak dok je vrijednost funkcije identična. Tako se integracijski rezultat svodi na nulu. Što se tiče integracije po dx' , tu imamo dva pribrojnika. U jednom od njih su sve ostale veličine konstantne; po zatvorenoj krivulji se integrira dx' , što daje nulu. S druge strane, apsolutna vrijednost $\oint y'dx'$ je površina unutar petlje. Tu površinu zovemo a .

Tako je

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \vec{x}\,\frac{\mu_0 I a \sin\vartheta}{4\pi r_1^{\,2}} \qquad (13.4)$$

NAPOMENA: da bismo dobili gornji rezultat, smjer integracije po petlji mora biti kao kod kazaljke na satu (dakle negativan). Sada se definira dipolni moment petlje kao vektor, koji je usmjeren okomito na petlju s uobičajenom vezom sa smjerom kruženja i orijentacije vektora. To je u gornjem slučaju duž negativne z osi. Modul tog vektora je umnožak struje i površine; Ia . Znači :

$$\vec{m} = I\vec{a} \qquad (13.5)$$

Uočavamo da se (13.5) može elegantno pisati kao:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (13.6)$$

Koordinatno je ovisan samo drugi faktor u (13.6) i on određuje analitički oblik i vektorskog potencijala i magnetskog polja koje se , znamo, dobiva primjenom diferencijalnog operatora rotacije vektorskog polja. Napisat ćemo samo njegov analitički oblik:

$$\vec{m}\times\vec{r}\,\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3}\left[\hat{x}(zm_y - ym_z) + \hat{y}(xm_z - m_x z) + \hat{z}(ym_x - xm_y)\right] \qquad (13.7)$$

U (13.7) su sve tri komponente izraza s lijeve strane. Ako načinimo rotaciju lijeve strane i napišemo samo x komponentu imamo:

$$\left[\nabla\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right) \right]_x = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-xm_y + ym_x}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{xm_z - m_x z}{r^3} = \tag{13.8}$$

$$= \frac{m_x}{r^3} + \frac{m_x}{r^3} + (-xm_y + ym_x)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r^3} - (m_z x - m_x z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r^3} =$$

$$= \frac{1}{r^5}\left[\ 2m_x r^2 - 3(y^2 + z^2)m_x + 3xym_y + 3xzm_z(+/) - 3x^2 m_x\ \right] =$$

$$= \frac{1}{r^5}\left[2m_x r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3x(xm_x + ym_y + zm_z)\right] =$$

$$= \frac{-r^2 m_x + 3x(\vec{r}\vec{m})}{r^5}$$

Ovo je izraz u koordinatno zavisnom dijelu vektora magnetskog polja za njegovu x komponentu. Jasno je da analogni izrazi vrijede (kroz isti postupak) za y i z komponentu. Ako tome dodamo konstantu koja je očita iz usporedbe (13.6) i (13.7) , dobivamo za magnetsko polje:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-r^2\vec{m} + 3\vec{r}(\vec{m}\vec{r})}{r^5} \tag{13.9}$$

Ovo je fantastičan rezultat. Najprije je jasno da petlja struje proizvodi u daljini polje koje analitički ima istu zavisnost kao i električni dipol. Istovremeno, taj izraz daje puno opravdanje da se (13.5), umnožak struje u petlji i vektora površine petlje prozove magnetskim dipolnim momentom. Naime ta veličina igra u opisu magnetskog polja istu ulogu, koju u opisu električnog dipolnog polja igra električni dipol. Studentima će se još jednom prikazati pokusom magnetsko polje strujne petlje. Izvrsnost izbora izraza za magnetski moment demonstrira se i u nastavku kroz opažanje da magnetski dipolni moment na isti način interagira s vanjskim magnetskim poljem kao što je električni dipol interagirao s električnim poljem.

MAGNETSKI DIPOL U MAGNETSKOM POLJU

$d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$ Pođimo od modela pravokutne petlje čiji vektor površine zatvara kut ϑ s vanjskim magnetskim poljem. Ako struja obilazi magnetsko polje po pravilu desne ruke, tada u granama petlje koje su paralelne ravnini razapetoj poljem i vektorom površine postoje jednake sile suprotnog smjera (koje razvlače petlju), ali joj ne daju mehanički moment. S druge strane, na preostale dvije grane petlje djeluju također djeluje par suprotnih sila međutim on daje mehanički moment koji petlju tjera da se usmjeri duž smjera okomitog na polje. Za proračun momenta sila krećemo od izraza

$$d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$$

Tada je sila na žicu duljine c :

$$\vec{F} = I\vec{c}\times\vec{B} \tag{13.10}$$

Ako je razmak tih dviju žica b, tada je moment tog para po iznosu

$$M = b\sin\vartheta BIc$$

Ako združimo faktor bc u površinu petlje a, a produkt površine i struje u magnetski moment petlje m , možemo pisati

$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} \tag{13.11}$$

Lako je provjeriti da je ovo istinito ne samo po iznosu, što smo pažljivo dokazali nego i po smjeru. Očito je da petlja osjeća mehanički moment u magnetskom polju s time da magnetski moment , kako smo ga definirali, igra ulogu koju u električnom slučaju igra električni dipolni moment.

Izračunat ćemo sada potencijalnu energiju magnetskog dipola (petlje struje) u vanjskom magnetskom polju. Efekt para sila koji djeluje na petlju možemo računati počinjući od sile na jednu žicu (13.10) . Diferencijal potencijalne energije dviju žica (na koje postoji mehanički moment) računamo po ustaljenoj proceduri:

$$dE_p = -\sum \vec{F}d\vec{s} = -IcBbd(\cos\vartheta) = -d(\vec{m}\cdot\vec{B}) \qquad (13.12)$$

$$E_{pot} = -\vec{m}\cdot\vec{B} \qquad (13.13)$$

I ovdje magnetski dipolni moment ima praktički identičnu ulogu kakvu u električnom slučaju ima električni. Bez eksplicitnog pisanja potpuno identičnom procedurom kao u električnom slučaju dobili bismo i interakciju za dva magnetska dipola oblika analognog (12.24) :

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{r^2\vec{m}_1\cdot m_2 - 3(\vec{r}\vec{m}_1)(\vec{m}_2\vec{r})}{r^5} \qquad (13.14)$$

.

Kada studenti budu u četvrtom semestru proučavali evidenciju za postojanje spina (intrinsičnog momenta impulsa elektrona) bit će od koristi relacija za silu koju magnetski dipol osjeća u NEHOMOGENOM magnetskom polju (u homogenom polju bi rezultatna sila bila jednaka nuli). Iz našeg znanja da je sila negativni gradijent potencijalne energije slijedi:

$$\vec{F} = -\nabla(-\vec{m}\vec{B}) = \nabla(\vec{m}\vec{B}) \qquad (13.15)$$

Za ovaj se izraz dalje može pokazati da je ekvivalentan s

$$\vec{F} = (\vec{m}\nabla)\vec{B} \qquad (13.16)$$

za slučaj stacionarnog vanjskog magnetskog polja koje djeluje na magnetski dipol.

MAGNETIZACIJA TVARI

U potpunoj analogiji s električnom polarizacijom dielektrika može se definirati magnetski dipolni moment jedinice volumena:

$$\vec{M} = \frac{(\sum \vec{m}_i)_{\Delta V}}{\Delta V} \qquad (13.17)$$

U slučaju polarizacije imali smo vezu s unutrašnjim poljem:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0\chi_r\vec{E}$$

U potpunoj analogiji vrijedi:

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\chi_m\vec{B} \qquad (13.18)$$

Bitna je razlika električnog i magnetskog slučaja da za dijamagnetične tvari predznak od χ_r jest negativan.

Kao što smo za polarizaciju našli da se na površini dielektrika formira vezana površinska gustoća naboja preko koje se može izračunati polje polariziranog materijala, tako se i za magnetizaciju pokazuje da se i ona može slikovito interpretirati.
Pođimo od definicije magnetizacije (13.15) kao magnetskog dipolnog momenta jediničnog volumena. S jedne strane možemo upotrijebiti definicijsku jednadžbu , a s druge strane možemo prema definiciji dipolnog momenta struje ΔI koja obilazi površinu baze elementa istog volumena, koja daje isti magnetski dipolni moment:

$$M\Delta a\Delta z \equiv \Delta m = \Delta I\Delta a \qquad (13.17)$$

Vidimo da za struju koja proizvodi ekvivalentno vanjsko magnetsko polje kao i magnetizacija M vrijedi :

$$M = \frac{\Delta I}{\Delta z} \qquad (13.18)$$

Zamislimo sada sloj materijala magnetizacije M debljine Δz . Ako bismo ga razrezali u komadiće uočavamo da se magnetski moment sloja može dobiti i plošnom strujom iz (13.18) koja opasuje sloj. Naime zbroj svih struja koje idu kroz unutrašnje kockice jest nula. Tako je magnetski moment čitavog sloja rezultat samo plošne struje

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta z} \qquad (13.19)$$

iz (13.18) . Znači da magnetizacija sloja proizvodi vanjsko magnetsko polje kao i efekt plošne struje koja ima isti iznos i obilazi sloj . Znači da se u analogiji s polarizacijom kod dielektrika, za proračun magnetskog polja magnetiziranog materijala možemo se poslužiti proračunom polja ekvivalentne plošne struje koja teče oko istog volumena kada u njoj nema magnetiziranog materijala. Taj posao smo naučili rješavati u magnetostatici. No sve to vrijedi za oblik vanjskog magnetskog polja. Ostaje pitanje da li se ekvivalentnost sloja magnetiziranog materijala i plošne struje istog iznosa , koja obilazi oko istog praznog volumena može protegnuti i na polje u unutrašnjosti magnetiziranog materijala. Za to će nam poslužiti stup magnetiziranog materijala, plošna struja koja obilazi oko identičnog materijala i niz Gaussovih ploha koje presijecaju obadva volumena po istoj krivulji presjeka. Volumski integral divergencije magnetskog polja (koji je uvijek nula jer magnetsko polje nema izvora) , dijelimo na površinski integral toka magnetskog polja po površini S' po vanjskom polju i integral toka magnetskog polja po površini S'' po unutrašnjem polju . Dva su integrala očito jednaka po iznosu, a suprotnog predznaka. Držimo površinu S' stalnom, i pripadni integral je stalan. Ako variramo površinu S'' , rezultat toka magnetskog polja kroz nju mora biti nezavisan od izbora te površine, jer poništava uvijek isti iznos toka kroz S'. Ako još paralelno uspoređujemo tokove magnetskih polja za plošnu struje oko praznih identičnih volumena, integral toka magnetskog polja od plošne struje kroz S' znamo otprije da je jednak onom od komada magnetiziranog materijala, jer smo već dokazali da su njihova vanjska polja ista. No sada je jasno da je i integral po unutrašnjem polju magnetiziranog materijala po bilo kojoj površini S'' jednak integralu po istoj površini magnetskog polja stvorenog plošnom strujom. To je argument da su i polja u unutrašnjosti ista.

U dosadašnjim razmatranjima pokazali smo kako se efekti materijala stalne magnetizacije mogu proizvesti i preko plošnih struja iste vrijednosti. Pitanje se postavlja , da li postoji i način da se polja proizvedena magnetizacijom, koja je u prostoru promjenljiva , nadomjeste nekim strujnim fenomenima (naime, još je Ampere tvrdio da je porijeklo magnetizma u vezanim strujama) . Radit ćemo na modelu kockica postavljenih duž y osi oko kojih ophode struje sve veće jakosti. Kockice imaju dimenzije $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. To znači da se na graničnim plohama kockica struje više ne poništavaju. Struje ophode oko kockica tako da su rezultantne ekvivalentne magnetizacije usmjerene duž z osi, a da je povećanje magnetizacije od jedne do druge susjedne kockice uvijek isto i iznosi ΔM . Potrebni korak u povećanju iznosa struje po stijenki visine Δz znamo proračunati prema poznatoj vezi magnetizacije i plošne struje:

$$\Delta I = J\Delta z = \Delta M \Delta z \qquad (13.20)$$

Gledajući prednju stranu kockice (onu većom x koordinatom stijenke kockice) , postoji duž cijelog niza kockica uz y os gustoća struje u pozitivnom x smjeru:

$$j_x = \frac{\Delta I_x}{\Delta y \Delta z} = \frac{\Delta M_z}{\Delta y} \qquad (13.21)$$

Postavljanjem analognog niza kockica duž z osi (s time da struje ophode smjerom x-z ravnine) analognom procedurom u kojoj za pozitivnu orijentaciju ΔM koraci u struji ΔI_x moraju biti usmjereni duž negativne x osi slijedi analogna relacija onoj (13."1) samo sa suprotnim predznakom:

$$j_x = -\frac{\Delta M_y}{\Delta z} \qquad (13.22)$$

Treća mogućnost ophodnje plošne struje (ona paralelna y-z ravnini) ne bi doprinosila gustoći struje u x smjeru. Tako je ukupni doprinos gustoći ekvivalentne struje od prostornih varijacija magnetizacije u smjeru x zbroj (13.21) i (13.22) . Tako imamo :

$$j_x = \frac{\Delta M_z}{\Delta y} - \frac{\Delta M_y}{\Delta z} \qquad (13.23)$$

Sada možemo ući u sljedeći proceduru. Nema nikakve istaknutosti x osi u općem razmještaju magnetizacije u prostoru. To znači da se izrazi za ostale komponente gustoće struje tipa (13.23) mogu iz toga izraza dobiti cikličkom zamjenom koordinata. Kada se tako skupe sve tri komponente vektora gustoće struje, postaje jasno da vrijedi:

$$\vec{j} = rot\vec{M} \qquad (13.24)$$

Gustoća ekvivalentne struje (vezanih naboja) izvire iz rotacije vektorskog polja magnetizacije.

Pažljivog studenta može zbunjivati usporedba ovog rezultata (13.24) s prijašnjim rezultatom da (plošnu) ekvivalentnu struju uzrokuje već i pojava stalne magnetizacije materijala(13.18) . Dok je magnetizacija stalna stvarno nema gustoće ekvivalentne struje. No na rubnoj plohi magnetiziranog materijala postoji skokovita promjena magnetizacije. To znači da postoji cirkulacija magnetizacije ako na primjer krivulju integracije postavimo duž granične plohe a u smjeru magnetizacije s time da je jedan dio zatvorene krivuljebude unutar magnetiziranog materijala, a drugi izvan njega. Plošna struja koja ophodi granicom između magnetiziranog materijala i ostatka prostora je uzrokom te cirkulacije. To znači da su relacije (13.24) za varijabilnu magnetizaciju i (13.28) za stalnu magnetizaciju u međusobnom skladu. Radi preciznosti ističemo da je u (13.24) riječ o efektu kojim možemo zamijeniti magnetizaciju preko struje naboja koji ne napuštaju svoju fizikalnu okolinu. Stoga struji možemo dodati indeks da naglasimo da se radi o fenomenu vezanom u unutrašnjosti materijala

$$\vec{j}_{vezano} = rot\vec{M} \qquad (13.24a)$$

Tako smo spremni za još jednu modifikaciju elektrostatičke Maxwellove jednadžbe:

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{slobodno} + \mu_0 \vec{j}_{vezano} \qquad (13.25)$$

Kako je magnetska permitivnost vakuuma stalna, to se (13.25) uz upotrebu (13.24a) može pisati bliže obliku za slobodne struje:

$$rot(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) = \vec{j}_{slobodno} \qquad (13.26)$$

Veličina u okrugloj zagradi igra sličnu ulogu kakvu u električnim fenomenima s unutrašnjim poljima igra vektorsko polje D povezano s električnim polje i polarizacijom analognom relacijom. Stoga je i posebno definiramo :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad (13.27)$$

Ova veličina ima svoju povijest i svoju specijalnu praktičnu ulogu. U prošlom stoljeću se ta veličina nazivala magnetskim polje, a B je nazivana magnetskom indukcijom. Jasno je da dok nema magnetskih materijala u blizini, dva su polja potpuno proporcionalna. Ne ćemo sada ulaziti u razloge mijenja povijesnih imena. Veličina definirana s (13.27) koja zadovoljava

fundamentalno proširenje Maxwellove jednadžbe (13.26) važna je u praktičkim proračunima magneta. Naime ona se oslanja potpuno na slobodne struje i njeno polje se lako izračunava. Polje $\vec{B}$ se tada računa preko specifičnih svojstava upotrebljenog magnetiziranog materijala poštujući njihovu vezu (13.27) .
Vrijedno je ilustrirati ulogu $\vec{H}\ i\ \vec{B}$ na slučaju permanentnog magneta. Tamo pravljenjem cirkulacije dvaju polja dobivamo bitno različit rezultat , posebno ukoliko se integracija provodi duž silnice polja B. Kako je silnica polja B zatvorena krivulja (divergencija magnetskog polja uvijek iščezava radi odsutnosti monopola) to je cirkulacija različita od nule. U slučaju permanentnog magneta nemamo slobodnih struja koje bi stvarale polje. Stoga je cirkulacija polja H jednaka nuli. Kako su si polja B i H izvan permanentnog magneta propocionalni, jasno je da cirkulacija H može iščezavati samo tako da je unutar permanentnog magneta polje H suprotne orijentacije od polja B! Sada nastaje strahovito fundamentalno pitanje. Tko je relevantan u Lorentzovoj sili B ili H. Naime, jasno je da bi se Lorentzova sila u vakuumu mogla opisivati jednako dobro i s H uzimajući u obzir konstantu proporcionalnosti u odnosu na B . No u permanentnom magnetu B i H imaju suprotne smjerove. Kao i uvijek, fizika je eksperimentalna znanost i odgovor je mogao dati samo eksperiment. Kada se permanentne magnete bombardiralo elektronima, eksperimentalno je utvrđeno da je Lorentzova sila u skladu s poljem B , dakle suprotno od rezultata koji bi očekivali ako bi Lorentzovu silu pisali s H i onda je primijenili na slučaj permanentnog magneta.

NAZNAKE O PORIJEKLU MAGNETIZMA KONSTITUENATA MATERIJALA

Određenu intuiciju o porijeklu magnetizma konstituenata možemo dobiti iz klasičnog zora. Pretpostavimo da u kružnoj stazi imamo nabijenu česticu naboja q . Struja koja egzistira kao posljedica kao posljedica kruženja jest umnožak naboja i frekvencije ophodnje nabijene čestice. Frekvencija ophodnje se dobije dijeljenjem brzine i puta potrebnog za jedan ophod:

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} \qquad (13.28)$$

Tako je struja :

$$I = \frac{qv}{2\pi r} \qquad (13.29)$$

U (13.5) smo pisali vezu između struje , površine petlje koju ona ophodi i magnetskog momenta te strujne petlje: $\vec{m} = I\vec{a}$. Sada možemo pisati prema tome:

$$m = \frac{qv}{2\pi r} r^2 \pi = \frac{qvrm_q}{2m_q} = \frac{q}{2m_q} L \qquad (13.30)$$

Ovdje su nove oznake m_q masa čestice koja kruži i ima naboj q , te L moment impulsa čestice koja kruži. Izveli smo (13.30) jednu od najvažnijih relacija za elemetarni magnetizam. Između magnetskog momenta i momenta vrtnje postoji proporcionalnost. Konstanta proporcionalnosti se naziva magnetonom. Tako imamo elektronski, nukleonski i slične magnetone u mikrosvijetu. Studenti moraju biti vrlo oprezni, jer se klasični koncepti ne uklapaju jednostavno u mikrosvijet u kojem vlada kvantna fizika. No proporcionalnost momenta impulsa i magnetskog momenta nabijene čestice preživljava taj prijelaz s klasičnog na kvantno. Tako stičemo povjerenje da se magnetski moment može objasniti i na mikroskopskoj skali. Slijedeći problem nastaje od već spomenutog pojma spina. Ako našoj intuiciji dozvolimo da prihvati činjenicu da elektron sam po sebi ima intrinsični moment vrtnje koji je kvantiziran , to jest ima diskretnu vrijednost a ne kontinuum vrijednosti, tada uz gornju sliku veze momenta vrtnje i magnetskog momenta imamo i dozvolu prihvatiti da elektron ima i sam magnetski dipolni moment. Sada paramagnetske fenomene i prvu indiciju razumijevanja feromagnetskog ponašanja vidimo u permanentnim magnetskim dipolnim momentima konstituenata, koji se pod utjecajem vanjskog polja orijentiraju analogno ponašanju permanentnih dipola u električnom slučaju.

Dijamagnetsko ponašanje nekih materijala je novitet u odnosu na analogije s dielektricima. Kod dijamagnetskih materijala možemo poći od grube slike da se elektroni u njihovim molekulama ponašaju sukladno Lenzovom pravilu koje smo sreli kod studija Faradayeve indukcije. Naime , tamo je na promjenu toka magnetskog polja kroz petlju, petlja reagirala elektromotornom silom koja je stvarala suprotno magnetsko polje. Kod relacije (13.16) smo konstatirali fenomenološku činjenicu da za razliku od χ_r električnog slučaja koji je uvijek pozitivan, ekvivalentna veličina u magnetskom slučaju jest negativna za dijamagnetike. Taj promijenjeni predznak ima svoje porijeklo upravo u Lenzovom ponašanju elektrona dijamagnetskih materijala.

Feromagnetizam uz željezo pokazuju još neki metali. To je pojava , fenomenološki opisano kao vrlo visoka vrijednost konstante χ_m . Kao slikovito karakterizirati feromagnetizam. Pravo se objašnjenje nalazi u kvantnoj fizici. Zasada možemo reći da fenomen potječe od kolektivnih svojstava metala . Elektroni su u stanju najniže energije kada su susjedi prostorno identično orijentirani. Tako se na primjer u željezu stvaraju „domene" identično polariziranih magnetskih dipola. U nemagnetiziranom željezu te domene nisu sve međusobno usklađene, tako da nema rezultantne magnetizacije. Primjenom vanjskog polja , kako to polje jača, sve se više domena pridružuje orijentaciji kakvu zahtijeva vanjsko polje. Kako je kolektivni efekt uvijek bitno snažniji od individualnog, to se reflektira i u činjenici da su efekti u feromagnetskim materijalima mnogo jači. To dovodi i do mnogostruke primjene željeznih jezgri u elektromagnetima. Već smo kod eksperimentiranja s Faradayevom indukcijom demonstrirali da elektromagnet sa željeznom jezgrom uz istru struju daje mnogo jače magnetsko polje.

Primjena feromagnetizma je velika kada god trebamo jaka magnetska polja. Kod elektromotora željezo pojačava mehanički moment koji na petlju koja se nalazi u „rotirajućem" magnetskom polju proizvodi to polje. Naime elektromotor je obrat od generatora električne struje. U njemu izmjenični napon doveden na polove statičnog dijela naizmjenično privlači ili odbija polove rotirajućeg dijela eletromotora (rotora). Snažnije magnetsko polje uz istu struju znači ekonomičniji rada elektromotora. To je razlog za umetanje željezne jezgre u elektromotor.

Poznato je da se izmjenična struja visokog napona prenosi na velike udaljenosti nego istosmjerna struja iste isporučene snage. Za dizanje na visoki napon pri izlasku iz centrale i pri ulasku u grad za spuštanje napona služe transformatori. Možemo nacrtati torus željeza na koji su namotane međusobno izolirane žice dva sustava. U jednom sustavu je maleni broj navoja n_1, a u drugom veliki broj n_2 . Neka u sustavu 1 imamo izmjeničnu struju Magnetski tok u željeznom torusu je proporcionalan struji i broju navoja sustava 1 ali zavisi i od materijala koji se u torusu nalazi Tu je opet primjena feromagnetski materijala. Elektromotorna sila u drugom sustavu će biti povećana faktorom n_2 / n_1 u odnosu na onu iz prvog sustava, jer tok proizveden s n_1 navoja struje prvog sustava inducira elektromotornu silu u n_2 navoja. Kako se tok u torusu ne gubi, to se elektromotorna sila navedenim faktorom povećava. Snaga se , jasno, ne može povećati, stoga struja pada s istim faktorom.

HISTEREZA

To je specifičan fenomen feromagnetskih materijala. Ako činimo grafikon ovisnosti B polja u ovisnosti o jakosti struje, opazit ćemo slijedeći fenomen. Pođimo od nemagnetiziranog željeza. I struja I i polje B su nula. Dizanjem struje polje će početno gotovo linearno rasti (domene se orijentiraju u sve većem broju). No to ne ide tako stalno. Broj domena koje su preostale se smanjuje i krivulja ulazi u zasićenje. Ako struju pođemo smanjivati, domene se neće smjesta početi vraćati u staro stanje nego u tom procesu zaostaju za strujom. Čak i ako se struja vrati na nulu, preostaje t.zv. remnantni magnetizam. Prijelazom u vijednosti struje kroz elektromagnet s feromagnetskom jezgrom suprotnog predznaka potrebna je određena struja suprotnog predznaka da bi se remnantno polje poništilo. Cikličkim ponavljanjem ovog procesa dobiva se karakteristična krivulja histereze. Praktička je vrijednost ovog u znanju kako realizirati željeno magnetsko polje. Ukratko, povijest magneta je vrlo važna u korelaciji odnosa struje kroz magnet i polja, jer za istu struju kroz magnet možemo iati vlo različite vrijednoszi magnetskog polja elektromagneta!

RELATIVISTIČKE TRANSFORMACIJE ELEKTROMAGNETSKIH FENOMENA

Već kod elektromagnetskih valova uočili smo to kao jedinstveni fenomen. U ovom poglavlju ćemo pokazati da su električna i magnetska polja povezana ne samo u slučaju valova, nego da se kroz pravila kojim se transformiraju pri Lorentzovim transformacijama doista vidi da se radi o jedinstvenom fenomenu.

Model koji ćemo koristiti za početak se sastoji od dvije jednoliko nabijene ravnine suprotnih naboja koje su paralelne s x-z ravninom. One putuju brzinom v_0 duž smjera pozitivne osi x . Površinska gustoća naboja kako se vidi u sustavu S u kojem putuju je σ . Jasno je iz naših razmatranja o poljima ravnina da je električno polje usmjereno duž osi y i iznosi:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{14.1}$$

Također je jasno da gibanje negativnog naboja u +x smjeru jest ekvivalentno gibanju pozitivnog naboja u –x smjeru. To znači da efektivno prostor među ravninama ophodi plošna struja koju ovako računamo. Plošna struja jest struja koja teče širinom jediničnog pojasa oko područja u kojem se pravi magnetsko polje. Ako je na jediničnoj površini naboj σ i ako ta površina putuje brzinom v_0, tada ta površinska gustoća naboja provede u jedinici vremena naboj koji je na traci jedinične širine, duljine v_0 pomožen s površinskom gustoćom σ .

$$J = \sigma v_0 \tag{14.2}$$

Posljedica toga je homogeno magnetsko polje jakosti:

$$B_z = \mu_0 \sigma v_0 \tag{14.3}$$

Sve što je potrebno načiniti da bi se našle ispravne relativističke transformacije jest izračunati u drugom inercijskom sustavu površinsku gustoću naboja i brzinu ploča. Naime, izračun električnog i magnetskog polja slijedi relacije (14.1) i (14.3) samo s novim vrijednostima za površinske gustoće naboja i brzine. Prirodno je izračunati gustoću naboja u sustavu u kojem ploče miruju. Jedinična površina na kojoj je naboj (naboj je invarijanta transformacija to jest naboj ima u svim sustavima isti iznos), se ne deformira u transverzalnom smjeru. U smjeru gibanja uzdužna stranica se skraćuje za objekt koji putuje. Ta pak veličina se nalazi u nazivniku proračuna gustoće. Tako je veza gustoće u sustavu S i sustavu u kojem naboj miruje:

$$\sigma = \sigma_0 \gamma_0 \tag{14.4}$$

Tu su oznake σ_0 za gustoću naboja u sustavu u kojem ploče miruju a

$$\gamma_0 = (1 - {v_0}^2 / c^2)^{-1/2} \tag{14.5}$$

je uobičajena relativistička oznaka potrebna za proračun kontrakcije duljine jedinične stranice pri prijelazu iz sustava mirovanja ploča u sustav S. (Iz (14.4) naravno slijedi da je gustoća u F veća, jer se uzdužna stranica u sustavu S pri određivanju površinske gustoće relativistički kontrahirala. Sustav S giba se u sustavu S' brzinom v. Sustav S' je onaj u koji želimo transformirati fizikalne fenomene, to jest električno i magnetsko . Znači u njemu su nam potrebne površinska gustoća naboja i brzina nabijenih ploča. Tu brzinu znamo računati preko izraza za relativističko zbrajanje brzina iz prošlog semestra.

$$v_0' = \frac{v_0 + v}{1 + \frac{v_0 v}{c^2}} = \frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0} c \tag{14.6}$$

gdje su bete poznati relativistički omjeri odgovarajuće brzine i brzine svjetlosti. Da dobijemo gustoću naboja u sustavu S' možemo krenuti od gustoće naboja u sustavu gdje ploče miruju i množiti tu gustoću s kontrakcijskim faktorom koji uključuje činjenicu da se ploče gibaju prema njemu brzinom (14.6) .

$$\sigma' = \sigma_0 \gamma' \tag{14.7}$$

Gdje je gama faktor onaj relativistički faktor koji se dobije upotrebom omjera brzine (14.6) i brzine svjetlosti, dakle:

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta\beta_0})^2}} = \frac{(1 + \beta\beta_0)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - {\beta_0}^2)}} \tag{14.8}$$

Tako kombiniranjem (14.8) , (14.7) i (14.4) imamo :

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\gamma_0} \gamma' = \frac{\sigma}{\gamma_0} \frac{1 + \beta\beta_0}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - {\beta_0}^2)}} = \gamma\sigma(1 + \beta\beta_0) = \gamma\sigma(1 + c^2 v v_0) \tag{14.9}$$

Sada smo spremni za proračun y komponente električnog polja u novom sustavu:

$$E_y' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + v\mu_0 \sigma v_0) \tag{14.10}$$;

ovdje se vakuumska magnetska permitivnost pojavila svojom vezom s električnom permitivnosti i brzinom svjetlosti. U prvom pribrojniku unutar zagrade prema (14.1) prepoznajemo električno polje, a posljednja tri faktora u drugom pribrojniku su prema (14.3) magnetsko polje. Tako je transformacijska jednadžba:

$$E_y' = \gamma(E_y + vB_z) \tag{14.11}$$

Da bismo dobili transformirano magnetsko polje u z smjeru pišemo: analogon relacije (14.3)

$$B_z' = \mu_0 \sigma' v' \tag{14.12}$$

Potrebne veličine su nam na raspolaganju (14.6) i (14.9) :

$$B_z'=\mu_0\gamma\sigma(1+\beta\beta_0)\frac{v_0+v}{1+\beta\beta_0}=\gamma(\mu_0\sigma v_0+\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\sigma v) \tag{14.13}$$

U prvom pribrojniku unutar zagrade prepoznajemo magnetsko polje, a dio drugog pribrojnika jest električno polje:

$$B_z'=\gamma(B_z+\frac{v}{c^2}E_y) \tag{14.14}$$

Ako bismo ploče postavili vodoravno, dobili bismo relacije u kojima su indeksi y i z zamijenjeni. Analitička forma bi bila identična . Jedino se sa slike vidi da u tom slučaju pozitivno električno polje u smjeru z osi povlači negativno magnetsko polje u smjeru y osi. Nadalje , već smo vidjeli da se longitudinalna komponenta električnog polja ne mijenja. Naime ako ploče stoje u u y-z ravnini, Lorentzova transformacija doduše mijenja razmak među njima, ali za jakost polja je bitna gustoća naboja. Kako se poprečne dimenzije ne mijenjaju, gustoća naboja je ista pa i longitudinalna komponenta električnog polja. Isti zaključak vrijedi i za magnetsko polje. Tamo je naime polje moguće prikazati solenoidom duž x osi. Gustoća navoja pri transformaciji dobiva faktor γ, a struja (radi diferencijala vremena u nazivniku) dobiva faktor $(1/\gamma)$ tako da faktor nI koji određuje plošnu struju ostaje. Plošna struja , naravno, određuje magnetsko polje duž x , pa je i ono sačuvano. Tako total transformacija izgleda ovako:

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x & B_x' &= B_x \\ E_y' &= \gamma(E_y+vB_z) & B_y' &= \gamma(B_y-\frac{v}{c^2}E_z) \\ E_z' &= \gamma(E_z-vB_y) & B_z' &= \gamma(B_z+\frac{v}{c^2}E_y) \end{aligned} \tag{14.15}$$

Iz ovih je relacija vidljivo jedinstvo elektromagnetskih fenomena. U posebnom slučaju, kada je u početnom sustavu magnetsko polje jednako nuli po cijelom prostoru,

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x & E_y' &= \gamma E_y & E_z' &= \gamma E_z \\ B_x' &= 0 & B_y' &= -\gamma\frac{v}{c^2}E_z & B_z' &= \gamma\frac{v}{c^2}E_y \end{aligned} \tag{14.16}$$

Skraćeno možemo napisati:

$$\vec{B}'=\frac{1}{c^2}\vec{v}'\times\vec{E}' \tag{14.17}$$

Na primjeru polja točkastog naboja koji u S miruje, a u S' ima brzinu možemo vidjeti kako cirkulacija električnog polja nastaje paralelno s tokom magnetskog polja kroz površinu omeđenu tom krivuljom.

Primjer električnog polja točkastog naboja koji se giba:

Radimo u uvjetima relacija (14.16) . Specijaliziramo nadalje razmatranje na električno polje i x-z ravninu. Opis polja u sustavu S jest:

$$E_x=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}} \tag{14.18}$$

$$E_z=\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}} \tag{14.19}$$

Ako naboj putuje jednoliko prema Lorentzovim transformacijama iz prvog semestra, u trenutku t=0 poklapaju se ishodišta sustava i možemo uspoređivati koordinate mjerene od ishodišta kao i komponente polja. Nama zanimljive koordinate se transformiraju ovako:

$$x = \gamma x' \qquad z = z' \tag{14.20}$$

Prema (14.16), (14.18) i (14.19) uvrštavanjem konačno (14.20) imamo:

$$E_x' = E_x = \frac{q(\gamma x')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[(\gamma x')^2 + z'^2\right]^{3/2}} \tag{14.21}$$

$$E_z' = \gamma E_z = \gamma\frac{qz'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[(\gamma x')^2 + z'^2\right]^{3/2}} \tag{14.22}$$

Vidimo da se dijeljenjem desnih strana gornjih relacija dobiva:

$$\frac{E_x'}{E_y'} = \frac{x'}{y'} \tag{14.23}$$

I u S' polje točkastog naboja je radijalno! Još nam samo preostaje pokazati da se s porastom brzine silnice električnog polja točkastog naboja koji putuje gomilaju u transverzalnom smjeru. Ovo je jasno već iz (14.16), ali se može i direktno analitički demonstrirati. Izračunavamo kvadrat modula električnog polja u S' sustavu preko relacija(14.21) i (14.22) :

$$E'^2 = \frac{\gamma^2 q^2 (x'^2 + z'^2)}{(4\pi\varepsilon_0)^2\left[(\gamma x')^2 + z'^2\right]^3} \tag{14.24}$$

Izlučivanjem faktora s potencijom od γ u nazivniku, djelomičnim kraćenjem, i pisanjem ostatka faktora γ u uglatoj zagradi preko veličine β imamo:

$$E'^2 = \frac{q^2(x'^2 + z'^2)}{(4\pi\varepsilon_0)^2\gamma^4\left[x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2\right]^3} = \frac{q^2(1-\beta^2)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2(x'^2 + z'^2)^2\left[1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right]^3} \tag{14.25}$$

Uzimajući i ubzir izraz za udaljenost od ishodišta izraženu preko Kartezijevih koordinaqta u S' i sinus priklonog kuta ϑ' u odnosu na x os imamo nakon vađenja drugog korijena u (14.25):

$$E' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\beta^2}{r'^2}\frac{1}{\left[1 - \beta^2\sin^2\vartheta'\right]^{3/2}} \tag{14.26}$$

Možemo navesti više komentara: Jasno je da se za male brzine izraz reducira na Coulombov zakon. Nadalje , osim što je električno polje naboja koji se goba i dalje radijalno prema (14.23) očito je njegova jakost najveća u transverzalnom smjeru. Silnice se postavljaju to okomitije na smjer gibanja, što je brzina naboja u laboratorijskom sustavu veća.

Još se možemo vratiti na relacije (14.15) da bismo uočili pojednpstavljenje u slučaju da u sustavu S nema električnog polja. Istom procedurom kojom smo analizirali situaciju s iščezavanjem magnetskog polja za jednadžbe (14.15), za iščezavanje elektročnog polja u sustavu S u sustavu S' koji se giba s $\vec{v}'$ javlja se električno polje oblika:

$$\vec{E}' = -\vec{v}' \times \vec{B}' \tag{14.27}$$

Naime, kada smo pripremali teren za objašnjenje Faradayeve indukcije konstatirali smo da se na žici koja se miče u magnetskom polju okomiti na smjer magnetskog polja javlja Loretzova sila, koja razmiče u vodiču naboj. No mi možemo gledati i situaciju i iz sustava u kojem žica miruje. Tamo je brzina naboja nula i nema Lorentzove sile, no prema (14.27) javlja se električno polje. Nije teško ustanoviti da je odnos brzina naboja i brzine sustava takav da su dvije brzine suprotne;

$$\vec{v}\,' = -\vec{v} \qquad (14.28)$$

Tako je fizikalni rezultat isti. U sustavu S na pokretni naboj djeluje Lorentzova sila. U sustavu S' naboj miruje ali se radi magnetskog polja pojavljuje električno polje istog efekta kakav daje Lorentzova sila!

Na završnom predavanju studentima se još jednom demonstriralo najbitnije eksperimente: Coulombovo polje, Oerstedov pokus, Faradayevu indukciju i podsjetilo da Maxwellov term u jednadžbama zapravo verificiramo egzistencijom Hertzovih valova, čiju smo egzistenciju također demonstrirali.