

TITRANJA I VALOVI

Uvod

Ovaj se kolegij predaje u svijetu prvenstveno za buduće fizičare profesionalce. Za ostale prirodoslovne struke i tehnička usmjerenja smatra se da nekoliko poglavlja o titranjima i valovima zadovoljavaju njihove potrebe. Kolegij ima spoznajnu i aplikativnu komponentu. Spoznajni aspekt ne leži samo u razumijevanju fenomena titranja i propagacije valova.

On također priprema studenta i pojmovno i matematički za prihvaćanje valnog temelja kvantno-mehaničkih pojava. Naime u kvantnoj fizici se manifestiraju i čestični i valni aspekti materijalnih fenomena. I intuitivni i matematički dio priprema za valni dio temelja kvantne fizike jesu (ponekad implicitno, a ponekad i eksplicitno) izneseni u ovom kolegiju. Nije slučajno da se u prošlosti ovaj dio fizike zvao mehanikom valova, a kvantna generalizacija valnom mehanikom. Aplikativnu vrijednost znanja iz ovog kolegija je teško pravedno pobrojati. Akustični fenomeni od glazbe, preko medijske komunikacije, Dopplerovog efekta ultrazvuka u medicini i akustičkog zagađenja... imaju svoje korijene ovdje sumirane.

Temeljni efekti iz upotrebe elektromagnetskih valova uključujući i specifičnosti koje proizlaze iz Maxwellovih jednadžbi su ovdje također uključeni. U kvantnoj fizici govori se o valovima materije (de Broglie-evi valovi); naime, matematički opis valova materije ima bitne analogije s mehaničkim valovima. Suštinska razlika nastaje samo u interpretacije rješenja valnih jednadžbi. Primjena de Broglievih valova (iako ih se ne spominje tako eksplicitno) jest ujedno i primjena našeg znanja o mikrosvijetu.

Demonstracijski eksperimenti će biti prvenstveno na mehaničkim titranjima i mehaničkim valovima jer su oni najintuitivniji. No uz to bit će demonstracija i s akustičkim i elektromagnetskim (t.j. i optičkim) fenomenima.

Zahvala

Akademik Ksenofont Ilakovac mi je predao svoje bilješke kada sam počeo s nastavom Opće fizike 3 u jesen 1995. godine. To je bio temelj koji sam od tada prilagođivao studentima sukladno njihovom reakcijama i prateći nastavne trendove sveučilišne izobrazbe u Europi kroz EUPEN (European Physics Education Network) i tijekom brojnih boravaka u S.A.D.

Doc.dr.sc. Darko Androić je proveo mnogo vremena na ovom materijalu; posebno su bile korisne njegove kritičke i konstruktivne sugestije. Izlazak na mrežu je također velikim dijelom njegov doprinos.

Zahvaljujem stoga akademiku Ksenofontu Ilakovcu i Doc.dr.sc. Darku Androiću na njihovoj ulozi u realizaciji ovog projekta, koji će se i dalje razvijati!

Miroslav Furić

1.1 Jednostavno harmonijsko titranje

Pri valnim fenomenima elementi vala izvode titranja. Stoga ćemo u početku razmotriti razne oblike titranja i njihova svojstva.

Ako s $\psi(t)$ označimo opći pomak od ravnoteže, jednostavnim harmonijskim titranjem nazivamo fenomen:

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.1)$$

A je amplituda titranja; ω je kružna frekvencija; φ je faza titranja. Jasno je da A određuje maksimalni otklon; ω je kutna brzina rotacije vektora čija je projekcija na koordinatnu os $\psi(t)$, a φ je povezan sa vremenskim pomakom konkretnog titranja u odnosu na elementarnu kosinusnu ovisnost položaja objekta o vremenu (na pr. izbor vrijednosti $\psi(t=0)$).

Fenomen jest periodički (t.j. isti položaji se ponavljaju nakon vremena T). Period T se jednostavno vidi iz zahtjeva:

$$\psi(t+T) = \psi(t) \text{ što povlači: } A \cos[\omega(t+T) + \varphi] = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ ili } \omega T = 2\pi \text{ t.j.}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu}, \text{ gdje je } \nu \text{ obična frekvencija titranja.} \quad (1.2)$$

Dvostrukim deriviranjem izraza (1.1) po vremenu dobivamo:

$$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0 \quad (1.3)$$

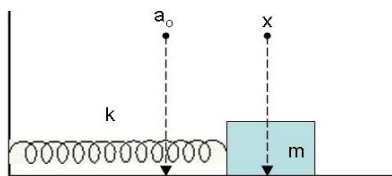
Ovo je generalni oblik diferencijalne jednačbe jednostavnog harmonijskog titranja. U nastavku poglavlja vidjet ćemo primjere različitih vrsta takvog titranja.

Generalno ćemo vidjeti na primjerima koji slijede da vrijedi :

$$\omega^2 = \frac{\text{Povratna sila}}{(\text{tromost})(\text{pomak})} \quad (1.4)$$

(naravno silu, tromost i pomak treba u nemehaničkim slučajevima generalizirati.)

1.1.1 Harmonički oscilator (slobodni, bez prisile, bez gušenja; horizontalan)



$$F = m\ddot{x} = -k(x - a_0) \quad (1.5)$$

m je masa objekta koji titra, k je konstanta opruge, a_0 je koordinata ravnotežnog položaja. {Sila koja vraća tijelo u položaj ravnoteže [desna strana u (1.5)] se generalno zove povratnom silom.}

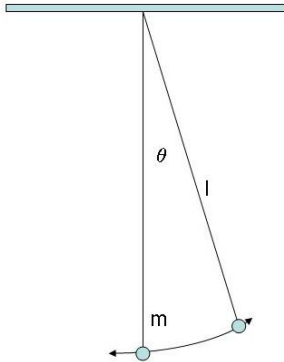
Transformacijama:

$$x - a_0 = \psi \quad \dot{x} = \dot{\psi} \quad \ddot{x} = \ddot{\psi} \quad (1.6)$$

(1.5) prelazi u: $\ddot{\psi} + \frac{k}{m}\psi = 0$; $\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0$ jednađbu oblika (1.3) s $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{kx}{mx}$ potvrđujući oblik (1.4).

POKUS

1.1.2 Matematičko njihalo:

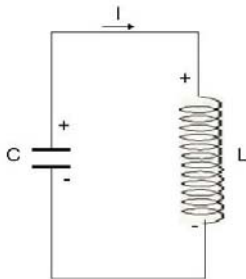


$$F = -mg \sin \vartheta = ml\ddot{\vartheta} \quad \text{za male } \vartheta \text{ i } \vartheta = \psi$$

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0 \quad \text{gdje je } \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (1.7)$$

POKUS

1.1.3 Električki rezonantni krug:



$$\frac{Q}{C} + \left[-L \left(\frac{dI}{dt} \right) \right] = 0 ; I = - \left(\frac{dQ}{dt} \right)$$

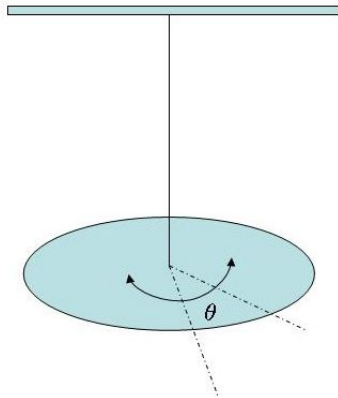
gdje je Q naboj na kapacitoru C, I je struja kroz zavojnicu induktiviteta L i ima suprotni predznak od promjene naboja na kapacitoru. Sređivanjem dobivamo:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \quad \text{ili} \quad \ddot{Q} + \omega_0^2Q = 0 \quad (1.8)$$

$$\text{gdje je } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

POKUS u prošlom semestru

1.1.4 Torzijsko njihalo:



$$M = \frac{dL}{dt} = I\ddot{\vartheta} = -D\vartheta$$

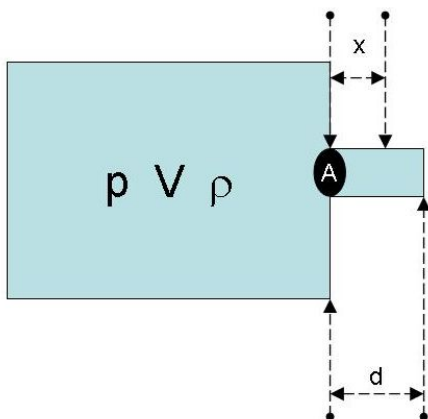
M je moment sile, L je kutna količina gibanja, I je moment inercije, ϑ je kut zaokreta pri torziji, D je konstanta proporcionalnosti između momenta sile i kuta zaokreta. Sređivanjem gornjeg analogona drugog Newtonovog zakona za rotacijski stupanj slobode dobivamo:

$$\ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 \quad \text{gdje je } \omega_0^2 = \frac{D}{I} \quad (1.9)$$

POKUS

1.1.5 Akustički rezonator:

Volumen same boce V_0 . Volumen boce zajedno s dijelom grla boce ispunjenog plinom V. Površina presjeka grla boce A. Gustoća plina u boci ρ . Duljina grla boce d. Koordinata prodora plina iz boce u grlo boce x. Tlak u ravnoteži unutar V_0 je P_0 . Tlak plina u volumenu V je P. Iz drugog Newtonovog zakona slijedi za plin u grlu boce:



$$(dA\rho)\ddot{x} = (P - P_0)A \quad (1.10)$$

Termodinamički gledano (OF4) promjene u boci su adijabatske. Stoga vrijedi:

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$$

γ je adijabatska konstanta karakteristična za plin.

Nadalje su volumeni povezani relacijom:

$$V = V_0 + Ax$$

Sada se desna strana relacije (1.10) može modificirati kako slijedi:

$$P - P_0 = P_0 \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right) = P_0 \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma - 1 \right] = P_0 \left\{ \frac{1}{\left[1 + \frac{Ax}{V_0} \right]^\gamma} - 1 \right\} \doteq P_0 \left(1 - \gamma \frac{Ax}{V_0} - 1 \right) = -\gamma P_0 \frac{Ax}{V_0}$$

Time drugi Newtonov zakon (1.10) poprima oblik:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma P_0 A}{V_0 \rho d} x = 0 \quad (1.11)$$

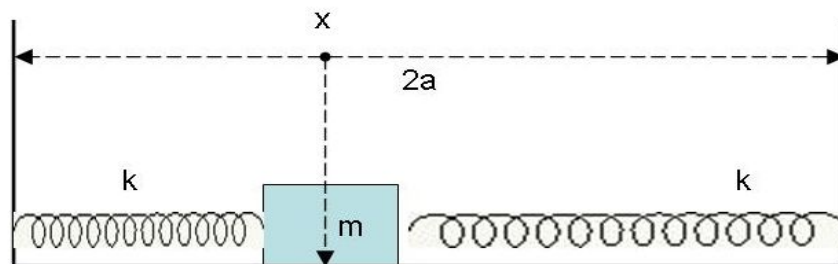
To je ponovno diferencijalna jednačba jednostavnog harmonijskog titranja. Kasnije ćemo demonstrirati da je zvuk titranje (akustičkog nad)tlaka. Dobivena diferencijalna jednačba pokazuje kako frekvencija tog zvuka zavisi o parametrima boce i svojstvima plina, jer je faktor uz x u gornjoj jednačbi kvadrat kružne frekvencije titranja zvuka. Pokusom demonstriramo kako se ta frekvencija mijenja dolijevanjem vode u bocu (promjenom V_0).

POKUS

[Na seminarskim satovima studenti mogu obraditi i druga harmonijska titranja:
Titranje tekućine u U cijevi, vertikalno titranje aerometra u tekućini ili kotrljanje kugle na satnom staklu.]

1.1.6 Tijelo vezano dvjema (jednakim) oprugama (longitudinalno titranje)

$$F = -k(x - a_0) + k(2a - x - a_0) \quad (1.12)$$

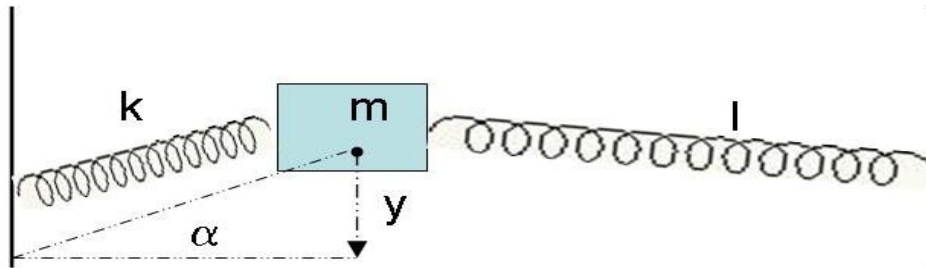


$2a$ je razmak između rubova oscilatora a_0 je udaljenost na kojoj sila pada na nulu. Supstitucijom : $\psi = x - a$ $\dot{\psi} = \dot{x}$ $\ddot{\psi} = \ddot{x}$ slijedi ponovno isti oblik diferencijalne jednačbe:

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{2k}{m} \quad (1.13)$$

POKUS

1.1.7 Tijelo vezano dvjema oprugama (transverzalno titranje)



$$|F_{\text{jedne opruge}}| = k|l - a_0| \quad ; \quad l \text{ je trenutna duljina opruge.}$$

$$F_{\text{ukupno}} = -2F \sin \alpha = -2k(l - a_0) \frac{y}{l}$$

Za transverzalno titranje (y koordinata) drugi Newtonov zakon daje:

$$m\ddot{y} = -2k \frac{l - a_0}{l} y \quad (1.13a)$$

Za a_0 mnogo manje od l jednažba (1.13a) se svodi na (1.13), no u svakom slučaju imamo harmonijsko titranje u transverzalnom smjeru.

1.2 Linearnost diferencijalnih jednađbi i princip superpozicije rješenja

Diferencijalne jednađbe u kojima se tražena funkcija i njene derivacije pojavljuju linearno (s eksponentom 1) su linearne. Jednađbe titranja u kojima je povratna sila linearna su u toj klasi. Takve linearne diferencijalne jednađbe imaju važno svojstvo: njihova se rješenja mogu superponirati. To znači: ako su ψ_1 i ψ_2 različita rješenja diferencijalne jednađbe, tada je i

$C_1\psi_1 + C_2\psi_2$ rješenje diferencijalne jednađbe (C_1 i C_2 su proizvoljne konstante).

Ovo svojstvo lako ilustriramo na slučaju homogene jednađbe 2. stupnja. Neka istu jednađbu zadovoljavaju i ψ_1 i ψ_2 t.j. vrijedi:

$$f\ddot{\psi}_1 + g\dot{\psi}_1 + h\psi_1 = 0 \quad (1.14)$$

(f,g,i h su faktori nezavisni od ψ .) te

$$f\ddot{\psi}_2 + g\dot{\psi}_2 + h\psi_2 = 0 \quad (1.15)$$

Množenjem (1.14) s C_1 i (1.15) s C_2 i njihovim zbrajanjem uz sređivanje dobivamo:

$$f(C_1\ddot{\psi}_1 + C_2\ddot{\psi}_2) + g(C_1\dot{\psi}_1 + C_2\dot{\psi}_2) + h(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) = 0 \quad (1.16)$$

čime smo pokazali da i linearna kombinacija rješenja jest rješenje. Ilustrirali smo u suštini princip superponiranja rješenja koji je zajednički za mnoge valne fenomene. Između linearnosti diferencijalnih jednađbi i principa superpozicije postoji ekvivalentnost. Ne samo da iz linearnosti diferencijalnih jednađbi slijedi superponiranje nego i iz postojanja superponiranja slijedi linearnost jednađbi. Ilustrirat ćemo to na najjednostavnijem slučaju proširenja povratne sile nelinearnim članovima. Pretpostavimo da imamo dva rješenja koja zadovoljavaju diferencijalnu jednađbu koji u povratnoj sili imaju više potencije u ψ od linearnog člana:

$$\ddot{\psi}_1 + \omega^2\psi_1 = a\psi_1^2 + b\psi_1^3 + \dots \quad (1.17)$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega^2\psi_2 = a\psi_2^2 + b\psi_2^3 + \dots \quad (1.18)$$

Da bi suma $\psi_1 + \psi_2$ bila također rješenje trebalo bi biti ispunjeno:

$$(\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2) + \omega^2(\psi_1 + \psi_2) = a(\psi_1 + \psi_2)^2 + b(\psi_1 + \psi_2)^3 + \dots \quad (1.19)$$

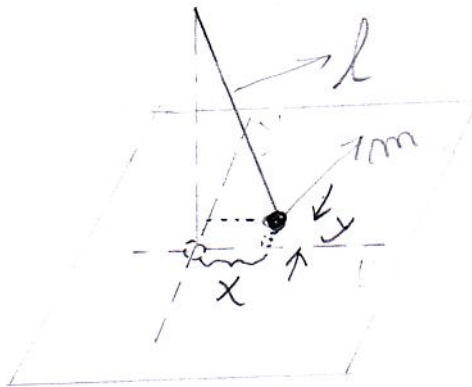
Oduzimanjem (1.17) i (1.18) od (1.19) lako vidimo da to zahtijeva iščezavanje koeficijenata a,b, ... T.j. sila smije biti samo linearna u ψ .

2. Proširivanje jednostavnog harmonijskog titranja na dvije dimenzije i/ili 2 tijela

U slijedećim ćemo poglavljima poopćavati jednostavno harmonijsko titranje na sve kompleksnije situacije. S jedne strane ta titranja ne moraju biti ograničena na samo jednu dimenziju; mogu biti i u ravnini (2D) ili u prostoru (3D). S druge strane uvodit ćemo više tijela u titrajući sustav što je prirodan put prema titranju kontinuiranih medija i valnih fenomena.

2.1 Matematičko njihalo u prostoru (za male pomake)

Pomake u horizontalnoj ravnini titranja možemo pratiti Kartezijevim koordinatama; u tu svrhu možemo upotrijebiti formule i notaciju oko izvoda izraza (1.17) i napisati za obadvije dimenzije



$$m\ddot{x} = -mg \frac{x}{l} \quad (2.1)$$

$$m\ddot{y} = -mg \frac{y}{l} \quad (2.2)$$

Podsjećajući se da je kvadrat kružne frekvencije za gornja titranja :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

imamo rješenja za titranje u obadvije dimenzije.

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (2.3)$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (2.4)$$

Amplitude i faze titranja su naravno određene početnim uvjetima za koordinate x i y (na primjer položajima i brzinama u $t=0$). Superponiranjem rješenja (2.3) i (2.4) dobivamo opće rješenje 2D titranja matematičkog njihala. Zanimljiv slučaj je na primjer: iste amplitude a faze različite za $\pi/2$. Tada dobivamo kruženje tijela s radijusom jednakim zajedničkoj amplitudi.

POKUS

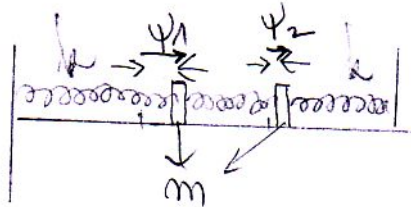
Sličnu bismo situaciju imali i kombiniranjem harmoničkih sila koje bi u Kartezijevom sustavu bile proporcionalne s pomacima u x i y smjeru. U tom slučaju imamo čak i mogućnost da se

izborom različitih konstanti opruga u dvije dimenzije kružne frekvencije gibanja u x smjeru i gibanja u y smjeru razlikuju.

POKUS

2.2 Titranje dva tijela povezanih trima oprugama (jednake mase i opruge; longitudinalni slučaj)

Pomake masa od ravnotežnog položaja označavamo s ψ_1 i ψ_2 . Drugi Newtonov zakon za pojedine mase daje:



$$m\ddot{\psi}_1 = -k\psi_1 + k(\psi_2 - \psi_1) = -2k\psi_1 + k\psi_2 \quad (2.5)$$

$$m\ddot{\psi}_2 = -k\psi_2 + k(\psi_1 - \psi_2) = -2k\psi_2 + k\psi_1 \quad (2.6)$$

Jednadžbe (2.5) i (2.6), matematički gledano, predstavljaju sustav vezanih linearnih diferencijalnih jednadžbi. Teorija za njihovo rješavanje postoji i nije komplicirana. No radi fizikalne razumljivosti, mi ćemo pribjeći jednostavnim manipulacijama koje imaju jasnu fizikalnu interpretaciju da bi dobili rješenja koja se lako interpretiraju. Zbrajanje (2.5) i (2.6) rezultira u:

$$m(\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2) = -k(\psi_1 + \psi_2) \quad (2.7)$$

A uvođenjem nove veličine $\psi_i = \psi_1 + \psi_2$ (ψ_i je usko povezan s koordinatom težišta sustava) (2.7) prelazi u

$$m\ddot{\psi}_i = -k\psi_i \quad ; \quad \ddot{\psi}_i + \omega_i^2\psi_i = 0 \quad \omega_i^2 = \frac{k}{m} \quad (2.7a)$$

Iz (2.7a) proizlazi da težište sustava dvije mase titra frekvencijom koju bi imala jedna od tih masa s jednom oprugom. Odbijanjem (2.6) od (2.5) dobivamo:

$$(\ddot{\psi}_1 - \ddot{\psi}_2) = -\frac{3k}{m}(\psi_1 - \psi_2) \quad (2.8)$$

Uvođenjem druge veličine: $\psi_{ii} = \psi_1 - \psi_2$ (ψ_{ii} je razmak masa) dobivamo :

$$\ddot{\psi}_{ii} = -\frac{3k}{m}\psi_{ii} \quad ; \quad \ddot{\psi}_{ii} + \omega_{ii}^2\psi_{ii} = 0 \quad ; \quad \omega_{ii}^2 = \frac{3k}{m} \quad (2.8a)$$

Fizikalno značenje ove relacije jest da razmak masa titra frekvencijom koja je za korijen iz 3 viša od one za titranje težišta. Matematički aspekt: Rješenja jednadžbi (2.7a) i (2.8a) su jednostavna harmonijska titranja (s različitim frekvencijama). Njihova linearna superpozicija

$$C_i\psi_i + C_{ii}\psi_{ii}$$

jest također rješenje sustava jednadžbi (2.5) i (2.6). To je također i opće rješenje tog sustava. Opće rješenje jednadžbe (2.7a) jest:

$$\psi_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2.9)$$

Opće rješenje od (2.8a) jest:

$$\psi_{ii} = A_{ii} \cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \quad (2.10)$$

Amplitude i faze određuju se iz početnih uvjeta za sustav dviju masa.

Matematički rječnik naziva ψ_i i ψ_{ii} vlastitim rješenjima problema, a odgovarajuće kvadrate kružnih frekvencija vlastitim vrijednostima problema. Taj jezik koriste i fizičari i u titranjima i u kvantnoj fizici. Ponekad se sva moguća rješenja zovu i vektorskim prostorom, a ψ_i i ψ_{ii} predstavljaju jednu od mogućih baza u tom prostoru. Student ne mora memorirati ništa od ovih matematički orijentiranih komentara; međutim uz poznavanje osnovnih pojmova o vektorskim prostorima ovi komentari mu mogu pomoći u usvajanju temelja za apstraktnu intuiciju pri radu s titrajno-valnim fenomenima. Ta generalizacija je osobito korisna tijekom povećanja broja masa koje titraju; imamo posla s vektorskim prostorima sve većih dimenzija; kada prijedemo na titranja kontinuiranih medija imat ćemo posla kao i u kvantnoj fizici s vektorskim prostorima s kontinuirano mnogo dimenzija.

Fizikalni komentar: ψ_i (dok je $\psi_{ii} = 0$) razmak među masama se ne mijenja, titra samo težište. Obratno, u rješenju ψ_{ii} (dok je $\psi_i = 0$) težište miruje a titra samo razmak.

POKUSI

2.3 SAŽETAK I KOMENTAR

Studentima će biti eksperimentalno demonstrirani i matematički obrađeni i drugi slučajevi oscilacija dva podsistema: dvije jednake mase s tri jednake opruge koje transverzalno titraju, dva vezana torzijska njihala, C-L-C-L-C elektromagnetski krug... Dok će simboli biti drukčiji, srž problema ne će se mijenjati: imat ćemo vezane diferencijalne jednadžbe a metoda rješavanja, supstitucije analogne upravo načinjenima, bit će putovi za dobivanje vlastitih rješenja i odgovarajućih frekvencija. Za seminarsku radnju student može izabrati slučaj titranja u kojem ni mase ni opruge nisu identične. Ova komplikacija i generalizacija je na liniji ilustracije općeg traženja vlastitih vrijednosti sustava diferencijalnih jednadžbi i pripadajućih titranja. No u toj rigoroznosti teže se snalazimo, posebno u intuitivnom smislu. Vratimo se sada originalnom problemu titranja sustava dviju masa s tri opruge opisanom vezanim diferencijalnim jednadžbama (2.5) i (2.6). Već smo prije spomenuli da rješenja tog sustava ψ_i i ψ_{ii} možemo superponirati; to jest da je najopćenitije rješenje:

$$C_i \psi_i + C_{ii} \psi_{ii} \quad (2.11)$$

Kako su ψ_1 i ψ_2 linearnim transformacijama [vidi tekst oko (2.7) i (2.8)] povezani s ψ_i i ψ_{ii}

to za mase 1 i 2 možemo naći obratnim transformacijama i participiranje tih masa u ukupnom rješenju.

$$\psi_i(1,t) = A_i(1) \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad \psi_i(2,t) = A_i(2) \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2.11a)$$

$$\psi_{ii}(1,t) = A_{ii}(1) \cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \quad \psi_{ii}(2,t) = A_{ii}(2) \cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \quad (2.11b)$$

Oznake u skupu jednadžbi (2.11a) su na primjer:

$\psi_i(1,t)$ je onaj dio vremenske zavisnosti ukupnog titranja čestice 1 koji dolazi od titranja težišta to jest od rješenja jednadžbe (2.7a); amplituda tog dijela titranja čestice 1 je $A_i(1)$. Analogno vrijedi za sve druge oznake u jednadžbama (2.12).

Tako su opća rješenja za pojedine čestice:

$$\psi_1(t) = A_i(1) \cos(\omega_i t + \varphi_i) + A_{ii}(1) \cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \quad (2.12)$$

$$\psi_2(t) = A_i(2) \cos(\omega_i t + \varphi_i) + A_{ii}(2) \cos(\omega_{ii} t + \varphi_{ii}) \quad (2.13)$$

Fenomen prijenosa energije:

Ako u gornjim općim rješenjima za titranje dviju masa povezanih trima oprugama specijaliziramo da su sve faze jednake nuli i da su prve tri amplitude titranja u (2.12) i (2.13) jednake $A/2$, a četvrta da je $-A/2$ imamo najprije:

$$\psi_1(t) = \frac{A}{2} [\cos(\omega_i t) + \cos(\omega_{ii} t)] \quad \psi_2(t) = \frac{A}{2} [\cos(\omega_i t) - \cos(\omega_{ii} t)] \quad (2.14)$$

Korištenjem poznatih relacija za zbroj i razliku kosinusa slijedi:

$$\psi_1 = A \cos \left[\frac{(\omega_i + \omega_{ii})t}{2} \right] \cos \left[\frac{(\omega_{ii} - \omega_i)t}{2} \right] \quad (2.15)$$

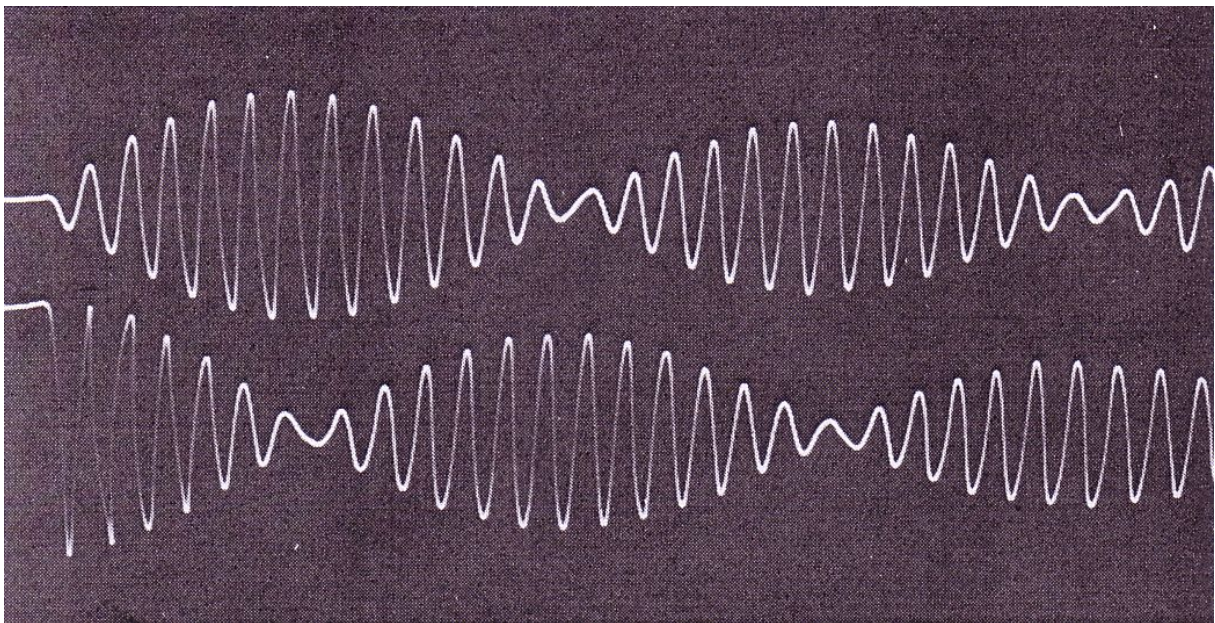
$$\psi_2 = A \sin \left[\frac{(\omega_{ii} - \omega_i)t}{2} \right] \sin \left[\frac{(\omega_{ii} + \omega_i)t}{2} \right] \quad (2.16)$$

Bilo grafičkim prikazom bilo pažljivom analizom vremenske zavisnosti (2.15) i (2.16) zaključujemo da su se u titranjima masa pojavile dvije frekvencije. To je s jedne strane usrednjena frekvencija (brzog) titranja:

$$\omega_{sr} = \frac{\omega_i + \omega_{ii}}{2} \quad (2.17)$$

i modulacijska frekvencija (modulacijski faktor određuje vremensku zavisnost amplitude brzog titranja):

$$\omega_{mod} = \frac{\omega_{ii} - \omega_i}{2} \quad (2.18)$$



Napomena: kako će se vidjeti u energijskoj analizi, energijska se situacija obnavlja dvostruko bržom frekvencijom; sukladno tome neki autori ispuštaju faktor dva u nazivniku relacije (2.18)!

Načinit ćemo kratku analizu „položaja energije“ u gornjem primjeru. Ta analiza, naime, može biti od pomoći studentima u četvrtom semestru kada se budu sretali s „paketima energije“ – fotonima, koji ne će biti dobro lokalizirani.

Jasno je da svaki objekt i 1 i 2 ima svoju trenutnu energiju. Nadalje je jasno još iz prvog semestra kako se kinetičke i potencijalne energije objekata izražavaju preko mase i parametara titranja:

$$E_1 = E_1(kin) + E_1(pot) = E_1(pot. Maks.) = \frac{k}{2}(A \text{ mod. faktor})^2$$

$$E_1 = \left(\frac{k}{2}\right)[A \cos(\omega_{\text{mod}}t)]^2 \quad (2.19)$$

Potpuno analogno tome :

$$E_2 = \left(\frac{k}{2}\right)[A \sin(\omega_{\text{mod}}t)]^2 \quad (2.20)$$

Zbrajanjem (2.19) i (2.20) naravno konstatiramo da je ukupna mehanička energija sustava dviju masa s tri opruge stalna što smo i očekivali (zbroy kvadrata sinusa i kosinusa jednak je jedinici). S druge strane opažamo da je taj ukupni paket energije raspodijeljen među objekte 1 i 2 i da se u jednom trenutku (na pr. $t=0$) energija nalazi u objektu 1, dok se u nekom drugom trenutku (na pr. $t = \frac{\pi}{2\omega_{\text{mod}}}$) može naći kompletno u objektu 2. U proizvoljnom trenutku paket energije je dijelom u jednoj i dijelom u drugoj komponenti!

U ovom dijelu gradiva gornja činjenica je potpuno prihvatljiva; s druge strane u četvrtom semestru studenti će (biti primorani argumentima) prihvatiti da je foton obrok energije. Ovaj im primjer daje model neodređenosti položaja za paket energije i jedan mogući opis načina titranja položaja takvog paketa energije.

Postoji još jedan spoznajni aspekt u analizi gornjeg problema titranja. Rješenja ψ_i i ψ_{ii} s jedne strane nazivamo vlastitim rješenjima no ona u svim titrajućim situacijama uključujući kasnije i kvantnu mehaniku zovemo i stacionarnim. Naime za svako takvo rješenje, dok nema drugih primjesa, titraju zauvijek sa stalnom frekvencijom sve komponente sustava, a to znači da se odnosi među koordinatama učesnika u titranju periodički obnavljaju. S druge strane, kod linearne superpozicije rješenja, kakvu smo vidjeli pri gornjem posebnom izboru faza i amplituda, postoji dinamičan razvoj u vremenu za komponente ψ_1 i ψ_2 (u početku dominira titranje objekta 1 da bi kasnije dominiralo titranje objekta 2). Takva rješenja više nisu stacionarna.

3. Slobodno titranje sustava s mnogo stupnjeva slobode:

Imajući na umu slučaj titranja dvije jednake mase povezanih trima jednakim oprugama s longitudinalnim titranjem, možemo zamisliti niz (jednakih) masa povezanih (jednakim) oprugama koje longitudinalno titraju. Pri tome je jasno da će rezultatna sila na masu potjecati isključivo od njenih susjeda. To pak znači da će se primjenom drugog Newtonovog zakona na masu (i) u nizu titrajućih masa pojaviti izraz oblika:

$$\ddot{\psi}_i + a_{i,i-1}\psi_{i-1} + a_{i,i}\psi_i + a_{i,i+1}\psi_{i+1} = 0 \quad (3.1)$$

Ako u titranju sudjeluje N objekata imat ćemo N takvih (linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima) jednadžbi (koji je homogen; znači da na desnoj strani gdje je nula nema člana neovisnog od koordinata titrajućih objekata). Potaknuti rezultatima prethodnog poglavlja možemo potražiti rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi receptom:

$$\psi_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (3.2)$$

Kako dvostrukim deriviranjem pretpostavke (3.2) dobivamo negativni kvadrat kružne frekvencije, to se sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi pretvara u sustav linearnih algebarskih jednadžbi slijedećeg oblika:

$$\begin{aligned} (a_{1,1} - \omega^2)\psi_1 + a_{1,2}\psi_2 &= 0 \\ a_{2,1}\psi_1 + (a_{2,2} - \omega^2)\psi_2 + a_{2,3}\psi_3 &= 0 \\ &\dots \\ &(3.3) \\ a_{n-1,n}\psi_{n-1} + (a_{n,n} - \omega^2)\psi_n &= 0 \end{aligned}$$

Da bi sustav jednadžbi (3.3) imao netrivialno rješenje, mora determinanta tog sustava iščeznuti.

$$\begin{vmatrix} (a_{1,1} - \omega^2) & a_{1,2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,1} & (a_{2,2} - \omega^2) & a_{2,3} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1,n-2} & (a_{n-1,n-1} - \omega^2) & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n,n-1} & (a_{n,n} - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

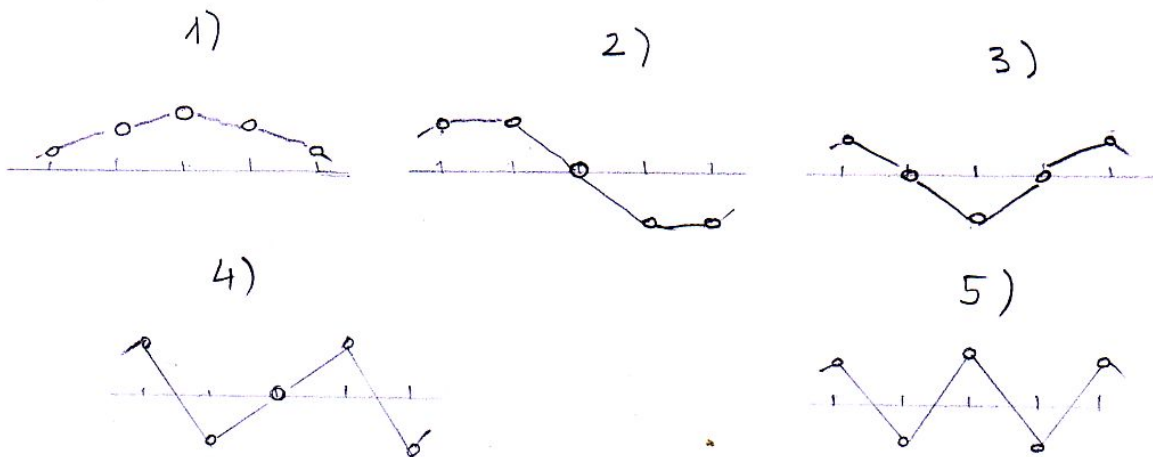
Iz oblika te determinante, kvadrat kružne frekvencije se pojavljuje u svakom redu jedanput, zaključujemo da smo za navedenu veličinu dobili algebarsku jednadžbu n-tog stupnja to jest imamo n različitih rješenja za frekvencije titranja. Odgovarajuća rješenja oblika (3.2) zovu se uz ime vlastita rješenja i imenom: modovi titranja. Svi elementi sustava unutar jednog moda

titraju zajedničkom frekvencijom. Unutar stacionarnog rješenja su omjeri amplituda stalni a faze su do na π iste!

Machov valostroj, koji se sastoji od mnogo (jednakih) masa povezanih (jednakim) elastičnim oprugama vrlo slikovito ilustrira gornja razmatranja posebno kada se nalazi u stanju transverzalnog titranja. Stacionarna stanja titranja još se često nazivaju i modovi titranja. (Ova se terminologija na primjer koristi i u opisu rada lasera.) Mod s najnižom frekvencijom titranja je onaj u kojem mase pričvršćene za krajeve miruju a najveću amplitudu titranja ima središnja masa. Slijedeću višu frekvenciju ima mod u kojem i središnja masa miruje, a ostale mase imaju raspodjelu amplituda koja se dobije diskretnim rasporedom točaka s jednakom međusobnom udaljenosti po jednom periodu sinusoide. Viši modovi titranja i više frekvencije slijede uključivanjem sve više poluperioda sinusoide između fiksnih krajeva Machovog valostroja.

POKUSI

Modovi ka sustav pet elastično povezanih masa:



Crteži na ploči

Ilustracija stabilnosti odnosa stanja titranja unutar sustava mnogo masa za jedan mod (Jedno stacionarno rješenje).

Postupak generalizacije sustava s dvije mase na mnogo masa poučno je pogledati u sustavu tri (jednake) mase i četiri (jednake) opruge. Sa slike možemo očitati drugi Newtonov za svaku masu posebno i podijeliti relaciju s masom:



$$\ddot{\psi}_1 = -\frac{K}{m}\psi_1 + \frac{K}{m}(\psi_2 - \psi_1) = -\frac{2K}{m}\psi_1 + \frac{K}{m}\psi_2$$

$$\ddot{\psi}_2 = \frac{K}{m}(\psi_1 - \psi_2) + \frac{K}{m}(\psi_3 - \psi_2) = -\frac{2K}{m}\psi_2 + \frac{K}{m}\psi_1 + \frac{K}{m}\psi_3$$

$$\ddot{\psi}_3 = \frac{K}{m}(\psi_2 - \psi_3) - \frac{K}{m}\psi_3 = -\frac{2K}{m}\psi_3 + \frac{K}{m}\psi_2$$

Masa 2 u gornjem slučaju vezanih diferencijalnih jednažbi je izvrstan model za generiranje izraza koje opisuje (i)-tu masu u nizu masa jer masa 2 gore ima obadva susjeda, a sa ostalima nema interakcije što je slučaj i za svaku masu u nizu jednakih masa koje titraju. U slučaju longitudinalnog titranja jednakih masa i jednakih opruga, općeniti izgled jednažbe titranja za masu (i) u nizu jednakih masa bi sukladno formuli za masu (2) gore i istim oznakama za mase i konstante opruga izgledao ovako nakon deriviranja ψ_i po vremenu:

$$-\frac{K}{m}\psi_{i-1} + \left(\frac{2K}{m} - \omega^2\right)\psi_i - \frac{K}{m}\psi_{i+1} = 0 \quad (3.4)$$

Ili uz (3.2) i $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ slijedi:

$$-\omega_0^2\psi_{i-1} + (2\omega_0^2 - \omega^2)\psi_i - \omega_0^2\psi_{i+1} = 0 \quad (3.5)$$

Gdje je ψ_i koordinata u titranju (i)-te mase. Tako za omjer koordinata dobivamo:

$$\frac{\psi_{i-1} + \psi_{i+1}}{\psi_i} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \quad (3.6)$$

Sada je jasna stalnost odnosa koordinata titranja masa koje učestvuju unutar jednog moda gibanja. Kako je vidljivo iz (3.6) taj odnos ovisi o vlastitoj frekvenciji moda titranja ω . Naime, počevši s prva dva tijela, njihov kvocijent koordinata je određen uzimanjem u obzir da je ($\psi_0 = 0$). Povećanjem indeksa mase za jedan, u relacije se uključuje i amplituda trećeg tijela s omjerom jednoznačno danim s (3.6), a daljnjim dizanjem indeksa tijela za po još jednu jedinicu sukcesivno slijede i sve ostale amplitude! Tako smo ilustrirali i opravdali izjavu o stalnosti omjera koordinata pojedinih masa unutar zadanog moda titranja (t.j. unutar istog stacionarnog rješenja problema titranja konačnog broja elastično povezanih masa). Relaciju (3.6) možemo testirati na sustavu dviju masa s tri opruge koji smo već obradili. Ako

u relaciji (3.6) uvrstimo $\psi_0 = 0$ da bismo izračunali omjer $\frac{\psi_2}{\psi_1}$, i iskoristimo $\omega_i^2 = \omega_0^2$ slijedi

$\frac{\psi_2}{\psi_1} = 1$. Za $\omega_i^2 = 3\omega_0^2$ slijedi pak $\frac{\psi_2}{\psi_1} = -1$. Ova obadva omjera izračunata preko (3.6) su u

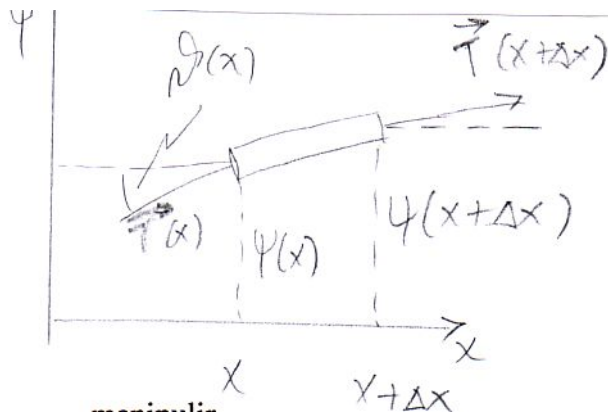
skladu s našim prijašnjim rezultatima za odnose amplituda dvije mase u slučaju stacionarnih rješenja problema njihovog titranja. Također je očita i izjava da su sve faze učesnika u stacionarnom titranju iste do na 0 ili π . Naime, sve mase prolaze kroz ravnotežni položaj istovremeno. Ako bi jedna od masa bila izvan takvog faznog aranžmana, tada bi u trenutku njenog prolaska kroz nulu odnos (3.6) bio poremećen.

4. Slobodno titranje kontinuiranog medija.

Dosadašnja razmatranja bila su ograničena na longitudinalna i transverzalna titranja masa povezanih elastičnim oprugama. Varijable kojima smo opisivali stanja titranja bile su jednodimenzionalni kontinuum za varijablu pomaka i prirodni broj za oznaku mase čije titranje studiramo. U prirodi su fenomeni često mnogo kompleksniji. Na primjer u slučaju elektromagnetskih valova u prostoru, električno polje \vec{E} više nije jednodimenzionalno odstupanje od ravnotežnog položaja, nego opis fenomena ima vektorsku prirodu. Domena razmatranja fenomena više se ne može indeksirati; prostor u kojem promatramo pojavu je kontinuiran u tri dimenzije. Dok je do sada naša notacija bila $\psi_i(t)$ od sada ćemo napredovati prema opisu na primjer: $\vec{E}(\vec{r}, t)$, gdje je ψ zamijenjen s \vec{E} , a indeks mase (i) je zamijenjen s trodimenzionalnim vektorom položaja \vec{r} . Ovaj prijelaz s diskretnih indeksa na kontinuum možemo jednostavno ilustrirati na mogućem opisu transverznog titranja jednakih masa koje su u ravnotežnom položaju njihovih jednakih opruga tako da su razmaci ekvidistantni (jednaki) i iznose a . Tada umjesto indeksa (i), masu možemo karakterizirati položajem u odnosu na početak sustava a koji je $x = ia$. Tako opis stanja titranja postaje $\psi(x, t)$. Ovakvo opisivanje se koristi na primjer u slučaju transverznog titranja kontinuirane žice.

4.1 Transverzalno titranje homogene, napete žice.

Pretpostavljamo da žica ima jednoliko raspoređenu gustoću: $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x}$ po svojoj duljini. Ako smo se ograničili na transverzalno titranje, tada je komponenta napetosti niti duž niti uravnotežena. Uočimo segment žice između lokacija x i $x + \Delta x$. Njegova je masa $\Delta m = \rho \Delta x$.



U transverzalnom smjeru djeluju na njegove krajeve y komponente napetosti niti s rezultantom: $F_y = T(x + \Delta x) \sin \theta(x + \Delta x) - T(x) \sin \theta(x)$ gdje je T napetost niti žice a θ je kut otklona žice od ravnotežnog smjera. Istu veličinu možemo dalje manipulirati:

$$F_y = T(x + \Delta x) \cos(x + \Delta x) \operatorname{tg} \theta(x + \Delta x) - T(x) \cos \theta(x) \operatorname{tg} \theta(x)$$

No po našoj pretpostavci napetost niti duž žice je uravnotežena:

$$T(x + \Delta x) \cos \theta(x + \Delta x) = T(x) \cos \theta(x) = T_0$$

Također je $\operatorname{tg} \theta(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Time je :

$$F_y = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + \Delta x) - T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) = T_0 \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \Delta m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

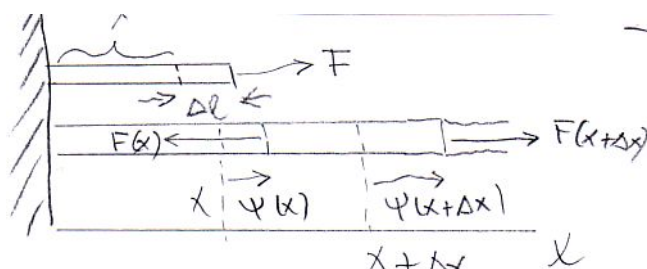
Gdje je posljednja jednakost unutar (4.1) posljedica drugog Newtonovog zakona za transverzalni smjer. Posljednja jednakost u (4.1) je ujedno i jednodimenzionalna valna jednačba. Možemo je napisati i u drugom obliku:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{gdje je} \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho} \quad (4.2)$$

U ovom dijelu studija smo zainteresirani iz pedagoških razloga razmatrati samo stacionarna rješenja valne jednačbe (4.2) t.j. ona u kojima je zavisnost transverzalnog pomaka faktorizirana u separiranu zavisnost o vremenu i separiranu zavisnost o koordinati x . No jednačba (4.2) je temelj promatranja i transmisije valnog fenomena t.j. o promatranju širenja valnog profila duž medija. No najprije ćemo pokazati da se potpuno analogna jednačba dobije i pri razmatranju pojava povezanih s lokalnim produljenjima i skraćenjima elastičnog medija kada je titranje usmjereno duž žice i/ili motke:

4.2 Longitudinalno titranje elastičnog medija:

Najprije se podsjetimo Hook-ovog zakona iz 1. semestra.



Ako na motku duljine l načinjenu iz elastičnog materijala djelujemo silom F ; neka je presjek motke S , a materijal ima Youngov modul E , izazvat ćemo produljenje Δl :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad (4.3)$$

S druge strane, ako unutar motke uočimo dio dužine Δx između koordinata x i $x + \Delta x$, označavajući s $\psi(x)$ i $\psi(x + \Delta x)$ uzdužna odstupanja koordinata deformiranog štapa od njihovih originalnih položaja vrijedi:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.4)$$

Kombiniranjem (4.3) i (4.4), s time da ulogu sile rastezanja u (4.3) preuzima razlika napetosti $F(x + \Delta x) - F(x)$ sila, dobivamo:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = ES \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + \Delta x) - ES \frac{\partial \psi}{\partial x}(x) = ES \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (4.5)$$

Ta razlika sila daje segmentu akceleraciju, što izraženo drugim Newtonovim zakonom rezultira u:

$$ES \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = S \Delta x \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

Sređivanjem (4.6) i uvođenjem pokrate $v^2 = \frac{E}{\rho}$ dobiva se ponovno jednadžba (4.2). Pri tome je izraz za brzinu novi a i značenje odstupanja od ravnoteže je sada drukčije (dešava se duž motke), no valna jednadžba ima isti oblik. Suočeni s problemom njenog rješavanja možemo koristiti ideju koju smo naučili kod titranja sustava s velikim brojem masa povezanih oprugama. Tamo smo upotrijebili korisnu i uspješnu pretpostavku određivanja vlastitih rješenja titranja pretpostavkom: $\psi_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$. Sada je indeks (i) zamijenjen kontinuiranom varijablom x . Stoga se vlastita rješenja titranja traže analognom pretpostavkom da sve točke kontinuuma titraju istom frekvencijom ω . Rješenja valne jednadžbe za početak tražimo u obliku

$$\psi(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.7)$$

Dvostrukim deriviranjem po vremenu imamo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A(x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.7a)$$

Čijim uvrštavanjem u valnu jednadžbu i sređivanjem dobivamo:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{1}{v^2} A(x) = 0 \quad (4.8)$$

diferencijalnu jednadžbu za prostornu raspodjelu amplitude harmonijskog titranja.

Možemo sada uvesti novu standardnu oznaku iz titrajno-valne terminologije:

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2 \quad (4.9)$$

Time (4.8) poprima standardnu i otprije poznatu formu:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)A(x) = 0 \quad (4.10)$$

Ovo je jednadžba formalno identična onoj za jednostavno harmonijsko titranje s time da je sada slobodna varijabla prostorna koordinata umjesto vremenske. Mi znamo rješenja jednadžbe (4.10). Ona se mogu pisati na dva ekvivalentna načina; obadva ćemo upotrebljavati zavisno o trenutnoj upotrebljivosti:

$$A(x) = A_0 \cos(kx + \varphi) \quad (4.11)$$

ili :

$$A(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (4.12)$$

Veze između integracijskih konstanti A_0 i φ s A i B studenti znaju otprije ili ih mogu reproducirati preko adicijskog teorema u (4.11).

Uvest ćemo i koncept valne duljine iako na prvi pogled nije jasno da valna duljina iz stojnih valova odgovara valnoj duljini iz putujućih valova. Ovdje definiramo valnu duljinu kao razmak na kojem se pri stacionarnom rješenju periodički ponavlja vrijednost valne funkcije. T.j. traži se $\psi(x) = \psi(x + \lambda)$, što u (4.11) znači $\cos(kx + \varphi) = \cos(kx + k\lambda + \varphi)$ odnosno $k\lambda = 2\pi$. Sada je moguće izraziti k koji se često zove i valnim brojem preko valne duljine.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.13)$$

Moguće je kombinirati i (4.9) i (4.13) da se dobije :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda\nu \quad (4.14)$$

Ovo je relativno plauzibilna (lako prihvatljiva) veza između (fazne) brzine širenja valova v i umnoška valne duljine λ s frekvencijom titranja ν . Podsjećamo, međutim da još nismo dokazali da je v iz valne jednadžbe ujedno i (fazna) brzina širenja valova u vremenu. To je istina, ali će taj dokaz će uslijediti kada budemo razmatrali širenje valova, dok zasada promatramo samo stacionarna stanja, koja se u slučaju kontinuuma još nazivaju i stojnim valovima.

Možemo zaključiti ovo razmatranje izrazom za opće (stacionarno) rješenje titranja kontinuiranog jednodimenzionalnog medija homogenih svojstava (svojstva medija se ne mijenjaju od položaja do položaja):

$$\psi(x,t) = \left(A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x + B \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.15)$$

To je opće (stacionarno) rješenje valne jednadžbe (4.2)

POKUSI

Na Hertzovom valostroju demonstrira se razne mogućnosti stacionarnih rješenja. Studenti mogu uočiti stalne odnose amplituda u titranju. Ukoliko se međutim na Hertzovom valostroju generira na primjer puls titranja, koji se propagira kroz sustav, jasno je da u tom slučaju postoji vremenska dinamika u smislu da se odnosi amplituda titranja raznih masa u vremenu drastično mijenjaju. To je ta bitna razlika između stacionarnih i vremenski promjenljivih titranja. Student može pitati razlog za upoznavanje sa stacionarnim rješenjima. Vrlo će se brzo pokazati kako se svako titranje sustava može opisati kao superpozicija stacionarnih rješenja. S druge strane upozoravamo da su u kvantnoj fizici upravo stacionarna rješenja (na primjer Schroedingerove jednadžbe) opisuju stanja u kojima mikrosistem može boraviti.

4.3 Utjecaj rubnih uvjeta, definiranih za krajeve medija, na dozvoljene vrijednosti valne duljine i/ili valnog broja k:

Ako se krajevi medija ne mogu micati, tada je valna jednadžba (4.2) podvrgnuta uvjetima na svom rubu (rubni uvjeti). Ako je medij dužine L , tada su rubni uvjeti oblika:

$$\psi(x=0,t) = 0 \quad i \quad \psi(x=L,t) = 0 \quad (4.16)$$

Uvidom u analitički oblik općeg rješenja titranja (4.15) a s obzirom na vremenski titrajući faktor i vrijednosti koje funkcije sinusa i kosinusa poprimaju na krajevima medija, za slučaj rubnog uvjeta (4.16), koeficijent B u (4.15) mora iščeznuti dok za valnu duljinu vrijedi:

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = M\pi \quad to \ jest \quad \lambda = \frac{2L}{M} \quad (4.17)$$

gdje je M cijeli broj. Time je i valni broj k prisiljen imati samo diskretne vrijednosti. Naime prema (4.13), svojoj vezi s valnom duljinom, i (4.17) slijedi i za valni broj k :

$$k_M = \frac{M\pi}{L} \quad (4.18)$$

uočimo da smo valnom broju dodali indeks M radi naglašavanja o kojem se načinu (modu) titranja radi. Iz izraza (4.17) i (4.18) jasno je da valne duljine λ i valni brojevi k mogu biti samo iz diskretnog skupa definiranog s (4.17) odnosno (4.18). Ako s k_1 označimo:

$$k_1 = \frac{\pi}{L} \quad (4.19)$$

Tada se opća rješenja, za rubne uvjete specijalizirane gore (4.16), stacionarnog oblika mogu izraziti preko dozvoljenih vrijednosti valnog vektora kao:

$$\psi_M(x, t) = A_M \sin(Mk_1 x) \cos(\omega_M t + \varphi_M) \quad (4.20)$$

Uočimo da je i frekvencija titranja postala diskretna i dobila je indeks M. Naime kružna frekvencija titranja i valni broj vezani su relacijom (4.9) s (faznom) brzinom v iz valne jednadžbe. Odatle slijedi:

$$\omega_M = k_M v = \frac{M\pi}{L} v \quad (4.21)$$

A_M je pak amplituda M-tog moda titranja. Opće nestacionarno rješenje valne jednadžbe (4.2) uz rubne uvjete (4.16) jest superpozicija različitih modova:

$$\psi(x, t) = \sum A_M \sin(Mk_1 x) \cos(\omega_M t + \varphi_M) \quad (4.22)$$

Mod s indeksom $M=1$ naziva se i osnovnim modom. Na monokordu on odgovara titranju s trbuhom titranja na sredini monokorda i čvorovima na rubovima koji fiksiraju položaje žice. Titranja s višom (cjelobrojnom) vrijednosti indeksa M se (posebno u glazbi) nazivaju višim harmonicima. Za gornje rubne uvjete očita je veza između indeksa višeg harmonika i broja čvorova stacionarnog titranja:

$$\text{broj čvorova} - 1 = M$$

U gornjim primjerima transverzalnog i longitudinalnog titranja medija pretpostavili smo idealni slučaj koji se očituje kroz proporcionalnost valnog broja k i kružne frekvencije ω izraženom preko (4.9). Općenito se veza valnog broja i kružne frekvencije zove disperzijskom relacijom i generalno nema tako jednostavan oblik. Vrlo brzo ćemo u našem napredovanju sresti i drukčije oblike disperzijskih relacija.

POKUSI

Studenti promatraju titranje elastične niti; mijenjanje broja stojnih valova na istom razmaku rubnih čvorova preko promjena zategnutosti niti. Monokord: mijenjanje frekvencije osnovnog tona povećanjem napetosti žice i/ili promjenom razmaka rubnih čvorova. Princip rada puhačkih instrumenata kod kojih se promjenom mjesta na kojem instrument ima slobodan kontakt s okolnim zrakom mijenja visina tona zvuka (frekvencija).

4.4 Prikaz titranja elastičnog medija s učvršćenim krajevima pomoću Fourierovog reda

Izaberimo takvo rješenje u kojem za $t=0$ cijeli medij miruje to jest $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t=0) = 0$ Ovakvo početno stanje medija možemo realizirati pripremom profila koji do početka brojenja vremena

deformira medij a zatim se u trenutku $t=0$ uklanja i prepušta medij vlastitom titranju. U generalnom izrazu (4.22) to ima za posljedicu da su svi $\varphi_M = 0$. Naime ako tome ne bi bilo tako, tada bi mod koji ima φ_M različit od nule generirao u $t=0$ brzinu medija različitu od nule koju drugi modovi radi svoje linearne nezavisnosti ne bi mogli poništiti da bi se ispunio početni uvjet da medij na početku miruje. (Argumenti svih sinusnih doprinosa nastalih vremenskim deriviranjem moraju biti nula!). Tim izborom početnih uvjeta (4.22) se reducira na:

$$\psi(x, t) = \sum A_M \sin(Mk_1 x) \cos(M\omega_1 t) \quad (4.23)$$

U vremenu $t=0$ taj profil se opisuje:

$$\psi(x, t = 0) = A_1 \sin(k_1 x) + A_2 \sin(2k_1 x) + A_3 \sin(3k_1 x) + \dots + A_N \sin(k_N x) + \dots \quad (4.24)$$

Ovaj oblik je specijalni slučaj Fourierovog prikaza funkcije na konačnom intervalu od $x = 0$ do $x = L$ na čijim krajevima funkcija iščezava. Teoriju Fourierovih redova studenti uče tijekom druge godine studija i ovdje ćemo spomenuti samo minimalne činjenice o toj materiji. Uobičajene „glatke“ funkcije definirane na konačnom intervalu mogu se razviti u red analogan (4.24), s time da se u red uključe i odgovarajući analogni kosinusni termini. Tada razvoj funkcije ima generalni oblik :

$$\psi(x) = \sum [A_n \sin(nk_1 x) + B_n \cos(nk_1 x)] \quad (4.25)$$

Ovaj prikaz ima radi periodičnosti funkcija sinusa i kosinusa svojstvo periodičnosti i obnavlja se na svakom slijedećem intervalu L . Studentu je to jasno jer se za svaki član višeg k argumenta već u intervalu unutar L dešavaju potpuni titraji i sinusa i kosinusa i istom se periodičnošću ponavljaju i izvan intervala duljine L . Student može lakše prihvatiti činjenice oko Fourierovih redova ako pojedine terme u gornjem razvoju interpretira kao komponente baznih vektora u vektorskom prostoru koji ima (diskretno) beskonačno mnogo dimenzija. Funkcija $\psi(x)$ je tada proizvoljni vektor unutar vektorskog prostora razapetog vektorima $\sin(nk_1 x)$ i $\cos(nk_1 x)$ gdje indeks n ide od 1 do beskonačnosti. Naravno u matematičkoj terminologiji vektorskih prostora postavlja se pitanja recepta za pravljenje skalarnog produkta da bismo preko njega mogli iz $\psi(x)$ isprojicirati komponentu u smjeru pojedine sinusne ili kosinusne funkcije. To je drugim riječima pitanje određivanja koeficijenata A_n i B_n u razvoju (4.25). Taj se skalarni produkt u tom vektorskom prostoru definira kao integral produkta dviju funkcija preko intervala L . U tako definiranom skalarnom produktu, navedene funkcije imaju očito svojstvo ortogonalnosti, jer integral produkta svakog od različitih sinusnih funkcija oblika $\sin(nk_1 x)$ sa sinusnom i/ili kosinusnom funkcijom drugog cjelobrojnog indeksa (na primjer m) načinjen preko intervala (periodičnosti) L iščezava. Radi navedene ortogonalnosti funkcija po kojima razvijamo i radi poznatih rezultata integriranja kvadrata sinusa i kosinusa po intervalu periodičnosti imamo za koeficijente:

$$B_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x) dx \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \cos(nk_1 x) dx \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin(nk_1 x) dx \quad (4.26)$$

Podsjećamo da su k_1 i L povezani izrazom (4.19).

Studenti će na vježbama razvijati različite profile u Fourierove redove. Fourierova analiza ima široke primjene u mnogim granama fizike i uopće u prirodnim znanostima. S druge strane, na primjer, boja tona jednog muzičkog instrumenta uključuje prvenstveno relativno učešće osnovne frekvencije (visine tona) i ostalih viših harmonika koje instrument istovremeno emitira. (Najnovija istraživanja na ljudima su indicirala da registriamo i karakteristične

tranzijente nastale pri aktivaciji tona pojedinog instrumenta ; o tranzijentnim fenomenima bit će kasnije govora) .

4.5 Analiza vremenski periodičkih fenomena pomoću Fourierovih redova

U odsječku (4.4) Fourierovi redovi su imali ulogu baze po kojoj se opisivala svaka funkcija na konačnom intervalu. Konstatirali smo doduše da se taj opis u prostoru periodički ponavlja , no periodičnost nije bila temeljna točka u razmatranju jer se radilo o traženju rješenja valne jednadžbe s uvjetom da to rješenje iščezava na krajevima intervala. Nakon prvog takvog opisa (4.22) s (4.25) proširili smo klasu funkcija koje se opisuju Fourierovim redovima i uvjet da funkcija iščezava na krajevima za poopćenje (4.25) više nije potreban. Operativa postupka je vrlo precizno dana s (4.26).

U prirodi smo vrlo često u kontaktu s periodičkim fenomenima (koji nemaju jednostavan sinusoidalni karakter. No upravo nađena tehnika Fourierovih redova nam je najprirodnija baza za opis vremenski periodičkih fenomena. Studenti su na seminaru upoznati s elementarnim transducerima (engleski termin za pretvarač ulaznog signala u uređaj u dominantno električki izlaz, koji je proporcionalan ulaznom signalu) za pretvorbu akustičkog nadtlaka (zvuka) u električki napon, to jest razne vrste mikrofona. Tijekom predavanja studenti će vidjeti instrumente koji proizvode približno čistu sinusoidu i one koji za istu frekvenciju imaju daleko kompleksniji oblik s istim periodom. Taj period kompleksnog fenomena određuje visinu glazbenog tona. Jednostavnom analogijom s prostornom Fourierovom analizom zaključujemo da je za kompletan opis potrebno uključiti uz osnovnu frekvenciju ν_0 i višekratnike $2\nu_0, 3\nu_0 \dots$ i t.d.

4.6 Komplementaran rubni uvjet: slobodni kraj

Najveći dio poglavlja je bio posvećen posljedicama zahtjeva da titranja medija nema na njegovim krajevima. U stručnom žargonu taj kraj medija zove se čvrstim krajem. Postoji i drugi , suprotni zahtjev. Intuitivno on kaže da sile koja bi sprečavala titranje (u smjeru promatranja) nema. Mi smo kod transverzalnog titranja napete žice ustanovili:

$$F_y = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

Kako prvi faktor u izrazu za transverzalnu silu ne iščezava, uvjet slobodnog kraja se formulira kao:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{4.27}$$

POKUSI

U slučaju transverzalnog titranja, student može predočiti realizaciju uvjeta (4.27) ili prstenom koji bez trenja klizi po transverzalno orijentiranoj osi ili, što je realnije , točkićem koji se bez trenja kotrlja po transverzalnoj osi , a za čije središte simetrije je vezana nit medija. Demonstrirat će se i nekoliko najjednostavnijih modova titranja za koje je jedan kraj slobodan. Student se može sjećati da su (orguljaške) svirale na klin upravo primjer takvog titranja kod kojeg je jedan kraj čvrst a drugi slobodan. Osnovno titranje je naravno ono s četvrtinom valne duljine.

4.7 Dalekosežnost važnosti stacionarnih stanja i Fourierovog razvoja

Pri gornjim razmatranjima ne mora odmah biti očita temeljna uloga koju stacionarna stanja imaju ne samo u razumijevanju valova općenito nego i u širem fizikalnom kontekstu. Već je bilo spomenuto da se u kvantnoj fizici stacionarna stanja-vlastita stanja-modove može uzeti kao intelektualni model za diskretna stanja mikrosistema kakav je na primjer atom. I u klasičnom slučaju i u kvantnom analogonu ta diskretna stanja (ovdje je značenje diskretnosti kao suprotnosti kontinuiranosti) potječe od rubnih uvjeta zadanih na medij. S druge strane izraz (4.23) ima u sebi nevjerovatan potencijal. Vratimo se na trenutak problemu s kojim smo započeli korake Fourierove analize. Imali smo početni proizvoljan profil, prema njemu formirali medij i odredili Fourierove koeficijente. U tom trenutku mi kroz (4.23) imamo u rukama opis sudbine kontinuiranog medija za sva vremena. Naime s poznatim koeficijentima znamo opis sustava u trenutku kad ga prepuštamo samog sebi, no ponašanje svake komponente posebno određeno je vlastitom frekvencijom moda i kosinoidalnom ovisnošću o vremenu. Time je izraz (4.23) opis sustava u svakom drugom trenutku vremena. Prigovor da smo upotrijebili rubni uvjet mirovanja krajeva medija je lako eliminirati. Generalizacija tako limitiranog opisa tipa (4.24) opisom koji uključuje i kosinusno titranje s istim frekvencijama kroz Fourierov red (4.25) poopćuje mogućnost primjene i na druge rubne uvjete. Konačno, zasad nije jasno imaju li stojni valovi bilo kakvu povezanost s transmisijom titranja kroz medij. I ovdje već postoji odgovor samo nije eksplicitan. Zamislimo da je u sredini medija formiran jedan titraj ali da je njegova duljina (valna duljina) daleko manja od dimenzija na kojima medij ima rubne uvjete. Mi imamo: $\psi(x, t = 0) = 0$, te $\dot{\psi}(x, 0) = 0$ To je jedan sinusoidin titraj i $\psi = 0$ po ostatku područja. Načinimo preko cijelog područja medija proceduru opisanu za koeficijente (4.26). Naravno L je interval rasprostiranja medija, a ne područje sinusoidinog titraja. Izraz

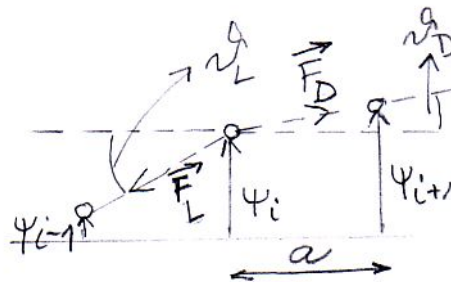
$$\psi(x, t) = \sum [A_n \sin(nk_1 x) \cos(\omega_n t) + B_n \cos(nk_1 x) \cos \omega_n t] \quad (4.28)$$

Opisivat će vremensku dinamiku medija nakon što smo ga u $t=0$ oslobodili od početnog oblika. Studentima bi trebalo biti intuitivno jasno da vremenski razvoj sustava ne će rezultirati stacionarnim titranjem medija nego jednom vrlo pokretljivom dinamikom. Odgodit ćemo eksplicitni odgovor na to što se dešava do trenutka kada ćemo demonstrirati da se stojni val može dobiti superpozicijom dva vala jednakog oblika koji putuju u suprotnim smjerovima brzinom v iz valne jednadžbe.

5. Nelinearne disperzijske relacije za elastično povezani sustav N masa i N vezanih krugova vrste LC

Pri titranjima homogenog linearnog medija pokazali smo važno svojstvo linearne veze između kružne frekvencije titranja i valnog broja (4.9) : $\omega = vk$ gdje je v brzina širenja vala. Ovaj izraz je jedan mogući oblik disperzijske relacije. On indicira u ovakvom slučaju da se titranja sviju frekvencija šire istom brzinom po mediju (dokaz će uslijediti kod razmatranja putujućih valova). Ovakva relacija vrijedi i za elektromagnetske valove u vakuumu. Posljedica je da u vakuumu sve frekvencije putuju zajedno. U srednjoj školi su studenti čuli za disperziju svjetlosti (razlaganje svjetla na primjer prizmom) po frekvencijama titranja koja je utemeljena upravo na različitosti brzina svjetla za razne frekvencije. Mi ćemo, naravno to i objasniti kasnije. Na ovom mjestu samo želimo obrazložiti racionalnost imena disperzijska relacija za (4.9) i činjenicu koju ćemo istraživati u ovom poglavlju a koja pokazuje i druge oblike veze, osim proporcionalnosti, između valnog broja i kružne frekvencije.

5.1 Potankosti o titranju sustava titranja N jednakih masa vezanih jednakim oprugama.



Transverzalno titranje:

Sustav prikazan na slici ima mase m koje su u ravnotežnom položaju razmaknute za udaljenost a . Promatramo gibanje mase (i) na koju utječu samo njezini susjedi s lijeva to je masa (i-1) , a s desna je masa (i+1). Rezultantna sila daje masi m transverzalnu akceleraciju:

$$m \frac{d^2 \psi_i}{dt^2} = F_D \sin \vartheta_D - F_L \sin \vartheta_L = T_0 (tg \vartheta_D - tg \vartheta_L) = T_0 \left(\frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{a} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{a} \right)$$

$$= \frac{T_0}{a} (\psi_{i+1} + \psi_{i-1} - 2\psi_i)$$

F s indeksima D i L je oznaka za silu s desne odnosno lijeve strane mase (i) , a T_0 je stalna horizontalna napetost . Tako smo dobili sustav jednadžbi za pomake individualnih masa:

$$\ddot{\psi}_i = \frac{T_0}{ma} (\psi_{i+1} + \psi_{i-1} - 2\psi_i) \quad (5.1)$$

Ako je sustav podvrgnut uvjetu da su rubne opruge učvršćene, tada su $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$.

Ovaj sustav je vrlo blizak sustavu (3.4), koji smo već razmatrali. Analogija se povećava kada potražimo stacionarna rješenja:

$$\psi_i = A_i \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.2)$$

gdje su ω i φ zajednički svim masama. Uvrštenjem pretpostavke (5.2) u (5.1), deriviranjem po vremenu i kraćenjem faktora s vremenskom ovisnošću slijedi:

$$-\omega^2 A_i = \frac{T_0}{ma} (A_{i+1} + A_{i-1} - 2A_i) \quad (5.3)$$

Ovaj sustav linearnih jednadžbi za amplitude pojedinih titranja u stacionarnom rješenju pogađamo u analogiji s titranjem kontinuiranog medija gdje smo već koristili pretvorbe između indeksa i kontinuirane varijable: $x = ia$. Tako za M-ti mod titranja pretpostavljamo umjesto $A_M(x) = A^M \sin(k_M x)$

$$A_i^M = A^M \sin(k_M ia) \quad (5.4)$$

i je naravno indeks mase a ne imaginarna jedinica. Kada pretpostavku (5.4) uvrstimo u (5.3) a s ω_M označimo kružnu frekvenciju M-tog moda titranja imat ćemo:

$$-\omega_M^2 A^M \sin(k_M ia) = \frac{T_0}{ma} \{A^M \sin[k_M (i+1)a] + A^M \sin[k_M (i-1)a] - 2A^M \sin(k_M ia)\} \quad (5.5)$$

Korištenjem adicijskog teorema gdje argument sinusa odjeljujemo u $ik_M a$ te $k_M a$ dobivamo poslije sređivanja i kraćenja s faktorom $\sin(k_M a)$:

$$\omega_M^2 = 2 \frac{T_0}{ma} (1 - \cos(k_M a)) \quad (5.6)$$

i daljim sređivanjem:

$$\omega_M^2 = 4 \frac{T_0}{ma} \sin^2 \frac{k_M a}{2} \quad (5.7)$$

$$\omega_M = 2 \left(\frac{T_0}{ma} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{k_M a}{2} \quad (5.7a)$$

Ovo je ponovno direktna veza kružne frekvencije i valnog broja (disperzijska relacija) no uočavamo da je ta veza mnogo kompleksnija.

5.2 Utjecaj (čvrstih) rubnih uvjeta na valni broj i ostale povezane veličine.

Kao i u slučaju kontinuiranog medija i u slučaju diskretnih masa (N masa s razmacima a rezultira u ukupnoj duljini sustava: (N+1)a) s time da su $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$ u općem rješenju

$$A_i^M = A \sin(ik_M a) + B \cos(ik_M a) \quad (5.8)$$

Gornji uvjet za $i=0$ povlači da B iščezava. Na drugom kraju uvjet za $i=N+1$ kvantizira valni broj:

$$(N+1)k_M a = M\pi \quad \text{to jest} \quad k_M = \frac{M\pi}{(N+1)a} \quad (5.9)$$

POKUS

Drugačiji rubni uvjet na krajevima proizveo bi i drugačije odnose u (5.9). Zgodno je ustanoviti da sada imamo i eksplicitnu analitičku formulu o odnosu amplituda susjednih masa koje učestvuju u titranju. Omjer amplituda titranja susjednih masa je omjer sinusa koji se u fazi razlikuju za stalni razmak:

$$\Delta \mathcal{G}_M = k_M a = \frac{M}{(N+1)} \pi \quad (5.10)$$

Grafički prikaz disperzijske relacije $\omega(k)$ ((5.7a) nakon kvantizacije valnog broja k_M , danog uvjetom (5.9), sastoji se od krivulje proporcionalne prvoj četvrtini sinusoide na kojoj se nalaze diskretne vrijednosti ordinate krivulje dobivene presjecanjem sinusoide na mjestima koja odgovaraju kvantiziranoj apscisi k_M . Da se radi samo o prvoj četvrtini sinusoide jasno je iz činjenice da u (5.9) karakteristični broj moda M ne može doseći vrijednost $N+1$. Fizikalno je to povezano s činjenicom da se sa zadanim rubnim uvjetom čvrstih krajeva između tih krajeva ne može napraviti stacionarno rješenje titranja s rasporedom trbuha gušćim od razmaka među masama. Vrijedno je još uočiti činjenicu koju ćemo uskoro i više razmatrati: i za k_M i za ω_M postoje maksimalne vrijednosti!

Aproksimacija velikih valnih duljina:

Pretpostavlja se da je $\Delta \mathcal{G}_M = k_M a \ll 1$ u kojem slučaju je $\sin \frac{k_M a}{2}$ približno $\frac{k_M a}{2}$.

Tom pretpostavkom se disperzijska relacija (5.7) linearizira i pretvara u :

$$\omega_M = \sqrt{\frac{T_0}{ma}} k_M \quad (5.11)$$

A to odgovara disperzijskoj relaciji dobivenoj pri transversalnom titranju homogene žice. Longitudinalno titranje:

Taj smo slučaj već vidjeli pa možemo prepisati jednadžbu za i -tu masu (3.4) u modificiranom obliku:

$$\ddot{\psi}_i = \frac{K}{m} (\psi_{i+1} + \psi_{i-1} - 2\psi_i) \quad (5.12)$$

To je zapravo gotovo identično polaznoj jednadžbi (5.1), samo je sklop konstanti $\frac{K}{m}$ u (5.12)

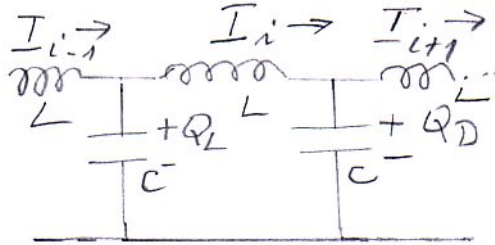
preuzeo ulogu sklopa $\frac{T_0}{ma}$ iz (5.1). To znači da se cijela procedura može analogno provesti odnosno da je nova disperzijska relacija u longitudinalnom slučaju titranja:

$$\omega_M = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin \frac{k_M a}{2} \quad (5.13)$$

POKUS

5.3 Diferencijalna jednačina za i-tu struju u LC prijenosnoj liniji serijski povezanih zavojnica čije spojeve presijecaju paralelno spojeni kapacitori, te disperzijska relacija za tu konfiguraciju

Ako s Q_L i Q_D označimo naboje na lijevom i desnom kapacitoru među kojima teče struja I_i ,



dok svi kapacitori imaju kapacitet C a sve zavojnice imaju induktivitet L možemo izreći veze među njima:

$$\frac{dQ_L}{dt} = I_{i-1} - I_i \quad \frac{dQ_D}{dt} = I_i - I_{i+1} \quad (5.14)$$

Primjenom Kirchoffovih pravila za centralnu petlju za i -tu struju slijedi:

$$\frac{Q_L}{C} - L \frac{dI_i}{dt} - \frac{Q_D}{C} = 0 \quad (5.15)$$

Deriviranjem (5.15) po vremenu uz korištenje (5.14) i sređivanjem nakon toga dobiva se:

$$\ddot{I}_i = \frac{1}{LC} (I_{i+1} + I_{i-1} - 2I_i) \quad (5.16)$$

To je pak matematički analogno već studiranoj relaciji (5.1) s time da je ulogu sklopa veličina $\frac{T_0}{ma}$ preuzeo sklop: $\frac{1}{LC}$. Potpunom analogijom ponavlja se i procedura za disperzijsku relaciju:

$$\omega_M = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{\Delta \mathcal{G}_M}{2}\right) \quad (5.17)$$

Još kompliciraniju vezu između kružne frekvencije stacionarnog stanja i valnog broja dobivamo ako se elastična sila sastoji iz više različitih doprinosa.

5.4 Elastično vezana njihala

Ostavlja se studentu da počne s 2. Newtonovim zakonom pisati analogon jednačine (5.12) s time da će se osim $-\frac{2K}{m}\psi_i$ člana sada tamo naći i dodatni član: $-g \sin \mathcal{G}_i$ koji u aproksimaciji malih kuteva/pomaka prelazi u $-\frac{g}{l}\psi_i$. Nakon provođenja već pokazane procedure puta do disperzijske relacije dobit će se:

$$\omega_M^2 = \frac{g}{l} + 4 \frac{K}{m} \sin^2 \frac{\Delta \mathcal{G}_M}{2} \quad (5.18)$$

Iako je ovo vrlo jednostavan primjer za rješavanje, u sadržaju jednadžbe (5.18) su velike posljedice. Naime iz (5.10) znamo da je valni broj k_M povezan s $\Delta\mathcal{G}_M$ pa se time pojavljuje i u (5.18). Dok u nedisperzivnim medijima k_M prati ω_M linearno, pa i bez ograničenja, u slučaju elastično vezanih njihala postoje jasne granice za proračun i $\Delta\mathcal{G}_M$ i k_M ; granične vrijednosti kružne frekvencije ω_M^2 unutar kojih postoje mogućnosti realnih vrijednosti za k_M jesu: $\frac{g}{l}$ kao donja granica i $\frac{g}{l} + \frac{4K}{m}$ kao gornja granica.

Ovo će se pokazati sudbonosnim za frekventne mogućnosti transporta signala duž medija i biti će naročito važno u analognom slučaju transmisijske linije elektromagnetskog valovoda.

Sve do sada bili smo zainteresirani za efekte u kojima se promatra titranja sve kompleksnijih idealnih sustava no nismo razmatrali dva bitna realna aspekta koji su prisutni u titranju pa onda i u transmisiji mehaničkih, akustičkih i elektromagnetskih signala. Pri titranju postoje i gubici energije koji se daju elegantno tretirati ako se u mehaničkim titranjima radi o sili otpora proporcionalnoj brzini. S druge strane da bi signal počeo putovati, potreban je izvor titranja. Taj se dio matematičkog opisa naziva prisilnim titranjem (gušenog) harmoničkog oscilatora.

6. Prisilno titranje gušenog harmoničkog oscilatora

Uvježbavajući primjene 2. Newtonovog zakona u 1. semestru ovaj je problem već bio riješen. Već nam je poznato da se titranje harmoničkog oscilatora guši u vremenu radi unutrašnjeg trenja (ohmskog otpora u slučaju LRC titrajnog kruga). I u mehaničkom i u električkom slučaju smo pokazali da će oscilator jedne vlastite frekvencije „biti prisiljen“ titrati frekvencijom vanjske sile (vanjskog napona u električkom slučaju), no to novo titranje prihvatit će u stacionarnom smislu tek nakon određenog vremena. Razradit ćemo sada u većim potankostima taj efekt tranzicijskog vremena. Ponovit ćemo i efekt rezonantnog odziva harmoničkog oscilatora za slučaj da prisila pogađa frekvenciju kojom bi titrao slobodni oscilator. Svi su ovi dodaci potrebni da bismo bolje razumjeli transmisiju realnih signala. Naš se opći problem piše u standardnoj notaciji gušenog harmoničkog oscilatora kao:

$$m\ddot{x} = -Kx - m\Gamma\dot{x} + F(t) \quad (6.1)$$

K je naravno konstanta opruge, $m\Gamma$ je konstanta proporcionalnosti između sile trenja i brzine a $F(t)$ je periodička sila koja djeluje na masu m . Uz standardnu vezu:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \quad (6.2)$$

Slijedi formulacija problema:

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (6.3)$$

Za početak ćemo razmotriti jednostavniju situaciju $F(t)=0$, jer nam ona daje ideju o vremenu u kojem se vlastite oscilacije smiruju, što će pomoći razumijevanju tranzicijskog vremena u kojem vanjska sila preuzima kontrolu i nameće svoj ritam titranja. Dodatni argument za rješavanje jednadžbe bez vanjske prisile $F(t)$ u (6.3) daje nam teorija linearnih nehomogenih jednadžbi. Naime student može lako provjeriti važno svojstvo. Svakom se posebnom rješenju nehomogene linearne jednadžbe može dodati opće rješenje homogene jednadžbe i ponovno dobiti rješenje nehomogene jednadžbe. Time se kompleksniji problem nalaženja općeg rješenja nehomogene jednadžbe svodi na (nama već poznato) određivanje općeg rješenja homogene jednadžbe i nalaženje jednog partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe.

6.1 Titranje slobodnog gušenog harmoničkog oscilatora

POKUS

Jednadžbu (6.3) smo u odsutnosti vanjske sile već tretirali u prvom semestru; za diferencijalnu jednadžbu:

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.4)$$

je jedna varijanta rješenja:

$$x_g(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega_g t + \varphi) \quad (6.5)$$

gdje indeks g podsjeća da se radi o rješenju jednadžbe slobodnog gušenog oscilatora. Uvrštavanjem (6.5) u (6.4) može se verificirati da je (6.5) doista rješenje (6.4) pri čemu su A i φ integracijske konstante (određuju se na primjer iz početnih uvjeta kao što su pozicija i brzina u određenom vremenu) a vrijedi i

$$\omega_g^2 = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4} \quad (6.6)$$

Također je vrijedno uočiti vremensku konstantu :

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (6.7)$$

koja očitno prema (6.5) određuje ritam gušenja oscilacija. Unutar ovog poglavlja pokazat ćemo da je τ vrijeme u kojem energija oscilatora pada na $\frac{1}{e}$ svoje početne vrijednosti. Zgodno je integracijske konstante podesiti tako da poziciju i brzinu u $t=0$ možemo direktno upisati u rješenje titranja (6.5). U tu svrhu pišemo rješenje u obliku:

$$x_g(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} (A_g \sin \omega_g t + B_g \cos \omega_g t) \quad (6.8)$$

Veze novih i starih integracijskih konstanti dobivamo raspisivanjem (6.5) po adicijskom teoremu i usporedbom s (6.8):

$$A_g = -A \sin \varphi \quad B_g = A \cos \varphi \quad (6.9)$$

Odakle su kvadriranjem i zbrajanjem s jedne strane, te dijeljenjem (6.9) jasne i obratne transformacije. Želimo konstante u (6.8) izraziti preko početnih uvjeta $x_g(0)$ i $\dot{x}_g(0)$ to jest položaja i brzine oscilatora u $t=0$. Uvrštavanjem u (6.8) $t=0$ imamo:

$$x_g(0) = B_g \quad (6.10)$$

A deriviranjem (6.8) i ubacivanjem istog vremena slijedi:

$$\dot{x}_g(0) = -\frac{\Gamma}{2} B_g + A_g \omega_g \quad (6.11)$$

Iz (6.11) i (6.10) dobivamo drugu konstantu:

$$A_g = \frac{1}{\omega_g} \left[\dot{x}_g(0) + \frac{\Gamma}{2} x_g(0) \right] \quad (6.12)$$

Time smo u slučaju potkritičkog gušenja

$$\omega_g^2 > 0 \quad (6.13)$$

dobili rješenje izraženo početnim uvjetima u vrijeme $t=0$ kao:

$$x_g(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left\{ x_g(0) \cos \omega_g t + \left[\dot{x}_g(0) + \frac{\Gamma}{2} x_g(0) \right] \frac{\sin \omega_g t}{\omega_g} \right\} \quad (6.14)$$

Čijom specijalizacijom u slučaju kritičkog gušenja,

$$\omega_g = 0 \quad (6.16)$$

proučavanjem limesa nastalih s $\omega_g \rightarrow 0$ slijedi ponašanje:

$$x_g(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left\{ x_g(0) + \left[\dot{x}_g(0) + \frac{\Gamma}{2} x_g(0) \right] t \right\} \quad (6.17)$$

Za nadkritično gušenje:

$$\omega_g^2 < 0 \quad (6.18)$$

Slijedi iz općeg oblika (6.8):

$$x_g(t) = e^{\frac{\Gamma}{2}t} \left\{ x_g(0) \operatorname{ch}|\omega_g|t + \left[\dot{x}_g(0) + \frac{\Gamma}{2} x_g(0) \right] \frac{\operatorname{sh}|\omega_g|t}{|\omega_g|} \right\} \quad (6.19)$$

Relacija je (6.19) dobivena i preko poznatih veza sinusa i kosinusa imaginarnih argumenata i njihovih hiperbolnih ekvivalenata. U slučaju slabog gušenja možemo izračunati ponašanje energije sustava pod pretpostavkom da se tijekom jednog titraja amplituda titranja nije bitno promijenila. Ova pretpostavka nam pomaže i da odredimo vrlo poznati i često upotrebljavani Q faktor gušenog oscilatora.

6.2 Energija gušenog slobodnog oscilatora za malo gušenje.

Gore je opisan uvjet malog gušenja, a tijekom izvoda izraza za prosječnu energiju vidjet ćemo direktno i mjesto na kojem se ta pretpostavka koristi. Izraz za energiju oscilatora dobivamo počevši od zbroja njegovih trenutnih iznosa kinetičke i potencijalne energije:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 \quad \text{ili ekvivalentno} \quad E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad (6.20)$$

Ako za opis gibanja upotrijebim varijantu (6.8) deriviramo je po vremenu i kvadriramo koordinatu i brzinu, te nakon toga izvršimo uprosječivanje po periodu titranja te koristimo činjenice da prosječne vrijednosti \sin^2 i \cos^2 po periodu iznose $\frac{1}{2}$ dobit ćemo:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m e^{-\Gamma t} \left(A_g^2 \omega_g^2 \frac{1}{2} + B_g^2 \omega_g^2 \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(\frac{1}{2} A_g^2 + \frac{1}{2} B_g^2 \right) e^{-\Gamma t} \quad (6.21)$$

Oznaka $\langle E \rangle$ predstavlja prosječnu vrijednost energije tijekom jednog perioda titranja s frekvencijom ω_g i dobivena je uz pretpostavku da je faktor $e^{-\Gamma t}$ približno stalan tijekom perioda! (To je pretpostavka slabog gušenja). Vidimo da energija ovakvog gušenog oscilatora, kojeg ne tjera vanjska sila, opada u vremenu eksponencijalno gdje je τ iz (6.7) u stručnom rječniku relaksacijsko vrijeme. (Kada god neki fizikalni fenomen trne eksponencijalno na način $e^{-\frac{t}{\tau}}$ τ je relaksacijska konstanta). Možemo (6.12) opisati i s pokratom:

$$\langle E \rangle = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.22)$$

gdje smisao i vrijednost E_0 vidimo iz (6.21). To je energija oscilatora u vrijeme $t=0$.

$$E_0 = \frac{1}{4} m (\omega_g^2 + \omega_0^2) (A_g^2 + B_g^2) \quad (6.23)$$

6.3 Q faktor kvalitete gušenog oscilatora.

Dio literature o titranju ističe kombinaciju karakterističnih vrijednosti oscilatora ω_0 i Γ koja ima vrlo intuitivno značenje:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} \quad (6.24)$$

Pokazat će se da ova kombinacija kružne frekvencije oscilatora i konstante njegovog gušenja pomaže boljem razumijevanju svojstava konkretnog oscilatora. Veličina (6.24) je očito bezdimenzionalan broj. Nadalje uvrštenjem (6.24), definicije Q faktora, u (6.6) izraz za kružnu frekvenciju gušenog oscilatora imamo:

$$\omega_g^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \quad (6.25)$$

Ako je Q velik u usporedbi s jedinicom, što je ispunjeno u brojnim uređajima u realnoj upotrebi, $\omega_g \cong \omega_0$, tada se oblik ponašanja amplitude gušenog oscilatora može pisati i kao:

$$x_g(t) = A e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (6.26)$$

čime možemo uočiti da Q određuje broj oscilacija kružne frekvencije ω_0 potreban da se amplituda titranja smanji za faktor e. Prema (6.26) svaki vremenski period $t \approx \frac{2\pi n}{\omega_0}$ se može opisati i pomoću n, gdje je n broj proteklih perioda. Time je amplitudu titranja moguće pisati kao funkciju broja titraja:

$$A(n) \approx A e^{-\frac{n\pi}{Q}} \quad (6.27)$$

Očito da bi amplituda pala za faktor e potrebno je:

$$n \approx \frac{Q}{\pi} \quad (6.28)$$

oscilacija. U dijelu literature o vibracijama posvećenom upravo situaciji sa slabim gušenjem, čak se i početna diferencijalna jednačba (6.4) piše u obliku:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.29)$$

Pri studiju rezonantnih fenomena dio literature upotrebljava upravo Q kao mjeru uskoće rezonancije umjesto veličine Γ koja će se tamo inače prirodno pojaviti.

6.4 Prisilno titranje gušenog harmoničkog oscilatora jedne frekvencije

U ovom dijelu poglavlja obavljamo analizu na relativno transparentnom slučaju odziva oscilatora na djelovanje harmonijske sile jedne frekvencije. Poznavanje toga rješenja ima dalekosežne posljedice. Naime, radi linearnosti diferencijalne jednačbe problema, rješenja različitih frekvencija se mogu superponirati ako se vanjska sila sastavlja superpozicijom sila raznih frekvencija. To na primjer znači da u slučaju svake periodičke prisile možemo za tu prisilu (radi periodičnosti) načiniti Fourierov razvoj. Znanjem rješavanja prisilnog titranja za jednu frekvenciju znamo rješenje i za sve članove Fourierovog razvoja. Tako će se ukupno rješenje sastojati od Fourierove superpozicije rješenja za pojedine frekvencije s istim koeficijentima s kojim je izgrađena periodička sila. Kako ne bismo upotrebljavali simboliku linearnih diferencijalnih operatora pokazat ćemo temelj gornje tvrdnje o superponiranju na najjednostavnijoj situaciji. Pretpostavimo da poznajemo dva specijalna rješenja jednačbi:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_1}{m} \cos(\omega_1 t) \quad (6.30)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = \frac{F_2}{m} \cos(\omega_2 t) \quad (6.31)$$

gdje je masa u oscilatoru, F-ovi su snage dviju sila: 1 i 2 a ω_1 i ω_2 su kružne frekvencije djelovanja tih sila. Zbrajanjem jednačbi (6.30) i (6.31) i grupiranjem posebno članova s istim stupnjem deriviranja te uzimajući u obzir da je derivacija sume jednaka sumi derivacija te da operacija množenja brojem ima svojstvo distributivnosti u odnosu na zbrajanje, slijedi:

$$\frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} + \Gamma \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = \frac{F_1}{m} \cos(\omega_1 t) + \frac{F_2}{m} \cos(\omega_2 t) \quad (6.32)$$

Jednačba (6.32) pokazuje da je odgovor oscilatora na silu dobivenu superponiranjem sila rješenje koje je rezultat superponiranja odgovora na te individualne sile! Tako se pitanje rješavanja problema prisilnog titranja s periodičkim oblikom prisile svodi na rješavanje diferencijalne jednačbe u kojoj prisila ima jednu frekvenciju.

Prije primjene matematičkog algoritma možemo formulirati fizikalna očekivanja o ponašanju gušenog harmoničkog oscilatora kojeg se prisiljava na titranje frekvencijom različitom od vlastite. U problemu su upletena tri aspekta istovremeno:

- 1) slobodni bi oscilator pokrenut titrao vlastitom frekvencijom ω_0 .
- 2) Gušenje kroz parametar Γ uklanja to titranje kako vrijeme teče.
- 3) Oscilator je prisiljen titrati frekvencijom vanjske prisile kako ćemo sada objasniti.

Započnimo stanjem u kojem je samo efekt 1) to jest jednom pokrenut oscilator titra zauvijek frekvencijom ω_0 . Ako sada uključimo i prisilu frekvencije ω , oscilator će prihvatiti titrati i njenom frekvencijom (to se lako potvrđuje i inspekcijom nehomogene jednačbe u kojoj nema gušenja: rješenju homogene može se pridodati rješenje nehomogene; svako titra svojom frekvencijom). Konačno, uključenje gušenja parametrom Γ , uklanja titranje frekvencijom ω_0 nakon dovoljno dugo vremena. Kako rješenje koje titra s ω preostaje nakon dugo vremena, naziva ga se opravdano stacionarnim i obilježava indeksom S. To je još više podržano činjenicom da je to Specijalno rješenje koje nam jedino treba da bismo preko općeg rješenja homogene diferencijalne jednačbe dodatkom specijalnog rješenja dobili opće rješenje nehomogene diferencijalne jednačbe.

POKUSI Demonstrira se pojava udara između ω i ω_g .

Sada imamo razlog zašto tražimo rješenje jednadžbe prisilnog titranja gušenog oscilatora koje titra samo frekvencijom prisile ω :

$$\ddot{x}_s + \Gamma \dot{x}_s + \omega_0^2 x_s = \frac{F}{m} \cos \omega t \quad (6.33)$$

Postoje dvije notacije za rješenje:

$$x_s = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.34)$$

i

$$x_s = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (6.35)$$

Svaka od notacija ima svoje prednosti pri interpretaciji i obadvije ćemo upotrebljavati. Adicijski teorem za $\cos(\omega t + \varphi)$ nam omogućuje uspostaviti veze među konstantama:

$$a = -A \sin \varphi \quad b = A \cos \varphi \quad A^2 = a^2 + b^2 \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{a}{b} \quad (6.36)$$

Ako počnemo od notacije (6.35) načinimo potrebne derivacije po vremenu i rezultate uvrstimo u (6.33) te grupiramo članove uz sinus i kosinus, imat ćemo:

$$\sin \omega t (-a\omega^2 - b\omega\Gamma + \omega_0^2 a) + \cos \omega t (-b\omega^2 + a\omega\Gamma + \omega_0^2 b - \frac{F}{m}) = 0 \quad (6.37)$$

Radi linearne nezavisnosti sinusa i kosinusa, faktori u zagradama moraju iščezavati pa se dijeljenjem prvog faktora s $\omega\Gamma$ a drugog s $(\omega_0^2 - \omega^2)$ dobiva:

$$\frac{a(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega\Gamma} - b = 0 \quad (6.37a)$$

$$a \frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} + b = \frac{F}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.37b)$$

čijim zbrajanjem dobivamo najprije a, a onda i b:

$$a = \frac{F}{m} \frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (6.38)$$

$$b = \frac{F}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (6.39)$$

Funkcionalna zavisnost koeficijenata o frekvenciji se i grafički prikazuje.

Koeficijent a ima karakteristično zvonoliko ponašanje u blizini ω_0 , dok b ima nultočku i oblik jednog sinusnog titraja. Obadvije amplitude, međutim ostaju konačne i trnu izvan rezonantnog područja. Fazni kut φ se preko (6.36) i izraza za amplitude (6.38) i (6.39) može također pratiti i grafički prikazati. U notaciji (6.34) on ima vrijednosti počevši od 0 do $-\pi$. Također je jasno da za male frekvencije pomak samo malo kasni za silom. U rezonanciji to kašnjenje doseže $\frac{\pi}{2}$ da bi na velikim frekvencijama to kašnjenje doseglo π ; to jest pomak je suprotnog predznaka od sile.

POKUSI

Nizom matematičkih njihala raznih frekvencija tjeranih s jednom ω ilustrira se gornje rezultate. (Bartonovo njihalo)

Koeficijent a često se naziva apsorpcijskim ; koeficijent b ,pak, elastičnim dijelom ukupnog rješenja problema. Porijeklo ovih naziva bit će jasnije nakon što ustanovimo kako se troši rad vanjske sile tijekom jednog perioda titranja. Pogledat ćemo prosječnu snagu po titraju:

$$\langle P \rangle = \langle F \cos(\omega t) \dot{x}_s(t) \rangle \quad (6.40)$$

Nakon deriviranja i usrednjavanja uz poznate rezultate o srednjim vrijednostima kvadrata harmonijskih funkcija slijedi:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F a \omega \quad (6.41)$$

čime jasno pokazujemo da amplituda a određuje iznos energije koju oscilator prima i za svoje trenje troši od vanjske sile. To je apsorpcijski dio karakteriziran apsorpcijskom amplitudom a . Amplituda b uopće ne sudjeluje u potrošnji. Općenito takve procese, u kojima se ne troši energija zovemo elastičnim pa će se u literaturi naći i odgovarajuće ime za koeficijent b , elastična amplituda. U proučavanju slobodnog harmoničkog oscilatora smo naučili da je u njemu ukupna mehanička energija stalna. Kako nam (6.41) kaže, gušeni harmonički oscilator prisiljen na titranje upija energiju. Ona se naravno troši na trenje . Dio opisa dinamike prisilnih oscilacija u (6.33) koji potiče od trenja je $-m\Gamma \dot{x}$; sila trenja. Pokazat ćemo sada da snaga trošena na trenje upravo odgovara snazi koji je utrošila vanjska sila!

Prosječna snaga sile trenja:

$$\langle P_{\text{trenje}} \rangle = \langle m\Gamma \dot{x}_s \dot{x}_s \rangle = m\Gamma \langle (a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t)^2 \rangle = m\Gamma \omega^2 (a^2 + b^2) \frac{1}{2} \quad (6.42)$$

$$\langle P_{\text{trenje}} \rangle = \frac{1}{2} m\Gamma \omega^2 a^2 \left(1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2 \Gamma^2}\right) \quad (6.43)$$

Gdje smo pri izlučivanju a iz zagrade za omjer b i a koristili (6.38) i (6.39). Ako nadalje za a koristimo još jednom (6.38) dobit ćemo

$$\langle P_{\text{trenje}} \rangle = \frac{1}{2} F \omega a \quad (6.41a)$$

identično izrazu (6.41).

Prosječna energija tijekom perioda titranja:

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{1}{2} (a^2 + b^2) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \quad (6.44)$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} m (\omega^2 + \omega_0^2) (a^2 + b^2)$$

Dio koji je uz ω^2 je član kinetičkog dijela a onaj uz ω_0^2 ide kao potencijalna energija.

Radi rezonantnog dijela amplituda jasno je da i energija kao i amplitude ima rezonantni oblik. Rezonancija i njena svojstva:

Zbog pojave razlike kvadrata kružnih frekvencija u nazivnicima izraza snage i energije sve navedene veličine imaju maksimum u području u kojem ω dostiže ω_0 . To je pojava rezonancije: sustav i prisila su u takvom odnosu da je rezultat njihovog zajedničkog djelovanja u maksimumu ; dostiže se rezonantna vrijednost. Ponašanje u rezonantnom dijelu ćemo pažljivije razmotriti. Naime na njemu učimo standardno izražavanje u jeziku fizike za pojave s maksimumima. Takvu pojavu je zgodno opisati kvantitativno pojmovima/brojevima.

Rezonantna (kružna) frekvencija na kojoj se dešava fenomen ω_0 se ne treba dalje karakterizirati. Visina maksimuma je visina rezonancije. Širinu maksimuma se opisuju terminom puna širina na polovici visine (Full Width at the Half Maximum-FWHM). Krasan je rezultat da je ta veličina u slučaju gornje rezonancije upravo Γ . Krenut ćemo od rezultata (6.41) koji daje po periodu usrednjenu vrijednost snage potrošene od vanjske prisile i uvrstiti eksplicitni izraz za amplitudu a (6.38)

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F \omega \frac{F}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} = P_0 \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (6.45)$$

gdje je P_0 snaga na $\omega = \omega_0$. Da bismo našli FWHM očito treba naći točke na kojima rezonantni faktor uz P_0 u (6.45) padne na vrijednost 0.5 :

$$\frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} = \frac{1}{2} \quad (6.46)$$

Rješavanjem gornje bikvadratne jednadžbe za kružnu frekvenciju dobivaju se dvije fizikalno prihvatljive vrijednosti za kružnu frekvenciju:

$$\omega_{viša} = \frac{\Gamma}{2} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} + \omega_0^2} \quad \omega_{niža} = -\frac{\Gamma}{2} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} + \omega_0^2} \quad (6.47)$$

Očito je FWHM, puna širina rezonancije na mjestima na kojima vrijednosti padaju na polovicu (razlika frekvencija iz (6.47)), upravo Γ . U jeziku faktora kvalitete ta je širina

$$\Delta\omega = \Gamma = \frac{\omega_0}{Q} \quad (6.48)$$

Imamo i drugu važnu relaciju koja povezuje širinu rezonancije s relaksacijskim vremenom neprisiljenog oscilatora τ preko (6.7)

$$\Delta\omega = \Gamma = \frac{1}{\tau} \quad \text{to jest:} \quad \Delta\omega\tau = 1 \quad (6.49)$$

Ova relacija ima u kvantnoj fizici ogromnu važnost, njen analogon reflektira neodređenosti u energiji i neodređenost u trajanju koje su povezane na upravo analogan način.

Diskusija relativne težine amplituda titranja

Pokazuje se da izvan područja rezonancije dominira amplituda b , elastični doprinos. Naime omjer b i a može se procijeniti preko njihovog omjera načinjenog prema (6.38) i (6.39):

$$\frac{b}{a} = \frac{(\omega_0 - \omega) \omega_0 + \omega}{\Gamma \omega} \quad (6.50)$$

Za velike vrijednosti ω dominira lijevi faktor (desni je reda veličine 1) a sličan je i rezultat za male vrijednosti ω . Elastičan doprinos u rezonantnom području prolazi kroz nulu; jasno je da mu je samo u tom području uloga malena!

Alternativni oblik rezonantnog nazivnika

U rezonantnom području se ω kreće u blizini vrijednosti ω_0 pa se rezonantni nazivnik u (6.45)

može pisati aproksimativno: $4\omega_0^2 \left[(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2 \right]$ čime se za desni faktor u (6.45)

dobiva novi analitički oblik

$$\langle P \rangle = P_0 \frac{\frac{1}{4}\Gamma^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.51)$$

U nuklearnoj fizici je to poznati Breit-Wignerov oblik rezonancije za udarni presjek nuklearnih reakcija.

6.5 Prijelazne pojave (tranzicijski fenomeni; tranzijenti) kod prisilnog titranja gušenog harmoničkog oscilatora.

Do sada smo egzaktno obradili ponašanje jednostavnog (slobodnog) harmoničkog titranja uključujući i početne uvjete. Početne smo uvjete eksplicitno uključili i u izraz za titranje gušenog oscilatora. Sada ćemo proći kroz nekoliko tipičnih situacija prisilnog titranja gušenog oscilatora s jednostavnim početnim uvjetom za pomak x : $x(0)=0$ i $\dot{x}(0)=0$. Dakle tijelo početno miruje u ravnotežnom položaju. Zanima nas prijelazno ponašanje dok ne dođe u svoje stacionarno stanje. Otprije je jasno da se superponiraju rješenja homogene jednadžbe (gušeni oscilator) i stacionarno (ili specijalno) rješenje nehomogene jednadžbe:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t + e^{-\frac{\Gamma}{2}t} (A_g \sin \omega_g t + B_g \cos \omega_g t) \quad (6.52)$$

U izrazu (6.52) treba uočiti da postoje samo neodređene integracijske konstante u gušenom dijelu rješenja dok su konstante stacionarnog rješenja određene s (6.38) i (6.39).

Iz uvjeta $x(0)=0$ slijedi:

$$b + B_g = 0 \quad B_g = -b \quad (6.53)$$

a iz početnog mirovanja $\dot{x}(0) = 0$

$$a\omega - \frac{\Gamma}{2}B_g + A_g\omega_g = 0 \quad (6.54)$$

što daje:

$$A_g = \frac{1}{\omega_g} \left(-a\omega - b\frac{\Gamma}{2} \right) \quad (6.55)$$

S (6.53) i (6.55) imamo egzaktno rješenje titranja gušenog oscilatora s prisilom koja uključuje početne uvjete nultog položaja i brzine. Međutim, već iz (6.52) možemo načiniti zaključke o kvalitativnom izgledu općeg rješenja.

- i) Slučaj bez gušenja. U (6.52) imamo superpoziciju dva titranja frekvencija titranja frekvencija ω i ω_g , što vodi na poznati slučaj udara.
- ii) Postojanje slabog gušenja i frekvencije ω bliske ω_g . Tada je u tranzicijskom vremenu prisutan fenomen udara, koji se u vremenu gubi da bi prevladalo stacionarno stanje.

- iii) Situacija s gušenjem ali $\omega = \omega_g$. Tada u rezonantnom području dominira a dok iz (6.49) vidimo da je $A_g \cong a$, čime (6.52) poprima oblik:

$x(t) = (1 - e^{-\frac{\Gamma}{2}t})x_s$. To znači da umjesto faktora gušenja imamo faktor koji postepeno dozvoljava sve veće amplitude konačnog stacionarnog titranja.

- iv) Vrijedno je još uočiti situaciju rezonancije u limesu iščezavajućeg gušenja blizu rezonancije $\Gamma \rightarrow 0$ $\omega \rightarrow \omega_0$. U toj situaciji amplitude titranja odlaze u beskonačnost. Primjer tog ponašanja je čuveni raspad Tacoma mosta koji se raspao kada je titranje doseglo vlastitu frekvenciju mosta.

POKUSI

Prisilne oscilacije rade se s raznim frekvencijama radi opažanja raznih tranzijenata.

(Pogon prisile je rotacija elektromotora varijabilne frekvencije koji se štapićem povezanim s oprugom pretvara u sinusoidalni pogon)

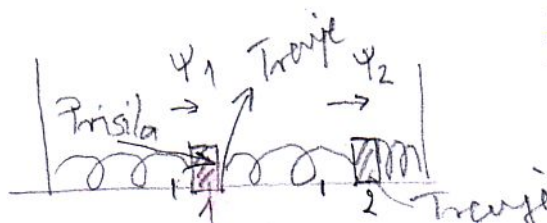
7. Prisilno titranje sustava s dva i više stupnjeva slobode

U našem napredovanju prema cjelokupnoj slici koja uključuje: izvor emisije (u mehaničkom slučaju silu koja djeluje na bar jedan element složenog sustava) , međudjelovanje dijelova sustava i objekt čije rezultantno ponašanje proučavamo , sada smo spremni pogledati učinak prisile na dio sustava koji s prisilom nije u direktnom kontaktu. Naučit ćemo razlikovati dva bitno različita faktora koji oslabljuju napredovanje utjecaja prisile na objekt unutar složenog sustava. Prvi intuitivno najprihvatljiviji faktor je naravno faktor gušenja titranja.

Pri proučavanju prisilnog titranja jednostavnog harmoničkog oscilatora naučili smo da gušenje (na primjer nadkritično) može kompletno eliminirati titranje. Kod transmisijskih medija (onih koji dopuštaju propagaciju/širenje titranja) ovaj faktor nije velik. S druge strane, kada smo studirali disperzijsku relaciju za sustav vezanih njihala naš je rezultat pokazao da su vrijednosti frekvencija titranja, koje se mogu uspostaviti na sustavu, u prostornom smislu na oscilatoran način, ograničene. Vidi na primjer disperzijsku relaciju (5.17). Frekvencije dozvoljenih titranja nalazile se u pojasu između ω_{\min} i ω_{\max} . Fizikalno značenje tog rezultata možemo sada posebno istaknuti: određenim sustavom , čak ako u njemu ne postoje gubici energije (na primjer trenjem), nisu dozvoljena širenja signala sviju frekvencija ; postoje frekvencijski pojasevi za transmisiiju. Izvan tih pojasa širenje titranja nije dozvoljeno. Razmotrit ćemo sada relativno jednostavan model gušenog titranja dvije povezane mase od kojih na jednu djeluje i vanjska harmonička sila kružne frekvencije ω .

7.1 Prisilno titranje sustava od dvije mase povezane trima oprugama uz prisutnost trenja

Proširimo razmatranje sustava opisanog s (2.5) i (2.6) koji opisuje dvije mase povezane s tri opruge bez trenja na realniju situaciju u kojoj postoji i trenje masa (na primjer s podlogom).



Dodatno na tijelo (1) djeluje i harmonička sila. $F \cos \omega t$. Tada su vezane jednadžbe gibanja:

$$m \ddot{\psi}_1 = -2k\psi_1 - m\Gamma \dot{\psi}_1 + k\psi_2 + F \cos \omega t \quad (7.1)$$

$$m \ddot{\psi}_2 = -2k\psi_2 - m\Gamma \dot{\psi}_2 + k\psi_1 \quad (7.2)$$

Uvođenjem novih koordinata:

$$\psi_i = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \quad \psi_{ii} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{2} \quad (7.3)$$

nakon najprije zbrajanja a potom odbijanja relacija (7.1) i (7.2) upotrebom (7.3) dobivamo:

$$\ddot{\psi}_i + \Gamma \dot{\psi}_i + \omega_i^2 \psi_i = \frac{F}{2m} \cos \omega t \quad (7.4)$$

$$\ddot{\psi}_{ii} + \Gamma \dot{\psi}_{ii} + \omega_{ii}^2 \psi_{ii} = \frac{F}{2m} \cos \omega t \quad (7.5)$$

gdje su vrijednosti kružnih frekvencija identične onima u (2.7a) i (2.7a) . Dobili smo da i težište i razmak među masama doživljavaju prisilno titranje uz prisutnost gušenja s time da

rezonantni efekti nastupaju na različitim frekvencijama za različite stupnjeve slobode (i) i (ii). Posebna titranja pojedinih masa imamo obratnim transformacijama:

$$\psi_1 = \psi_i + \psi_{ii} \quad \psi_2 = \psi_i - \psi_{ii} \quad (7.6)$$

Posebna rješenja jednadžbi (7.4) i (7.5) koja se realiziraju nakon dugog vremena titranja možemo razdijeliti u apsorpcijski dio s indeksom a i elastični dio koji smo već prije karakterizirali s indeksom b.

$$\psi_i = a_i \sin \omega t + b_i \cos \omega t \quad (7.7)$$

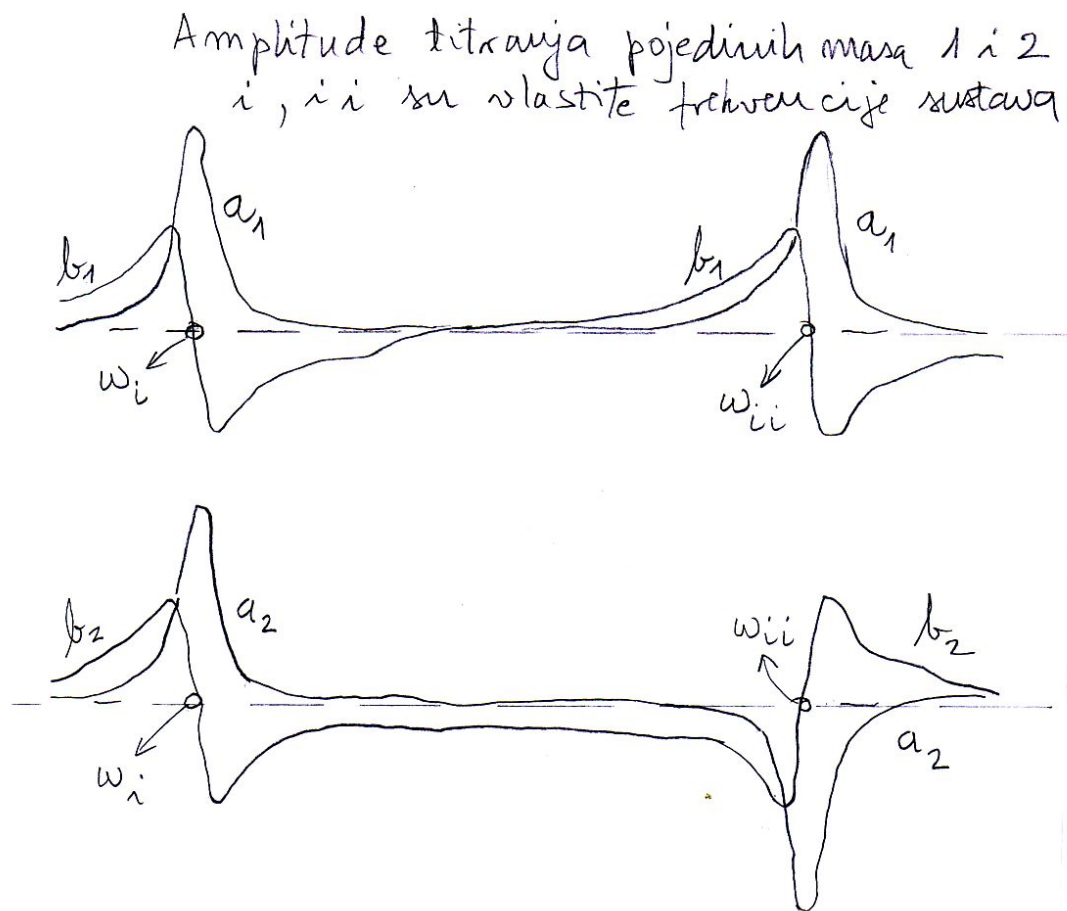
$$\psi_{ii} = a_{ii} \sin \omega t + b_{ii} \cos \omega t \quad (7.8)$$

pri čemu su koeficijenti u gornjim relacijama analogoni onima iz prethodnog poglavlja pri prisilnim oscilacijama gušenog titranja:

$$a_i = \frac{F}{2m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad b_i = \frac{F}{2m} \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (7.9)$$

$$a_{ii} = \frac{F}{2m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_{ii}^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad b_{ii} = \frac{F}{2m} \frac{\omega_{ii}^2 - \omega^2}{(\omega_{ii}^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (7.10)$$

Poučno je upoznati se s grafovima apsorpcijske i elastične amplitude kako za titranje težišta i razmaka masa, tako i za amplitude titranja pojedinih masa:



Koeficijenti a_1 i b_1 odnose se na titranje prve mase a koeficijenti a_2 i b_2 na titranje druge mase. Signifikantno je uočiti da u području prve rezonancije (i) tijela titraju simultano u fazi. U slučaju druge rezonancije (ii) drugo tijelo je u protufazi. Također je amplituda titranja drugog tijela reducirana u odnosu na prvo tijelo. Postoji obilje primjera sustava dva, u priličnoj mjeri elastično povezana, oscilatora koji imaju dvije rezonantne frekvencije. Ovdje ističemo kao kuriozitet (neočekivani slučaj) Wilberforce-ovo njihalo. Ono se sastoji od elastične spiralne opruge koja svojom građom omogućuje i longitudinalno titranje i rotaciju tijela pričvršćenog za kraj opruge kao oblik torzijskog titranja. Varijacijom frekvencije koja prisiljava Wilberforce-ovo njihalo na titranje možemo dobiti dominantno longitudinalne a za drugu rezonantnu frekvenciju dominantno torzijske titraje. Uskoro ćemo u analizu uključiti i prisilno titranje dva LC kruga sa sličnim rezultatom. Jasno se vidi kako sustav propušta neke frekvencije lakše dok su druge na kraju sustava bitno atenuirane (oslabljene). Tako nam gornji sustav daje prvu naznaku mogućnosti filtriranja područja frekvencija titranja koje mogu proći sustavom. Obratimo pažnju na stacionarne amplitude koje se uspostavljaju nakon dovoljno dugo vremena. Ako trenje nije preveliko, tada su apsorpcijske amplitude, osim na rezonantnim frekvencijama vrlo male. U sustavu (7.9) i (7.10) preostaju samo desni članovi. Ako prema (7.6) načinimo u toj aproksimaciji omjer amplitude praktički elastičnih titranja, dobivamo:

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = \frac{\psi_i - \psi_{ii}}{\psi_i + \psi_{ii}} \quad a \text{ uz } \psi_{ib} \cong \frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad i \quad \psi_{ii} \cong \frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_{ii}^2 - \omega^2}$$

slijedi:

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} \cong \frac{\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_{ii}^2 - \omega^2}}{\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_{ii}^2 - \omega^2}} = \frac{\omega_{ii}^2 - \omega_i^2}{\omega_{ii}^2 + \omega_i^2 - 2\omega^2} \quad (7.11)$$

Razmatranjem područja frekvencija ispod rezonantnog (to jest onog u kojem je ω zanemariv), jasna je dominacija amplitude prvog oscilatora, ψ_1 . Ako je pak frekvencija prisile mnogo veća od rezonantnih očita je ponovna dominacija amplitude titranja prvog oscilatora. Jasno je dakle da usprkos malim gubicima na trenje (mali Γ) kroz sistem bez mnogo atenuacije (oslabljenja) prolaze frekvencije prisile koje se nalaze između vlastitih frekvencija sustava.

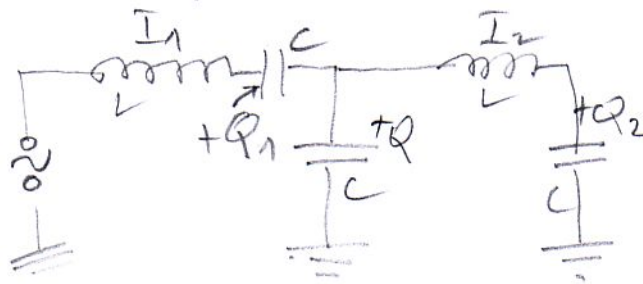
POKUSI

Demonstrira se na sustavu dviju masa s tri opruge odnose amplitude za razne frekvencije

Fenomen filtriranja mehaničkih vibracija nema tako mnogo dnevnih upotreba, iako one mogu biti važne kad na primjer neki osjetljivi uređaj želimo zaštititi od trešnje u nekom području frekvencija bez da to činimo gušenjem oscilacija. S druge strane u upotrebi elektromagnetskih fenomena pa i u optici filtriranje (propuštanje samo pojasa frekvencija) je vrlo važan fenomen. Kasnije će studenti upoznati elektromagnetske valovode koji se mogu konstruirati tako da njima mogu prolaziti samo vrlo specijalni načini titranja. U ovom trenutku izabrat ćemo puni analogon mehaničkom titrajnom sustavu dva oscilatora i dobiti identičan izraz za omjer amplitude kao u (7.11).

7.2 Prisilno titranje elektromagnetskog sustava s tri kapacitora i dvije zavojnice.

Na izmjenični napon serijski su priključeni najprije L i C, zatim se linija grana na još jedan L i C priljučak u seriji; u točki grananja je još paralelni priključak jednog C.



Standardnim oznakama za naboje Q i struje I imamo za prvi krug:

$$U_0 \sin \omega t - L \frac{dI_1}{dt} - \frac{Q_1}{C} - \frac{Q}{C} = 0 \quad (7.12)$$

A za drugi krug:

$$\frac{Q}{C} - L \frac{dI_2}{dt} - \frac{Q_2}{C} = 0 \quad (7.13)$$

Deriviranjem obadva izraza po vremenu (to je razlog zašto smo prisilu oblikovali iznimno preko sinusne zavisnosti) te uvrštavanjem očitih relacija (7.14)

$$I_1 = \frac{dQ_1}{dt} \quad I_2 = \frac{dQ_2}{dt} \quad I_1 - I_2 = \frac{dQ}{dt} \quad (7.14)$$

Sustav vezanih jednadžbi (7.12), (7.13) prelazi u sustav:

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} = -\frac{2I_1}{LC} + \frac{I_2}{LC} + \frac{\omega U_0}{L} \cos \omega t \quad (7.15)$$

$$\frac{d^2 I_2}{dt^2} = -\frac{2I_2}{LC} + \frac{I_1}{LC} \quad (7.16)$$

Usporedbom sa slobodnim sustavom dvije mase s tri opruge bez trenja i bez prisile vidimo da je matematička analogija popuna; sada će vlastite frekvencije biti:

$$\omega_i^2 = \frac{1}{LC} \quad \omega_{ii}^2 = \frac{3}{LC} \quad (7.17)$$

gdje prva frekvencija odgovara titranju dviju struja u fazi a druga frekvencija u protufazi. S druge strane usporedba s tretmanom istog sustava proširenog gušenjem i harmonijskom prisilom (7.1) i (7.2) ponovno uočavamo potpunu analogiju.

To znači da se i diskusija omjera strujnih amplituda može potpuno preuzeti. Uvrštenjem konkretnih vrijednosti vlastitih frekvencija (7.17) u već pripremljeni omjer (7.11) dobivamo:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{LC}}{\frac{2}{LC} - \omega^2} = \frac{1}{2 - LC\omega^2} \quad (7.18)$$

Potiskivanje titranja druge struje, naročito za velike vrijednosti frekvencije titranja ω , je očito. Da smo u proučavanom krugu umjesto uzbude sinusoidalne vrste dodali transformatorsku vezu izvora titranja i da su krajevi transformatora snabdjeveni diodama koje propuštaju struju u samo jednom smjeru te da smo sredinu transformatorskog sekundara uzeli kao povratnu granu našeg prijašnjeg sustava imali bismo principijelnu shemu pretvarača izmjeničnog u istosmjerni napon. Naime dodani transformator s diodama osigurava ispravljanje struje u jedan smjer, no ona još uvijek titra. Ako se međutim u (7.17) odabere dobar odnos frekvencije titranja i LC vrijednosti izlazna struja koja titra bit će vrlo slaba, dok će napon biti ispravljen u jedan smjer.

7.3 Filtriranje sustavom oscilatora:

Kao što je spomenuto u uvodu, sustav s više vezanih oscilatora u svojim disperzijskim relacijama može imati ugrađene najnižu i najvišu frekvenciju svojstvenog titranja. U pravilu, pri titranju najvišom frekvencijom njegovi konstituenti titraju sa suprotnim fazama. Kako je to, prostorno gledajući, najgušći mogući oblik periodičnosti u kojem sudjeluju konstituenti više frekvencije bi zahtijevale prostorno gušće pakirane prostorne rasporede no oni se zadanim geometrijskim rasporedom konstituanata ne mogu realizirati. Stoga sustav nema mogućnost periodičkog titranja frekvencijom višom od granične čiji bi raspored u prostoru bio sinusoidaln. Disperzijske relacije oblika (5.7a) i (5.17) jednostavno postavljaju ograničenja na realne frekvencije koje se mogu formirati kao stojni valovi. Izvan toga frekvencijskog područja nema titranja koje bi konstituenti između sebe mogli „rezonantno“ prenositi jedan na drugog. Dobra intuitivna poruka o tome što se mora događati kada frekvencijom prisile iziđemo izvan granica disperzijskih relacija vidi se na primjeru prisilnog titranja dva objekta s koja proizlazi iz relacija (7.11) i/ili (7.17). Omjer amplituda titranja drugog oscilatora prema prvom, izvan područja $[\omega_i, \omega_{ii}]$, je po iznosu manji od jedinice. Odmah je jasno da isti zaključak mora vrijediti i u složenijim sustavima; uvijek se prethodni oscilator može razumjeti kao prisila koja diktira ponašanje sljedbenika. Očito da u tom području frekvencija amplitude sukcesivnih oscilatora padaju. Time nas se priprema na prostorni raspored amplituda koji duž sustava ne će više biti cikličan nago trnući. Stoga je transport prisilnih oscilacija kroz sustav oscilatora ograničen frekvencijama iz disperzijskih relacija.

POKUSI

Demonstrira se na valostroju atenuacija amplituda izvan područja graničnih frekvencija.

Ispod donje granične frekvencije, kako će biti kasnije teorijski obrazloženo amplitude titranja eksponencijalno u prostoru padaju. Između donje i gornje granične frekvencije moguće je ostvariti stojne valove. Iznad gornje granične frekvencije amplitude ne samo da padaju eksponencijalno nego i alterniraju u predznaku!

Isto tako(iako je slijedeća tvrdnja još nedokazana, mi ćemo pokazati da je istinita.), svako se stacionarno rješenje (stojni val) može prikazati kao superpozicija dva putujuća vala suprotnih smjerova po mediju. Znači, prisilno titranje jednog kraja medija koje svojim rasporedom amplituda po prostoru (to jest svojom frekvencijom) jest u skladu sa svojstvima medija, moći će se kauzalno (uzročno-posljedično) pronesiti medijem.

7.4 Klein-Gordonova jednadžba; inspiracija za opis dinamike izvan frekvencijskog pojasa disperzijskih relacija

Kao i pri traženju prostornog opisa amplituda unutar dozvoljenog pojasa disperzijskih relacija pogledat ćemo što možemo naučiti iz ponašanja kontinuuma kad iziđemo izvan tog područja. Pogledajmo još jednom prijelaz s diskretne na kontinuiranu jednadžbu titranja:

$$na \rightarrow x, \quad \psi_n(t) \rightarrow \psi(x,t) \quad \ddot{\psi}_n \rightarrow \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad (7.19)$$

$$\psi_{n+1} \rightarrow \psi(x+a,t) = \psi(x,t) + a \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \dots \quad (7.20)$$

$$\psi_{n-1} \rightarrow \psi(x-a,t) = \psi(x,t) - a \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \dots \quad (7.21)$$

Ako bismo počeli s jednadžbom gibanja poput one (5.12) za n-to tijelo u nizu oscilatora i uključili u (5.12) i titranje n-tog tijela kao njihala koje bi u (5.12) na desnoj strani doprinijelo term $-\frac{g}{l}\psi_n$, imali bismo:

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{K}{m}(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) \quad (7.22)$$

Uvrštenjem sustava (7.19), (7.20) i (7.21) u (7.22) dobivamo:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(x,t) + \frac{Ka^2}{m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (7.23)$$

gdje je $\omega_0^2 = g/l$ dobili smo Klein-Gordonovu jednadžbu koja opisuje titranje kontinuuma, koji uz vlastiti elasticitet ima u svakoj točki ugrađenu dodatnu povratnu silu. U ovom slučaju to je gravitacijska. Potražimo li stacionarno stanje titranja frekvencije ω (kojom bi na primjer prisila mogla tjerati početak sustava) to jest pretpostavimo:

$$\psi(x,t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.24)$$

dobiti ćemo:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{m}{Ka^2} (\omega_0^2 - \omega^2) A(x) \quad (7.25)$$

Ova jednadžba koincidira s nama poznatom vrstom tako dugo dok je $\omega^2 > \omega_0^2$ jer se jednadžba može odgovarajućim supstitucijama pisati kao:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + k^2 A(x) = 0 \quad (7.26)$$

što nas vodi na nama poznatu prostornu sinusoidalnu ili kosinusoidalnu raspodjelu amplituda kakvu imamo unutar granica disperzijskih relacija. Međutim, ako je odnos frekvencija suprotan, to jest $\omega^2 < \omega_0^2$, tada (7.23) poprima oblik:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} - \kappa^2 A(x) = 0 \quad (7.27)$$

čija su rješenja proporcionalna s $e^{-\kappa x}$ i/ili $e^{\kappa x}$. U neograničenim sustavima realno je samo eksponencijalno trnjenje; rješenje s negativnim eksponentom. Kada fizikalna veličina ima takav u prostoru trnući oblik, definira se atenuacijska duljina δ .

$$\delta\kappa = 1 \quad (7.27)$$

s očitim fizikalnim značenjem da na taj udaljenosti eksponencijalna funkcija pada na $1/e$ svoje vrijednosti. Područje s opadajućom amplitudom titranja još se naziva i reaktivnim područjem. Definicije k i κ su očite iz usporedbi jednažbi (7.25) i (7.26) te (7.25) i (7.27) respektivno. Stoga za Klein-Gordonovu jednažbu možemo pomoću njih napisati disperzijske relacije:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{Ka^2}{m} k^2 \quad (7.29)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{Ka^2}{m} \kappa^2 \quad (7.30)$$

7.5 Sastavljanje zajedničkog rješenja oscilatornih i trnućih titranja Klein-Gordonove jednažbe

Za mnoge je primjene, a posebno u kvantnoj fizici poučno razmotriti situaciju u kojoj ω_0^2 doživljava skok a traži se vremenski oscilirajuće rješenje za titranje u cijelom sustavu. Razlikujemo dakle dva područja: $x < 0$ i $\omega^2 - \omega_0^2 > 0$ te područje $x > 0$ i $\omega^2 - \omega_0^2 < 0$. Do pozitivnih vrijednosti x imamo oscilatorno ponašanje a iza toga prostorni raspored amplituda trne. Imamo dakle:

$$x < 0 \rightarrow A_1(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (7.31)$$

$$x > 0 \rightarrow A_2(x) = C e^{-\kappa x} \quad (7.32)$$

Na spoju $x=0$ očekujemo neprekinutost i funkcije $A(x)$ i njezine prve derivacije. Ovo svojstvo će se često i na identičan način iskorištavati u kvantnoj fizici. Prvi zahtjev primijenjen na $x=0$ rezultira u

$$B = C \quad (7.33)$$

A drugi, poslije deriviranja po x daje:

$$kA = -\kappa C \quad \text{odnosno} \quad A = -\frac{\kappa}{k} C \quad (7.34)$$

Tako prihvaćanjem (7.32) kao rješenja koje daje ponašanje u pozitivnom dijelu x , u preostalom dijelu je prostorni raspored amplituda oscilatoran:

$$x < 0 \rightarrow A_1(x) = C \left(\cos kx - \frac{\kappa}{k} \sin kx \right) \quad (7.31a)$$

KOMENTAR

Analogoni ove situacije u kojoj se s oscilatornog prelazi na trnuće ponašanje su vrlo rašireni u fizici. U optici to su na primjer prijelazi među sredstvima različitog indeksa loma, a u kvantnoj fizici tim mehanizmom nastaju vezana stanja. Naime, prostorno osciliranje drži titranje pri istom intenzitetu fenomena. Trnjenje implicira postepeno gubljenje fenomena. Čestica zarobljena u potencijalu nema izgleda izići iz potencijalne jame bez dovoljno energije i giba se unutar njega (kvantno-mehanički njezina valna funkcija oscilatorno titra u prostornom dijelu). Eksponencijalni pad amplitude reprezentira trnjenje vjerojatnosti da je u

tom području nađemo. Tu je i indikacija bitne razlike klasičnog i kvantnog ponašanja. Postoji vjerojatnost da se objekt nalazi i u domeni klasično zabranjenoj zakonima energije, ali ta se vjerojatnost smanjuje to jače što je povreda zakona energije veća!!!

7.6 Opća analiza sustava elastično povezanih oscilatora, koji su nezavisno o međusobnoj vezi dodatno elastično povezani sa svojim ravnotežnim položajem

Napomena: u gornjem slučaju jedan od jednostavnih modela je model vezanih njihala, no istom formalizmu podliježe i slučaj u kojem bismo svakom tijelu dodali i oprugu koja ga harmonički veže uz ravnotežni položaj uz već postojeće opruge među tijelima. U obadva od ovih slučajeva jednadžba gibanja n-tog tijela jest:

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_0^2 \psi_n + \frac{K}{m}(\psi_{n-1} + \psi_{n+1} - 2\psi_n) \quad (7.35)$$

U (7.35) su oznake: K je jedinstvena konstanta za sve opruge koje povezuju susjedna tijela, m je masa individualnog tijela, ω_0^2 je kvadrat kružne frekvencije za elastičnu silu koja nezavisno veže tijelo za ravnotežni položaj. U slučaju vezanih njihala to je g/l . U slučaju dodatne elastične sile $-K_{\text{dodatno}}\psi$ to je K_{dodatno}/m . Sada ponovno tražimo stacionarna rješenja oblika

$$\psi_n(t) = A_n \cos \omega t \quad (7.36)$$

Nakon uvrštenja (7.36) u (7.35) uz deriviranje i kraćenje vremenske zavisnosti imamo:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{m} \left(1 - \frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{2A_n}\right) \quad (7.37)$$

Sada se uspješno dobivanje stacionarnog titranja svodi na pogađanje dobrog analitičkog opisa razlomka u okrugloj zagradi jednadžbe (7.37).

7.6.1 Oscilatorno ponašanje prostorne raspodjele amplituda

Najprije možemo ponoviti i proširiti naše razmatranje situacije s disperzivnim područjem pretpostavljajući:

$$A_n = A \sin kna + B \cos kna \quad (7.37)$$

k je kao i prije valni broj titranja; razmak među oscilatorima je a . Ako izraze za A_{n+1} i A_{n-1} prema (7.39) napišemo i na razdijeljene argumente $kna+ka$ funkcija sinusa i kosinusa primijenimo adicione teoreme dobiti ćemo nakon sređivanja:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{m}(1 - \cos ka) \quad (7.39)$$

NAPOMENA: kako su sinusoidalna i kosinusna ovisnost lako prilagodljive suprotnim rubnim uvjetima (čvrstog i slobodnog kraja), (7.40) zapravo dokazuje da je analitička forma disperzijske relacije neovisna o rubnim uvjetima!!! Rubni uvjeti će samo odrediti na kojim diskretnim vrijednostima valnog broja k_i treba uzeti vrijednost (kružne) frekvencije u skladu s općim izrazom (7.40) to jest disperzijskom relacijom. S druge strane način diskretizacije valnog broja zavisi o rubnim uvjetima!!!

7.6.2 Eksponencijalno trnjenje ili povećanje prostorne raspodjele amplituda

Inspirirani (potaknuti) idejom gašenja prostorne raspodjele ili njenog povećanja kao u Klein-Gordonovoj jednažbi pretpostavimo:

$$A_n = Ae^{-\kappa na} + Be^{\kappa na} \quad (7.40)$$

Tada razlomak iz zagrade u (7.37) poprima oblik:

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{2A_n} &= \frac{1}{2A_n} (Ae^{-\kappa na} e^{-\kappa a} + Be^{\kappa na} e^{\kappa a} + Ae^{-\kappa na} e^{\kappa a} + Be^{\kappa na} e^{-\kappa a}) = \\ &= \frac{1}{2A_n} (Ae^{-\kappa na} + Be^{\kappa na})(e^{-\kappa a} + e^{\kappa a}) = \end{aligned} \quad (7.41)$$

Prva zagrada gore je prema (7.41) upravo A_n a druga uz faktor $\frac{1}{2}$ ispred zagrade daje $ch\kappa a$ tako da je konačna forma za cijeli (7.41)

$$= ch\kappa a \quad (7.42)$$

Time za pretpostavljene eksponencijalne zavisnosti (7.40) imamo novu disperzijsku formu:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\frac{K}{m}(1 - ch\kappa a) = \omega_0^2 - \frac{4K}{m}sh^2\frac{\kappa a}{2} \quad (7.43)$$

7.6.3 Eksponencijalno ponašanje s alterniranjem predznaka za susjedne oscilatore

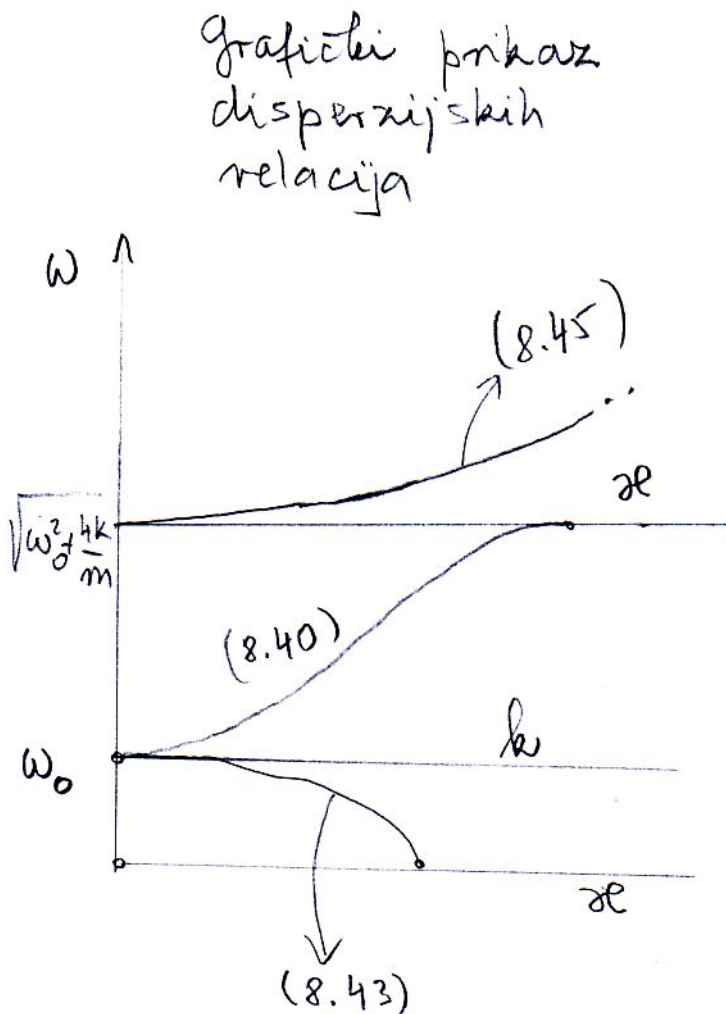
Već smo kod sustava dva prisilno tjerana oscilatora vidjeli da se iznad gornje vlastite frekvencije slobodnog titranja dva tijela ponašaju protufazno. Stoga se pretpostavka (7.41) može prirodno proširiti i na na oblik:

$$A_n = (-1)^n (Ae^{-kna} + Ae^{kna}) \quad (7.44)$$

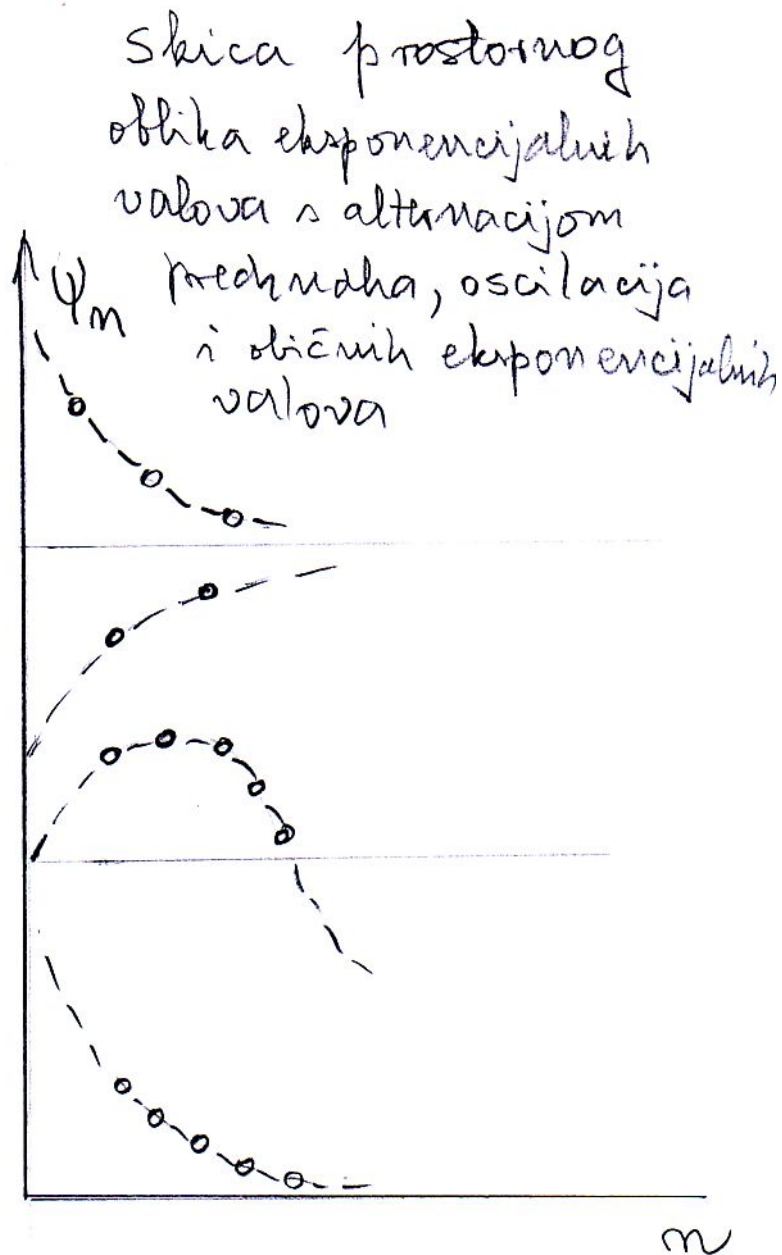
Sada postupkom koji je kopija onog kojim smo išli od (7.41) do (7.43) dobivamo novi rezultat:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{m}(1 + chka) = \omega_0^2 + \frac{4K}{m}ch^2 \frac{ka}{2} \quad (7.45)$$

Uputno je grafički pokazati grafički međuovisnosti frekvencije i valnog broja:



Također je dobro upoznati prostorne rasporede amplituda stacionarnog titranja ψ_n kao funkcije položaja (ovisnosti o n).



Upoznati s gornjim prostornim raspodjelama amplituda titranja lako ćemo prihvatiti da se putujući harmonijski valovi, koji su u suštini vremenski zavisna translacija prostorne sinusoidalno-kosinusoidalne raspodjele, šire isključivo između granica određenih disperzijskim relacijama. U područjima izvan tih frekvencija translacija stacionarnog rješenja ne može rezultirati putujućim oscilatornim valom.

8. Putujući valovi

Oscilatorni fenomen koji se u vremenu širi medijem noseći impuls i energiju često ćemo nazivati putujućim valom. Da bi val počeo svoje širenje po mediju, koji može imati od jedne do sve tri dimenzije, potreban je izvor koji generira (stvara) titranje. Ako je trenje zanemarivo, putujući val u jednoj dimenziji ne će gubiti energiju; ako je dozvoljen disperzijskim relacijama, njegova će amplituda biti stalna. U više dimenzija u sličnim uvjetima amplituda može opadati tijekom širenja vala.

8.1 Putujući mehanički harmonički val u jednodimenzionalnom modelu sa faznom brzinom neovisnom o frekvenciji

Možemo se podsjetiti valne jednadžbe kakvu smo izveli za transverzalna i longitudinalna titranja : (4.2) i (4.6) za navedeni slučaj koju je ovdje dobro ponoviti:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1)$$

Lako se možemo uvjeriti parcijalnim deriviranjem po vremenu i po prostornoj koordinati da izraz :

$$\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (8.2)$$

zadovoljava valnu jednadžbu (4.2) pod uvjetom da su k i ω povezani relacijom (4.14) koju ćemo ovdje također ponoviti:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (8.3)$$

Treba pažljivo razumjeti što rješenje (8.2) sve opisuje. Za određeni vremenski trenutak na primjer $t=0$ to je beskonačna kosinusna funkcija. No kako vrijeme teče ona se pomiče brzinom v prema većim vrijednostima argumenta x . To lako potvrđujemo opažanjem da se ista vrijednost kosinusne funkcije nalazi na mjestima gdje je argument kosinusa stalan: znači

$$kx - \omega t = \text{const. to jest } x = \frac{\omega}{k} t + \frac{\text{const}}{k} \quad \text{ili uz (8.3)}$$

$$x = vt + c_1 \quad (8.4)$$

gdje je $c_1 = \frac{\text{const.}}{k}$. Drugim riječima isti odmak od ravnotežnog položaja ostvaruje se duž

medija slijedeći relaciju (8.4) koja je jednoliko gibanje brzinom v . Mi smo se upravo uvjerili da, formalno gledajući, od stacionarnog titranja stojnog vala dobivamo putujući val jednostavnom zamjenom $(A \sin kx + B \cos kx) \cos \omega t \rightarrow A \cos(kx - \omega t)$.

DEMONSTRACIJE širenja putujućeg harmoničkog vala na velikom modelu u uvjetima „savršenog završenja“ (ovaj uvjet „savršenog završenja bit će uskoro preciziran; zasad student treba upamtiti da se na takvom kraju putujući valovi ne reflektiraju natrag.)

8.2 Mogućnost mehaničkih harmoničkih putujućih titranja u mediju u kojem postoje granične frekvencije

Do sada smo ustanovili da analitički oblik disperzijskih relacija ne zavisi od rubnih uvjeta. Kako druga parcijalna derivacija po vremenu bilo stacionarnog oblika titranja bilo onog oblika (8.2) rezultira istim rezultatom, jasno je da iste disperzijske relacije vrijede i za putujuće valove. Dok u slučaju disperzijske relacije (8.3) nemamo graničnih frekvencija, pri svim vrstama titranja elastično vezanih objekata imali smo donju i gornju graničnu (kružnu) frekvenciju titranja. Samo između njih mogla su se uspostaviti stacionarna rješenja oblika:

$$\psi(x, t) = (A \sin kx + B \cos kx) \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.5)$$

Prema tome je isto tako razumljivo da se sustavom, za koji u disperzijskim relacijama postoje ograničenja na frekvencije, mogu se širiti putujuć valovi oblika (8.2) samo ako je kružna frekvencija titranja iz dozvoljenog područja kružnih frekvencija. Kada harmonijski putujući val frekvencije ω naiđe na dio medija u kojem je $\omega^2 < \omega_{donja}^2$, u nastavku medija će nastati stacionarno titranje u kojem su vremenska i prostorna zavisnost odvojene i imat će oblik na primjer:

$$\psi(x, t) = A e^{-kx} \cos \omega t \quad (8.6)$$

Naravno za diskretno razmještene oscilatore koordinata n -tog oscilatora postaje diskretna sukladno izrazu $x=na$. U slučaju da smo iznad gornje granične frekvencije ;uzmimo opet kao primjer diskretne rezonatore imat ćemo :

$$\psi_n(t) = A(-1)^n e^{-nka} \cos \omega t \quad (8.7)$$

Podsjećamo da smo potankosti stacionarnih titranja izvan disperzijskih granica prošli u poglavlju 8. Također se mora specificirati da se prostorne koordinate koje se pojavljuju u (8.6) i (8.7) počinju brojati (ishodišnja točka) je mjesto na kojem su se u mediju promijenile vrijednosti od ω_0 koja je promjena izbacila ω iz dozvoljenog područja. Podsjećamo studenta da smo do sada za niz raznih medija (žice, zvuk u zraku, sustave oscilatora raznih konfiguracija i načina titranja našli razne oblike disperzijskih relacija. Preko veze (fazne) brzine (8.3) s ω i k , možemo za sve te slučajeve naći i ovisnost brzine širenja faze titranja o ω i k . Zapravo ističemo porijeklo naziva fazne brzine. To je brzina kojom jedna te ista vrijednost faze argumenta kosinusa ($kx - \omega t$) napreduje, kako je diskutirano oko relacije (8.4).

8.3 Elektromagnetska titranja u slobodnom prostoru i u plazmi

Već u drugom semestru izveli smo valnu jednadžbu za elektromagnetske valove u vakuumu. Ponoviti ćemo najvažnije elemente izvoda da bismo vidjeli utjecaj koji se pojavljuje postojanjem ionosfere to jest dijela Zemljinog omotača u kojem radi zračenja postoji mješavina „slobodnih“ elektrona i iona molekula zraka. Maxwelllove jednadžbe su:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.8)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (8.9)$$

Lijeva strana lijeve jednadžbe (8.9) standardno se obrađuje deriviranjem:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} = \text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(-\text{rot} \vec{E}) = -\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) \quad (8.10)$$

Kako u plazmi radi neutralnosti divergencija električnog polja iščezava, preostaje samo prvi član rezultata (8.10). S desne strane deriviranog izraza (8.9) pojavljuje se uz poznatu drugu derivaciju po vremenu električnog polja i vremenska derivacija gustoće struje \vec{j} . Naravno da u neutralnoj mješavini naboja mogu postojati električne struje. Iz proučavanja mikroskopskog (Drudeovog) modela struja znamo: $\vec{j} = Nq\vec{v}$ gdje su N prostorna gustoća naboja, q naboj nosioca naboja, a \vec{v} njegova brzina. Time potrebni izraz:

$$\mu_0 \dot{\vec{j}} = \mu_0 Nq \dot{\vec{v}} = \mu_0 Nq \frac{\vec{F}}{m} = \mu_0 Nq^2 \frac{\vec{E}}{m} \quad (8.11)$$

Kombiniranjem rezultata (8.10) i (8.11) u deriviranu jednadžbu za rotor magnetskog polja iz (8.9) slijedi:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \vec{E} \quad (8.12)$$

Ovako dobivena jednadžba za ponašanje električnog polja u ionosferi u matematičkom je smislu samo proširenje Klein-Gordonove jednadžbe iz prošlog poglavlja. (8.12) je doduše proširenje na ponašanje s jednodimenzionalne veličine ψ na ponašanje vektora električnog polja s tri prostorne komponente ali strukturno imamo uz drugu derivaciju po vremenskoj varijabli i uz drugu derivaciju po prostornoj varijabli i član s desne strane (8.12) koji je u Klein-Gordonovoj jednadžbi do na faktor proporcionalnosti odgovara članu $\omega_0^2 \psi$. Stoga

ćemo sveukupnu konstantu s desne strane (8.12) slično imenovati: $\frac{\omega_p^2}{c^2}$ gdje je ω_p frekvencija

titranja slobodne plazme. Na ovo ime nas navode dvije već naučene stvari. Prva je analogija s Klein-Gordonovom jednadžbom. No još intuitivniji osjećaj stječemo podsjećanjem na studij prisilnih oscilacija sustava oscilatora; tamo smo imali frekvenciju onih posebnih oscilatora koji vežu oscilatore uz ravnotežni položaj paralelno oprugama za međusobno povezivanje oscilatora. Da oscilatori nisu međusobno bili povezani, frekvencija njihovog vlastitog slobodnog titranja bi postojala i to je veličina čiji je analogon ω_0 .

Ako u (8.12) uvrstimo pretpostavku stacionarnog titranja električnog polja:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) \quad (8.13)$$

za širenje polja duž x osi, imat ćemo poslije kraćenja vremenske zavisnosti:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (8.14)$$

za disperzijsku relaciju širenja elektromagnetskog vala ionosferom. Jasno je da će kroz ionosferu penetrirati valovi s frekvencijom iznad granične dok oni ispod toga ne će. Ovo ima fundamentalne posljedice u komunikacijama radiostanicama. Za velike valne dužine emisija dugovalnih radiostanica obilazi globus, jer se radi premale ω valovi ne mogu transmitirati ionosferom; oni se na njoj reflektiraju. S druge strane UKW emisija prolazi ionosferom i njezinu emisiju ne opažamo iza linije horizonta!

8.4 Frekvencija titranja slobodne plazme

U ovom odjeljku direktno opravdavamo ime za veličinu ω_p . U plazmi, koja je mješavina pokretnih elektrona i praktički nepokretnih iona mogu se spontano razviti stojni valovi slijedećim mehanizmom. Neka se u jediničnom volumenu nalazi N elektron-ion parova.

Zamislamo da su svi elektroni pomaknuti od iona za odmak od ravnoteže x . Njihova površinska gustoća stvorena tim odmakom je:

$$\sigma = \frac{Nqx}{A} \quad (8.15)$$

Naboj elektrona q i gustoća N su kao i u prethodnom odjeljku. Pretpostavljena površina po kojoj su smješteni po pomaku je A . Time je nastalo (povratno) električno polje:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Nqx}{\epsilon_0} \quad (8.16)$$

i povratna sila:

$$m\ddot{x} = -\frac{Nq^2}{\epsilon_0}x \quad (8.17)$$

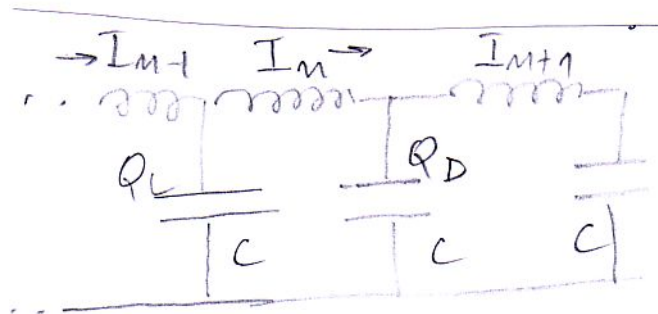
Odavle je jasno da je vlastita frekvencija kojom bi plazma spontano titrala:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \quad (8.18)$$

Što je upravo vrijednost koju smo upotrijebili tijekom izvoda od (8.12) do (8.14).

8.5 Transmisijaska linija koja je kombinacije kapacitora i zavojnica

Promatranjem dijagrama takve transmisijске linije i pisanjem diferencijalne jednadžbe elementarnog titrajnog kruga unutar transmisijске, linije ubrzo vidimo punu analogiju sa sustavom masa povezanih elastičnim oprugama.



Naime za petlju koja sadrži struju I_n vrijedi:

$$\frac{Q_L}{C} - L \frac{dI_n}{dt} - \frac{Q_D}{C} = 0 \quad (8.19)$$

iz čega deriviranjem po vremenu i očitim veza vremenskih derivacija naboja na kapacitorima sa strujama koje pune te kapacitore slijedi:

$$\frac{I_{n-1} - I_n}{C} - L \frac{d^2 I_n}{dt^2} - \frac{I_n - I_{n+1}}{C} = 0 \quad (8.20)$$

Što nakon sređivanja daje:

$$\ddot{I}_n = \frac{1}{LC} (I_{n+1} + I_{n-1} - 2I_n) \quad (8.21)$$

Ova diferencijalna jednačina je pojednostavljena varijanta mehaničkog ekvivalenta (8.35) s time da nema ni dodatnih opruga osim onih koje povezuju tijela međusobno niti su tijela obješena da budu i njihala. Punom analogijom tražimo rješenje u obliku putujućeg vala oblika:

$$I_n = A \sin(nka - \omega t) \quad (8.22)$$

gdje je kao i u mehaničkom slučaju a prostorna dimenzija duljine elementarnog kruga. Dvostrukim deriviranjem (8.22) po vremenu i uvrštavanjem u (8.21) te kraćenjem vremenske zavisnosti slijedi:

$$-\omega^2 I_n = \frac{2}{LC} I_n \left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2I_n} - 1 \right) \quad (8.23)$$

odakle se primjenom adicijskog teorema pogodnom separacijom argumenta sinusa iz (8.22)

kakvu smo već vidjeli u proceduri od (8.37) do (8.39) dobivamo:

$$\omega^2 = \frac{2}{LC} (1 - \cos ka) = \frac{4}{LC} \sin^2 \frac{ka}{2} \quad (8.24)$$

Odmah je jasno da ćemo moći imati putujuće valove samo uz uvjet :

$$\omega^2 \leq \frac{4}{LC} \quad (8.25)$$

Za frekvencije iznad te granice može proći samo rješenje oblika:

$$I_n = (-1)^n e^{-kna} \cos \omega t \quad (8.26)$$

koje više nije putujući prostorno oscilatorni val, nego niz stacionarnih titranja struja koje amplitudom u prostoru eksponencijalno trnu a smjerom su jedna suprotne. Prostorno oscilatorni val putujući val nije moguć u tom frekventnom području. Procedurom analognom onoj od (8.44) do (8.45) disperzijska relacija je sada:

$$\omega^2 = \frac{4}{LC} ch^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \quad (8.27)$$

Ako se vratimo na propusni dio frekvenzijskog spektra i disperzijsku relaciju (8.24) možemo za male vrijednosti k valnog broja (dugovalna aproksimacija) sinus zamijenit argumentom, to jest:

$$\omega^2 = \frac{4}{LC} (ka/2)^2 \quad (8.28)$$

čime fazna brzina postaje:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{LC}{a}}} \quad (8.29)$$

Ovo je ključni izraz za proračun faznih brzina transmisijskih linija za „standardne frekvencije“, to jest za one iz dugovalne aproksimacije. Također je odmah očito da u tom dijelu frekvenzijskog spektra sve frekvencije putuju istom brzinom. Znači nema disperzije po frekvenciji!

UMETAK I KOMENTAR O STRUKTURI I ULOZI DISPERZIJSKIH RELACIJA

Disperzijske relacije povezuju kružnu frekvenciju ω i k valni broj koji se pojavljuju i u stojnim valovima i u putujućim valovima. Struktura ovih valova ima slijedeće forme:

STOJNI $\rightarrow (A \sin kx + B \cos kx) \cos \omega t$

PUTUJUĆI $\rightarrow A \cos(kx - \omega t)$

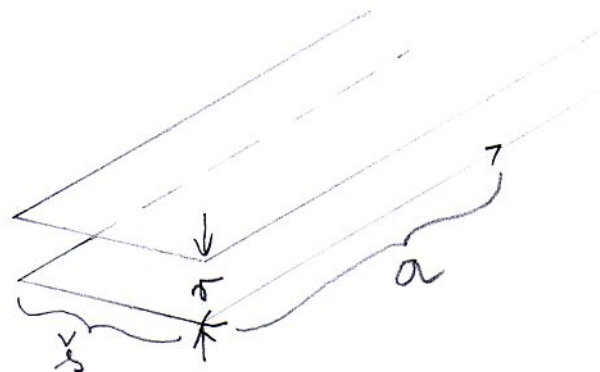
Mi smo disperzijske relacije računali za stojne valove. Tipični izraz koji je prethodio konačnoj formi za disperzijsku relaciju je bila diferencijalna jednačba za titranje n -tog oscilatora koja ga je povezivala s okolinom (na primjer (8.35))

$$\ddot{\psi}_n = -\omega_0^2 \psi_n + \frac{K}{m} \psi_n \frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n}{\psi_n}$$

Ponavljamo argument da disperzijske relacije ne zavise o rubnim uvjetima; rubni uvjeti se manifestiraju kod stojnih valova formom koja je ili sinusoidalna ili kosinusna u prostornom dijelu, no mi smo u analizi između (8.35) i (8.40) pokazali da je rezultat za razlomak u gornjoj relaciji uvijek isti i iznosi $2(\cos ka - 1)$. Ako u analognoj proceduri uz prostornu zavisnost amplitude o kx dodamo i zajedničku fazu $-\omega t$ (kada sa stojnih prelazimo na putujuće valove) rezultat za razlomak se neće promijeniti. S druge strane druga derivacija po vremenu amplitude ψ_n daje isti rezultat bilo da se radi o obliku stojnog ili putujućeg vala. Znači da disperzijske relacije vrijede i za putujuće valove! Kako se, pak, prostorno titrajući (stojni val) može uspostaviti samo u frekvencijskom pojasu zadanom disperzijskim relacijama, jasno je da i putujuć valovi jesu mogući samo u tom istom frekvencijskom području. **TEMELJNA ULOGA DISPERZIJSKIH RELACIJE JEST ODREĐENJE FREKVENCIJSKOG POJASA UNUTAR KOJEG JE MEDIJ TRANSPARENTAN ZA PUTUJUĆI VAL.** Može se još dodati da ćemo otkriti važnost disperzijskih relacija i pri širenju superpozicije valova raznih frekvencija koji na primjer predstavljaju „puls“. Pojava disperzije (ovisnosti k o ω) mijenjat će oblik tog pulsa u vremenu.

8.6 Primjer proračuna fazne brzine širenja elektromagnetskog vala duž linije koja se sastoji od dvije paralelne vodljive trake

Na crtežu su paralelne trake širine s razmaknute za razmak r .



Segment duž kojeg razmatramo pojavu struja je dugačak a . Kapacitet ovako definiranog kapacitora je:

$$C = \varepsilon_0 \frac{a\check{s}}{r} \quad (8.30)$$

Tok magnetskog polja prouzročenog strujom koja teče po trakama je :

$$raB = LI \quad (8.31)$$

gdje je B magnetsko polje, L je traženi induktivitet a I je struja koja teče trakama.

B se nadalje može izraziti plošnom strujom dobivenom dijeljenjem struje i širine \check{s} .

Time je :

$$ra\mu_0 \frac{I}{\check{s}} = LI \quad (8.32)$$

(8.30) i (8.32) sadrže omjere L/a i C/a potrebne u (8.29) pa imamo:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 r}{\check{s}} \varepsilon_0 \frac{\check{s}}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c \quad (8.33)$$

Student može provjeriti da se analognim proračunom može dobiti ista fazna brzina i za geometriju koaksijalnog kabla (jedna tanka vodljiva žica ide kroz os vodljivog cilindra).

Naravno gornji proračun je načinjen u vakuumskim uvjetima među trakama. Identični rezultat se dobiva i za koaksijalni kabel kad bi u unutrašnjosti cilindra bio vakuum. No tamo se nalazi dielektrik tako da je brzina svjetlosti značajno reducirana. Anegdotsko-profesionalni standard nuklearnih fizičara je 10 ns koaksijalni kabel za kašnjenje. Kako svjetlo u nanosekundi prevali 30 cm jasna je duljina takvog kabla u vakuumskim uvjetima. Komercijalni koaksijalni kabel za kašnjenje je međutim reda veličine duljine 1 m!!!

MOGUĆI POKUS

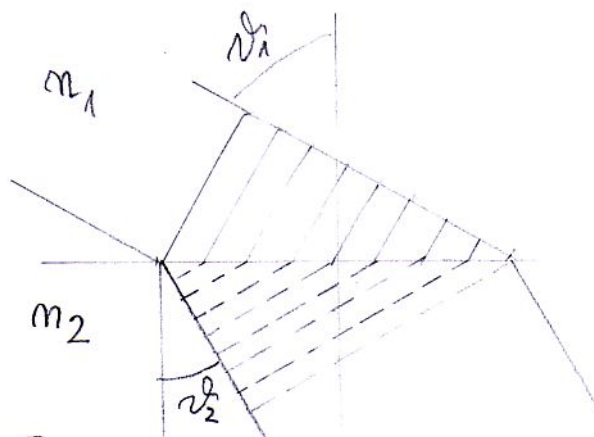
Na osciloskopu opaziti stvarno kašnjenje od 10 ns produžnog kabla; izmjeriti mu duljinu!

9. Širenje elektromagnetskih valova u tvarima

Kao što je upravo indicirano gore, elektromagnetski valovi se u sredstvima kreću brzinama različitim od one u vakuumu. Elementarna posljedica toga jest pojava promjene smjera širenja valne fronte elektromagnetskog vala, pri prijelazu među različitim optičkim sredstvima, nazvana lomom svjetlosti. Kako lom u biti ovisi o valnoj dužini elektromagnetskog vala, to se u disperzivnim sredstvima u kojima frekvencija titranja vala i njegov valni broj nisu proporcionalni, javlja rasap smjerova širenja svjetla po frekvencijama. Student je mnogo puta morao vidjeti taj efekt pri ulasku bijele svjetlosti u, na primjer, staklenu prizmu. U ovom poglavlju ćemo obraditi najprije fenomenološki a potom i malo bolje obadva fenomena.

9.1 Lom svjetla i Snellov zakon

Pretpostavimo da paralelan snop svjetla pada pod nekim kutom na kontakt dva prozorna sredstva. Očekuje se da je student familijaran s činjenicom da su valne fronte širenja svjetla (mjesto identične faze u titranju) okomite na smjer širenja svjetla. Stoga su na primjer pozicije maksimuma titranja razmaknute za valnu duljinu λ . No u raznim sredstvima vrijednosti λ su različite.



Na slici imamo oznake: indeksa lomova za prvo i drugo sredstvo n_1 i n_2 gdje je

$$v = \frac{c}{n} = \lambda \nu \quad (9.1)$$

definicija indeksa loma n preko fazne brzine v . Time je dobivena i veza valne duljine λ u sredstvu s λ_{vakuum} :

$$\lambda = \frac{1}{n} \frac{c}{\nu} = \frac{1}{n} \lambda_{\text{vakuum}} \quad (9.2)$$

Upadni kut (mjereno od okomice na granicu sredstava) označavamo s ϑ_1 a izlazni s ϑ_2 . Koncentrirajući se samo na one valne fronte koje prema crtežu prelaze iz sredstva u sredstvo i čiji broj je isti u obadva sredstva imamo:

$$\sin \vartheta_1 = \frac{m \lambda_1}{l} = \frac{m}{l} \frac{c}{n_1 \nu} \quad \text{to jest} \quad n_1 \sin \vartheta_1 = \frac{m}{l} c \nu \quad (9.3)$$

Kako identični rezultat možemo dobiti i u sredstvu 2, slijedi Snell-ov zakon:

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2 \quad (9.4)$$

POKUS

9.2 Disperzija svjetlosti

POKUS

Već u djetinjstvu studenti su vidjeli fenomen duginih boja koje je najlakše objasniti na prolazu višebojne svjetlosti kroz prizmu. Geometrija prizme je bitna ; da su površine ulaza i izlaza svjetla paralelne, rasap svjetla koji se dešava unutar sredstva (na primjer stakla) bi se pri izlasku kompenzirao i sve bi boje izašle pod istim kutom. Pri ulasku u gušće sredstvo (veći n), plava se svjetlost lomi jače od crvene. Pri izlasku se fenomen ne kompenzira jer se izlazna površina i ulazna sijeku pod kutem prizme. To pak povlači činjenicu da su pri izlasku kutevi pada na kontaktnu površinu različiti od onih nastalih za slomljene zrake pri ulasku, što uzrokuje različitost kutova raznih boja pri izlasku.

Ovo razdvajanje svjetlosti na boje posljedica je ovisnosti fazne brzine o valnoj duljini. Tako je fenomen: $v = \frac{\omega}{k} \neq const.$ iz optike prešao i u druga valna područja. Praktičke potankosti funkcioniranja prizme u razlaganju svjetla ćemo načiniti u poglavlju o geometrijskoj optici.

9.3 Modeliranje funkcionalne zavisnosti indeksa loma o frekvenciji elastično vezanim elektronom

Glavnina zavisnosti indeksa loma o frekvenciji potječe od faktora ϵ_r iz izraza

$$v_{sredstvo} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (9.5)$$

Ponašanje ϵ_r možemo modelirati prema našem znanju o ponašanju dielektrika iz prošlog semestra. Pretpostavit ćemo da vanjsko titrajuće električno polje prisiljava elektron na titranje, dok elektron sam ima s teškom molekulom, čiji je dio, interakciju elastičnom silom čija je „konstanta opruge“ K . To rezultira u slijedećoj jednažbi prisilnog titranja:

$$m\ddot{\psi} = -K\psi - m\Gamma\dot{\psi} + E_0 \cos \omega t \quad (9.6)$$

Strukturu (9.6) poznajemo kao i stacionarno rješenje u obliku:

$$\psi(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (9.7)$$

U transparentnim tvarima je atenuacija svjetla minimalna stoga ćemo za početak zanemariti gušenje i konstantu γ . Time se titranje svodi na

$$\psi(t) = b \cos \omega t = \frac{qE_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t = \frac{qE(t)}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (9.8)$$

Našli smo, dakle, da je elektronovo odstupanje od ravnotežnog položaja $\rightarrow \psi$ proporcionalno i sinkrono s prisilom; električnim poljem. Iz Prošlog semestra možemo iskoristiti vezu ϵ_r s električnim poljem i polarizacijom kada su polje i polarizacija paralelni:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{P(t)}{E(t)} \quad (9.9)$$

Za dipol naboja q i razmaka naboja ψ dipolni moment je $q\psi$ a polarizacija je:

$$P(t) = Nq\psi(t) \quad (9.10)$$

gdje je N prostorna gustoća broja molekula .

Time je indeks loma n moguće izraziti kombiniranjem (9.5), (9.9) i (9.10):

$$n^2 = \varepsilon_r = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (9.11)$$

Preko makroskopskih veličina: naboja i mase elektrona te elektronove vlastite frekvencije titranja u molekuli! Kako su elektronove vlastite frekvencije duboko u ultraljubičastom području, za vidljivu svjetlost frekvencije ω to znači $\omega \ll \omega_0$. Indeks loma u „normalnoj“ disperziji svjetla raste s frekvencijom. To je u skladu s eksperimentalnom činjenicom da se plava svjetlost lomi jače od crvene. Naša razmatranja možemo proširiti i u nevidljivo područje ultraljubičaste svjetlosti pa i iza rezonancija a na temelju našeg poznavanja oblika apsorptivne i elastične amplitude iz poglavlja 6. posebno promatrajući izraze (6.38) i (6.39) . U području u kojem elastična amplituda raste s frekvencijom (normalna disperzija) imamo uobičajeno ponašanje indeksa loma s frekvencijom. Kada se približimo rezonanciji vrlo blizu, kako frekvencija raste , indeks loma pada. To je fenomen anomalne disperzije. Istovremeno apsorpcijska amplituda nadjačava i svjetlost više ne može putovati medijem jer se u njemu apsorbira. Nakon što smo prošli rezonanciju postoji neprozirno područje (vidi izraz (9.11)) u kojem je kvadrat indeksa loma negativan. Očito imamo neprozirnost. Nakon izlaska n^2 iz tog negativnog dijela indeks loma ponovno raste i mi smo opet u području normalne disperzije. Može nas doduše zabrinjavati pojava $n < 1$, što znači da je fazna brzina veća od c ! Kasnije ćemo pokazati da je grupna brzina, brzina kojom se šalju informacije i koja ima kauzalni smisao, ipak prema našim očekivanjima to jest manja od brzine svjetla u vakuumu. Za ovu apsurdnu situaciju ilustrirat će se studentima kako se isto stanje titranja može jednostavno realizirati duž prostora na način koji nije kauzalna propagacija signala nego na primjer lukava „konspiracija“ okolnosti brzinom koja je proizvoljno velika!

Također vidimo da je faza titranja elektrona u tom području frekvencija suprotna fazi titranja uzbuđenog vala što ima poznate posljedice za niz oscilatora!

POKUSI

Uz poglavlje 9 demonstrira se pokuse s graničnim kutom; ako iz optički gušćeg sredstva zraka upada na kontaktnu površinu pod kutom (s obzirom na normalu) većim

od $\sin \vartheta_2 = \frac{n_1}{n_2}$, ona se reflektira natrag u sredstvo 2. Na tom su se principu temeljili

svjetlovodi za različite svrhe. Danas je na tome utemeljena tehnologija optičkih vlakana kroz koje se transmitira laserske modulirane signale zahvaljujući upravo činjenici da svjetlost ne može izaći iz vlakna ako se reflektira pod kutom većim od graničnog!

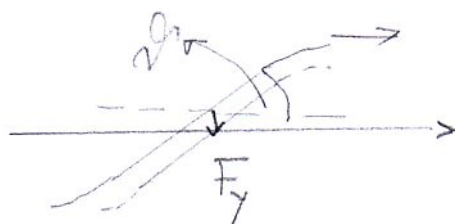
10. Definicija i uloga impedancije pri širenju valova

Do sada smo zapravo istraživali područje titranja i valova služeći se pojmovima iz mehanike i elektromagnetizma. Pojam impedancije pri širenju valova je zapravo prvi novi fizikalni koncept u kolegiju. Uvodno počinjemo s činjenicom koju je student do sada treba već prihvatiti. Pri širenju valova ne prostire se neko tijelo, ne širi se dio medija, miče se duž medija stanje titranja. To vrijedi za sve do sada razmatrane valove: mehanička titranja, akustične valove i titranja elektromagnetskih polja. Kao što ćemo uskoro vidjeti, pri tome se duž medija transportira (pronosi) impuls i energija. No zapravo možemo govoriti i o pronosu sile kroz medij.

10.1 Definicija impedancije za mehaničke valove na jednodimenzionalnom mediju

Ovdje ćemo pokušati izbjeći zbrku s konvencijama u oznakama sile i dok se drukčije ne izreče razmatrat ćemo sinusoidalne (uključujući naravno i kosinusnu ovisnost o vremenu) koji se kreću u pozitivnom smislu orijentacije medija. Razmatramo dakle titranje oblika:

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (10.1)$$



Potrebno je dobro se koncentrirati na crtež i razmotriti silu koja prema crtežu tjera pretpostavljeni oblik u pozitivnom smjeru orijentacije medija. Očito da bismo pozitivni nagib medija tjerali u pozitivnom smjeru x osi treba nam pogonska sila u negativnom smjeru y osi. Ako je ukupna napetost u mediju F i modul napetosti u x smjeru F_0 , tada je ta pogonska sila:

$$F_y = -F \sin \vartheta = -F_0 \tan \vartheta = -F_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.2)$$

Između parcijalnih derivacija po x i po t iz (10.1) slijedi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{k}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (10.3)$$

Napomena: i ova relacija kao i gornja oslanja se na konvenciju širenja opisanu s (10.1).

Za suprotan smjer širenja, predznaci se mijenjaju!

Time nam je pogonska sila postala:

$$F_y = F_0 \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv Z \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (10.4)$$

Tako je impedancija Z definirana kao konstanta proporcionalnosti između pogonske sile koja se pronosi medijem i brzine koju kao rezultat te sile ima trenutno promatrana točka medija.

POKUS

Demonstrira se na valostroju da se pri promjeni impedancije tijekom putovanja pulsa lokalna brzina titranja mijenja na mjestu promjene impedancije.

Kako Ohmov zakon daje sličnu vezu između napona (prisile) i struje (rezultata), često se govori o rezistivnosti medija. Naime, očito što je impedancija veća, to je postignuta brzina micanja medija manja. Treba strogo razlikovati ovu transverzalnu brzinu micanja medija od uzdužne brzine širenja vala: v !!! Još jednom upozoravamo da se relacije (10.2) i (10.3) odnose na širenje vala u pozitivnom smjeru orijentacije medija i da razmatramo pogonsku silu koja se pronosi kroz medij. Ovdje smo izveli izraz (10.4) za slučaj transverzalnih oscilacija. Identična veza onoj u (10.4) vrijede i u slučaju longitudinalnih putujućih valova. Jedina se promjena odnosi na izraz za brzinu širenja vala v koja drukčije zavisi o svojstvima medija nego izraz za v u transverzalnom slučaju. Radi potpunosti izlaganja i kasnije potrebe mora se kompletirati popis sila koje se javljaju pri transportu valnog fenomena. Jasno je iz trećeg Newtonovog zakona da dok dio medija iz kojeg val dolazi tjera medij na titranje pogonskom silom (10.4) u točki promatranja, istovremeno medij djeluje na dio iz kojeg dolazi val silom koja je po iznosu jednaka a predznakom suprotna sili u (10.4). Ovu silu iz trećeg Newtonovog zakona spominjat ćemo samo kada moramo kako bismo maksimalno standardizirali predznake i smisao koncentrirajući se na pogonsku silu vala, a ne na reakciju na tu pogonsku silu (preuzimamo aktivno gledište).

10.2 Snaga koja se pronosi kroz medij za mehaničke valove

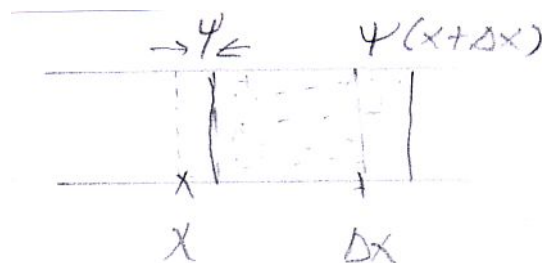
Uobičajeni produkt sile i brzine ovdje uzima oblik:

$$P = F_y \frac{\partial \psi}{\partial t} = Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad (10.5)$$

I ovdje se vidi puna analogija Z s ohmskim otporom.

10.3 Zvučni valovi i njihova impedancija

Frekvenciju akustičkog rezonatora smo izveli već u (1.11). Koristit ćemo dio rezultata iz tog razmatranja da bismo izveli i valnu jednačinu valova zvuka u plinu i pokazali izraz koji jedinstvenu definiciju impedancije (10.4) (doduše bez oznake za transverzalnost y) povezuje sa specifičnim svojstvima plina kojim se zvučni valovi šire. U prvom poglavlju je naš stupić zraka titrao na račun adijabatskih promjena u rezonatorovom cilindru.



I sada će nam koristiti adijabatske veze tlaka i volumena no u ovom izvodu zvučnog vala unutar šupljeg cilindra stupić zraka sam nema stalni volumen. On se pri titranju rasteže imajući na koordinati x odstupanje od položaja ravnoteže $\psi(x)$, a na položaju $x + \Delta x$ je njegovo odstupanje od ravnoteže $\psi(x + \Delta x)$.

Već smo spominjali da je zvuk u suštini titranje akustičkog nadtlaka (tlaka iznad ravnotežnog tlaka). Taj se pak nadtlak pojavljuje kao drugi pribrojnik u slijedećoj relaciji za ukupni tlak:

$$p = p_0 + \frac{\partial p}{\partial V} dV = p_0 + V \frac{\partial p}{\partial V} \frac{dV}{V} \quad (10.6)$$

Uzimajući u obzir adijabatsku relaciju između tlaka i volumena iz prvog poglavlja možemo analogno izvodu relacije (1.11) pokazati da je

$$V \frac{\partial p}{\partial V} = -\gamma p \quad \text{dok je} \quad \frac{dV}{V} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.7)$$

radi stalnosti presjeka cilindra. Uvrštavanjem u (10.6) dobiva se:

$$p = p_0 - \gamma p_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.8)$$

Sila koja stupać plina tjera na titranje je najprije razlika sila na krajevima. Svaka sila na kraju stupića je umnožak lokalnog tlaka i površine cilindra S:

$$F(x, t) - F(x + \Delta x, t) = SV \frac{\partial p}{\partial V} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x + \Delta x, t)}{\partial x} \right) = SV \frac{\partial p}{\partial V} (-\Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}) \quad (10.9)$$

S druge strane ta pogonska sila rezultira po drugom Newtonovom zakonu u:

$$F(x, t) - F(x + \Delta x, t) = S \Delta x \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (10.10)$$

Izjednačavanjem dviju posljednjih relacija uz uvažavanje prve relacije iz (10.7) imamo:

$$p_0 \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.11)$$

što je valna jednadžba za zvuk u plinu iz koje očitavamo brzinu zvuka:

$$v_{zvuk}^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho} \quad (10.12)$$

Da bismo dobili impedanciju plina u odnosu na valove zvuka očitamo silu akustičkog nadtlaka iz 10.6:

$$\text{Sila nadtlaka} = SV \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial x} = S \gamma p_0 \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} = S \sqrt{\gamma p_0 \rho} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (10.13)$$

Ako se (10.13) podijeli s površinom S dobiva se nadtlak koji igra ulogu pogonske sile i u definiciju akustičke impedancije prirodno ne ulazi nebitna veličina površine cilindra.

$$Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho} \quad (10.14)$$

10.4 Intenzitet zvuka

Sada je prilika iskoristiti izvedene relacije za mjeru intenziteta zvuka: Ako se pomnoži pogonski akustički nadtlak: $V \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ s brzinom $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ dobiva se snaga na jedinicu površine koja medijem trenutno prolazi dok kroz njega putuju akustički val:

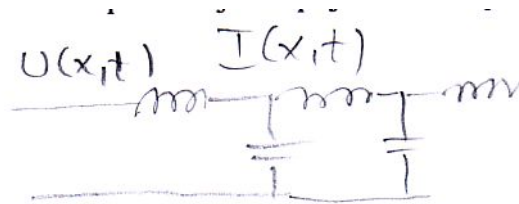
$$\frac{\text{Snaga}}{\text{Površina}} = V \frac{\partial p}{\partial V} \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \quad (10.15)$$

Jasno je da postoje SI jedinice za intenzitet zvuka (w/kvadratni metar). No ljudsko uho ima logaritamsku osjetljivost i k tome je najosjetljivije oko 440 Hz. Stoga se uzima kao početak skale granica čujnosti ljudskog uha (na 440 Hz) od 10^{-12} W/m^2 . Logaritam omjera stvarnog intenziteta i ovog standarda je intenzitet u belima. Bel pak ima 10 decibela, što je prakticirana jedinica za mjerenje intenziteta zvuka. Tako je normalna čujnost negdje oko 100 db (odgovara 10^{-2} Wm^{-2}). Granica bola nastupa u blizini 130 db (oko 10 W/m^{-2}). Edukativno moramo

spomenuti da pri ovim intenzitetima u uhu nastaju trajna oštećenja koja se više ne mogu izliječiti.

10.5 Impedancije LC prijenosnih linija

Pretpostavimo da LC prijenosnu liniju progonimo naponom $U_0 \cos \omega t$ koji niz liniju šalje napon $U_0 \cos(\omega t - kx)$ u skladu s našim poznavanjem takvog titrajućeg sustava.



Općeniti strujni odgovor je oblika:

$$I(x,t) = I_0 \cos(\omega t - kx) + I_1 \sin(\omega t - kx) \quad (10.16)$$

Analogon mehaničkoj impedanciji bi se pojavio kao vremenski stabilan omjer napona i struje; to znači da bi trebalo dokazati $I_1 = 0$. Na svakom kapacitoru je odnos napona i naboja isti:

$$Q(x,t) = CU(x,t) \quad (10.17)$$

čijim deriviranjem po vremenu i uvođenjem razlike struja koje hrane/prazne isti kapacitor : ΔI imamo:

$$C \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \Delta I = -\frac{\partial I}{\partial x} a \quad (10.18)$$

gdje je a prostorna dimenzija jedne LC petlje. Deriviranjem struje po prostornoj koordinati dobiva se pak:

$$-\frac{\partial I}{\partial x} a = -ak \sin(\omega t - kx) + ak \cos(\omega t - kx) \quad (10.19)$$

Uvrštenjem početne pretpostavke o obliku napona i njenim deriviranjem u (10.18) i unošenjem rezultata (10.19) imamo:

$$-\omega CU_0 \sin(\omega t - kx) = -aI_0 k \sin(\omega t - kz) + aI_1 k \cos(\omega t - kz) \quad (10.20)$$

što je jedino moguće uz $I_1 = 0$. Također dobivamo da je traženi faktor proporcionalnosti napona i struje Z :

$$Z = \frac{a k}{C \omega} = \frac{a}{C} \sqrt{\frac{CL}{aa}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Također i} \quad Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} \quad (10.21)$$

Impedancija prijenosne linije je u Ω .

Za prenesenu snagu imamo također očekivani rezultat:

$$P = UI = ZI^2 \quad (10.22)$$

Analogija mehaničkih odnosa pogonske sile i brzine s odnosima u Ohmovom zakonu ide eto i u LC titrajne linije.

11 Refleksije

Sve do sada, naročito za putujuće valove, nismo razmatrali što se događa kada val naiđe na kraj sustava ili se u sustavu promijeni reakcija sustava na putujući val → promijeni se impedancija. Vrlo često na takvom mjestu dio vala nastavi svoje napredovanje, no dio se i reflektira, to jest krene u protivnom smjeru.

11.1 Savršeni završetak valnog sustava.

Kada putujući val naiđe na čvrsti kraj, pogonska sila vuče taj kraj. Iako se taj kraj ne miče, on mediju predaje silu iz trećeg Newtonovog zakona i pogoni val sada u suprotnom smjeru kao što ćemo uskoro analizirati. U mnogim primjenama, a naročito u brznoj elektronici cilj nam je međutim osigurati da val došavši do kraja linije ne izaziva dodatne efekte, pučki rečeno da nestane s linije. Ideal takvog kraja je model prijemnika koji se ponaša kao ostatak linije koji bi trebao postojati iza kraja medija. Sada se vraćamo sili iz trećeg Newtonovog zakona kojom se dio sustava u koji val dolazi odupire dolasku vala; ako „organiziramo“ da u krajnjoj točki sustava djeluje upravo takva sila, dolazeći dio sustava je u istim uvjetima u kojima je kad i val prolazi krajnjom točkom i tom „prijevaram“ izbjegnuta je refleksija. Potrebno je znači u krajnjoj točki sustava ostvariti silu koja je jednaka po jakosti a suprotnog predznaka pogonskoj sili: znači prema (10.4)

$$F_{na\ kraju} = -Z \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11.1)$$

U tom slučaju smo postigli savršeni završetak valnog sustava. Kako je u praksi ovo najvažnije u električnim transmisijskim linijama upoznat ćemo se s metodom korektnog zaključnog otpora na fizičkom kraju transmisijske linije.

11.2 Zaključni otpor LC prijenosne linije

U transmisijskoj liniji vrijedi:

$$U(x, t) = ZI(x, t) \quad (11.2)$$

Ako na kraju takve linije između dvije osnovne linije postavimo Ohmski otpor s vrijednosti

$$R = Z \quad (11.3)$$

možemo govoriti o dodatnoj elektromotornoj sili: $-ZI(x, t)$ koja upravo čini ono što smo prije opisali. Alternativno intuitivno možemo prihvatiti da se napon umjesto na tjeranje ostatka LC linije utrošio na tjeranje takve struje kroz otpornik kakvu bi tjerao u ostatku linije. Svi studenti koji će u kasnijim aktivnostima upotrebljavati brzu elektroniku moraju znati da je naš standard $Z = 50$ Ohma. To je različito od TV koaksijalnih kablova. Posebno pri očitavanju jakosti brzih signala na osciloskopu osciloskopski priključak treba dio signala uvoditi u osciloskop a ostatak zaključiti zaključnim otporom.

11.3 Pojave na mjestu promjene impedancije:

Uzmimo kao model promatranja napetu žicu koja na koordinati $x=0$ ima promjenu impedancije od Z_1 na Z_2 . U kontaktnoj točki $x=0$ postoji jedna jedinstvena vrijednost transverzalne brzine titranja: $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. To ima vrlo dramatičnu posljedicu. Na kontaktnu točku nasrće pogonska sila :

$$Z_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11.4)$$

A nastavak medija uzvraća sa reakcijom: $-Z_2 \frac{\partial \psi}{\partial t}$, što nije odgovor koji se traži za jednostavni prolaz signala kroz točku $x=0$. Stvorena neravnoteža sila pokreće refleksiju vala u dijelu medija impedancije Z_1 . (Ovdje se standardno prešućuje činjenica da se dio medija s impedancijom Z_2 proteže u beskonačnost, tako da u njemu nema reflektiranih valova.) Opisat ćemo preko sila u kontaktnoj točki gore opisanu situaciju.

U pozitivnom smjeru medija sa strane medija 1 ulazi putujući val oblika

$$\psi_1(x, t) = \psi_1 \cos(kx - \omega t) \quad (11.5)$$

kojeg pogoni sila koja se izračunava s (11.26):

$$Z_1 \frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial t} \quad (11.6)$$

Dio te sile se troši na pogon reflektiranog vala.

Taj val ima opis :

$$\psi_2(x, t) = \psi_2 \cos(kx + \omega t) \quad (11.7)$$

a pogonska sila za njegovu realizaciju jest

$$Z_1 \frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial t} \quad (11.8)$$

Pogonska sila ulaznog putujućeg vala troši se u kontaktnoj točki na dva efekta: pogonsku silu vala (11.30) reflektiranog vala i pogonsku silu vala u području 2. U točki kontakta gledano s gledišta medija 2, pomak je zbroj pomaka ψ_1 i ψ_2 .

$$Z_1 \frac{\partial \psi_1(0, t)}{\partial t} = Z_1 \frac{\partial \psi_2(x, t)}{\partial t} + Z_2 \left(\frac{\partial \psi_1(0, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2(0, t)}{\partial t} \right) \quad (11.9)$$

Sređivanjem (11.31) dobivamo vezu među vremenskim derivacijama titranja vala 1 (upadni) i vala 2 (reflektirani).

$$\frac{\partial \psi_2(0, t)}{\partial t} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{\partial \psi_1(0, t)}{\partial t} \quad (11.10)$$

Tako smo dobili refleksijski koeficijent za brzinu za prijelaz iz sredstva 1 u sredstvo 2:

$$R_{12}^{\text{brzinski}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (11.11)$$

POKUS

Demonstrira se na valostroju da ulazni puls istovremeno pokreće i reflektirani puls i nastavak pronosa vala iza točke promjene impedancije.

Razmatranjem svih mogućih kombinacija vrijednosti za impedancije vidimo da se vrijednost navedenog refleksijskog koeficijenta kreće između -1 i +1. Uskoro ćemo vidjeti da su ove ekstremne vrijednosti refleksijskih koeficijenata u korespondenciji s refleksijom na čvrstom i slobodnom kraju. U svrhu dobivanja izraza za refleksijski koeficijent za amplitude uvrstimo (11.10) u (11.9) zajedno s rezultatima deriviranja (11.4) i (11.6) :

$$-\psi_2 \omega \sin \omega t = R_{12}^{\text{brzinski}} \psi_1(-\omega) \sin \omega t \quad \text{što rezultira u } \psi_2 = R_{12}^{\text{brzinski}} \psi_1 \quad (11.12)$$

To znači da reflektirani val ima eksplicitni oblik:

$$\psi_2(x,t) = R_{12} \psi_1 \cos(kx + \omega t) \quad (11.13)$$

Refleksijski koeficijenti brzine i pomaka su identični pa smo superskript brzinski u (11.14) izostavili.

NAPOMENA O KONVENCIJAMA PREDZNAKA I POGONSKOJ SILI:

Povratkom na relaciju (11.4) student se može uvjeriti da za razliku od drugih konvencija i drugih udžbenika naša definicija pogonske sile ne zavisi o smjeru širenja valova. S druge strane ona je u skladu i sa smjerom širenja vala prema većim vrijednostima koordinate (pozitivni smjer). Kako je u (11.4) pogonska sila povezana s pozitivnim predznakom parcijalne derivacije pomaka po vremenu, jasno je da je refleksijski koeficijent za pogonsku silu isti kao i refleksijski koeficijenti za brzinu lokalnog pomicanja R_{12} . Ovo je u suprotnosti s Berkleyskom konvencijom; tamo se bez obzira na akciju i reakciju sile definiraju prema tome s koje strane medija djeluju. U svakom slučaju, u ovom kolegiju, kako bi se izbjeglo zbunjivanje studenata, koncentrirat ćemo se prvenstveno na pojmove koji nisu predmet konvencija: pomake i brzine pomaka.

Refleksija na čvrstom kraju:

Rubni uvjet u krajnjoj točki medija ($x=L$) jest:

$$\psi(L,t) = 0 \quad \frac{\partial \psi(L,t)}{\partial t} = 0 \quad F_y(L,t) \neq 0 \quad (11.15)$$

Radi veze parcijalne derivacije po vremenu sa silom (11.4), jasno je da je to moguće samo u slučaju $Z_2 = \infty$ što povlači da je refleksijski koeficijent u uvjetima čvrstog kraja:

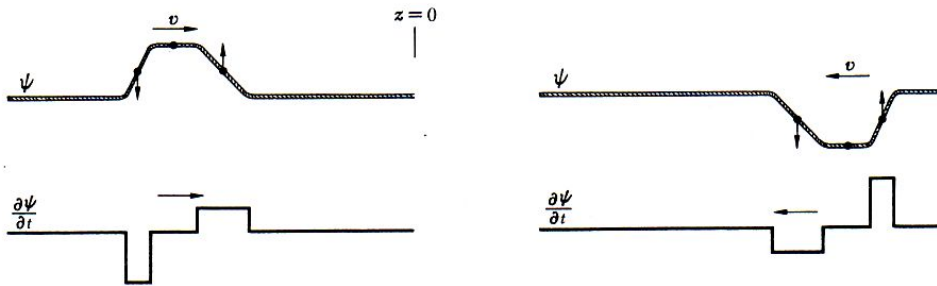
$$R_{12} = -1 \quad (11.16)$$

Refleksija na neovršenom kraju

$$\psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \text{ali} \quad F_{završ} \neq 0 \quad F_{završ} = -Z_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow Z_2 = \infty$$

$$R_{12}(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) = -1$$

$$R_{12}(\frac{\partial \psi}{\partial t}, F) = +1$$



Refleksija na slobodnom kraju:

Na slobodnom kraju nema završne sile, ali postoji brzina micanja (ništa ne drži kraj medija u mirovanju). Tako su uvjeti:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0 \quad \text{dok je} \quad F_y = 0$$

što je prema (11.4) moguće samo uz $Z_2 = 0$, a to povlači:

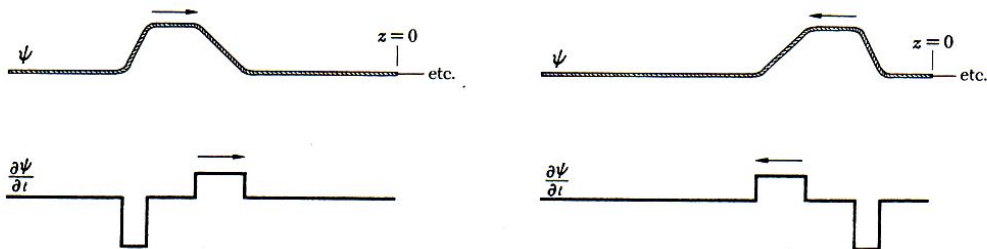
$$R_{12} = 1$$

Refleksija na slobodnom kraju

$$F_{završ} = -Z_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \text{ali} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0 \quad \text{dakle} \quad Z_2 = 0$$

$$R_{12}(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}) = 1$$

$$R_{12}(\frac{\partial \psi}{\partial t}, F) = -1$$



POKUS

Pokazuje se na razapetoj opruzi s koje strane puls po opruzi ruši postavljenu kretu nakon što se reflektirao na a) čvrstom kraju b) slobodnom kraju.

Transmisija

U mediju 1 imamo titranje:

$$\psi_1(x, t) = \psi_1 \cos(kx - \omega t) + \psi_1 R_{12} \cos(kx + \omega t) \quad (11.17)$$

U mediju 2 je titranje

$$T_{12} \psi_1 \cos(k'x - \omega t) \quad (11.18)$$

Ako je točka spoja $x=0$ i ako pokratimo vremenske dijelove imamo temeljnu relaciju među transmisijskim i refleksijskim koeficijentom:

$$T=1+R \quad (11.19)$$

Savršeno usklađene impedancije

Iz gornjeg je jasno da pri prijelazu iz sredstva u sredstvo uvjet kontinuiranog transporta energije i impulsa putujućeg vala jest $R=0$ odnosno $T=1$ (ništa se ne reflektira; sve se transmitira). Jasno je da se fazna brzina pri tome smije mijenjati, ali ne i impedancija. Ako je impedancija ista u obadva sredstva, nema refleksija. Pri vođenju televizijskih signala od antene do prijemnika koristi tipično koaksijalni kabel s impedancijom od 70 ohma. Pri vođenju signala brze elektronike u (nuklearnim) pokusima standard je 50 ohma. Zaključni otpori na krajevima linija s kojih ne želimo refleksije imaju upravo te vrijednosti radi savršenog završavanja linije.

Uspostavljanje stojnih valova u mediju kojim signal dolazi:

Kako je opisano s (11.38) posljedica nailaska putujućeg vala je povrat reflektiranog vala (osim ako je $R=0$). Ako se (11.38) raspiše po adicijskom teoremu za kosinuse rezultat je:

$$\psi_1(x, t) = \psi_1(1 + R_{12}) \cos kx \cos \omega t + \psi_1(1 - R_{12}) \sin kx \sin \omega t \quad (11.20)$$

Znači, općenito je rezultat dva putujuća vala suprotnih smjerova titranje dva stojna vala. Koristeći mogućnost $R_{12} = 1$ vidimo također da se svaki stojni val može opisati kao superpoziciju dva putujuća vala koja putuju suprotnim smjerovima a imaju iste amplitude. Time dajemo i odgovor na problem postavljen prije: što se dešava ako načinimo deformaciju medija prema unaprijed zamišljenom modelu i iz stanja bez brzine dijelova medija ga oslobodimo. U suprotnim smjerovima će krenuti dva pulsa svaki s polovičnom amplitudom a s brzinom koju daje valna jednačba.

Akustičke refleksije

Uvodno možemo reći da su studenti iskusili u dnevnom životu refleksije akustičkih titranja kroz fenomen jeke; odziva na zvučni puls od velikih čvrstih površina. Kod fenomena groma ili eksplozije također se čije višestruke praske od jednog događaja zahvaljujući refleksijama s raznih površina. I u akustičkoj analizi možemo govoriti o dva medija. Signal dolazi medijem 1 a medij 2 je drukčije impedancije. Zanimljive su refleksije i ovdje na čvrstom i slobodnom kraju. I ovdje ćemo uzeti aktivno gledište i pratiti najprije pogonsku silu.

Pogonska je sila ovdje tlak za koji vrijedi:

$$\Delta p = -\gamma p_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = Z \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11.21)$$

Pogonska sila (tlak) na završetku medija 1 i početku medija 2 jest:

$$\Delta p_{završ.} = -Z_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11.22)$$

Ako je kraj medija čvrst i ne dopušta titranje lijeva strana (10.22) ne iščezava no vremenska derivacija je jednaka nuli. Očito je jedina mogućnost $Z_2 = \infty$, što nas prema (11.10) vodi na refleksijski koeficijent za amplitudu i brzinu micanja:

$$R_{\text{čvrsti kraj}} = -1 \quad (11.23)$$

Na slobodnom kraju lijeva strana (11.43) iščezava a vremenska derivacija s desne strane je različita od nule što povlači $Z_2 = 0$ i prema (11.33)

$$R_{\text{slobodni kraj}} = +1 \quad (11.24)$$

u potpunom slaganju s rezultatima za transverzalno titranje žice.

POKUS

Svirala proizvodi različite tonove ovisno o otvorenosti ili zatvorenosti kraja svirale.

Refleksije u električkim prijenosnim linijama

Neka prvom prijenosnom linijom dolaze napon i struja $U_1(x, t) = U_1 \cos(kx - \omega t)$ i

$I_1(x, t) = I_1 \cos(kx - \omega t)$ povezani s

$$U_1(x, t) = Z_1 I_1(x, t) \quad (11.25)$$

Za reflektirana titranja imamo $U_2(x, t) = R_{12}^U U_1 \cos(kx + \omega t)$ i $I_2(x, t) = R_{12}^I I_1 \cos(kx + \omega t)$ no sada je veza reflektiranih napona i struje drukčija:

$$U_2(x, t) = -Z_1 I_2(x, t) \quad (11.26)$$

Ovaj obrat u predznaku podržava intuicija: struja koja se reflektira proizvodi napon suprotnog predznaka od $U_1(x, t)$. Porijeklo ovog predznaka može se naći u već više puta spominjanoj relaciji:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix} \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} \begin{bmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

gdje su predznaci u (11.48) povezani sa smjerom kretanja vala označenog strelicama. Kao i u izvodu refleksije mehaničkih refleksijskih koeficijenata imamo u prvom mediju:

$$U = Z_1 I_1 - Z_1 I_2 \quad (11.28)$$

a u drugom:

$$U = Z_2 I_1 + Z_2 I_2 \quad (11.29)$$

Tako kombiniranjem relacija (11.49) i (11.50) imamo:

$$I_2(Z_1 + Z_2) = I_1(Z_1 - Z_2) \quad \text{to jest} \quad R_{12}^I = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (11.30)$$

S druge strane prema (11.47)

$$U_2 = -Z_1 I_2 = -Z_1 R_{12}^I I_1 = -R_{12}^I U_1 \quad (11.31)$$

dakle:

$$R_{12}^U = -R_{12}^I = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (11.32)$$

Refleksijski koeficijenti struje i napona su suprotnog predznaka.

Refleksijski koeficijent za električno polje je isti kao i za napon radi njihove proporcionalnosti.

Refleksijski koeficijent napona i polja ako se u električnoj transmisijskoj liniji promijeni ϵ_r . Za transmisijsku liniju smo izveli:

$$Z = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_{\text{vakuum}} = \frac{Z_{\text{vakuum}}}{n} \quad (11.33)$$

Posljednja jednakost je proširenje transmisivne linije na elektromagnetske fenomene u prozirnim medijima. Tako možemo izračunati transmisivni koeficijent električnog polja pri prijelazu među sredstvima različitog indeksa loma:

$$R_{12} = \frac{Z_0 \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right)}{Z_0 \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} \right)} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (11.34)$$

Ovaj odnos vrijedi i pri refleksiji svjetlosti

POKUS

Laserska zraka se reflektira sa stakla amplitudom određenom indeksima loma sredstava 1 i 2.

11.4 Prilagodba impedancija tankim međuslojem

Postoji više tehnika kojima se može izbjeći reflektiranje signala tijekom (neizbježnog) skoka u impedanciji. Jedna od tehnika se koristi na primjer u optici a postiže se Naparavanjem tankog sloja medija između medija impedancija Z_1 i Z_2 , koji sloj ima impedanciju Z_m . U pravilu numerička vrijednost impedancije naparenog sloja je između vrijednosti impedancija Z_1 i Z_2 . Ideja ovog postupka jest da se relativno mala, ali ipak postojeća refleksija na prijelazu 1-međusloj poništi valom koji negativno interferira s tim reflektiranim valom, a potječe od refleksije na kontaktu međusloj-2. Napišimo izraze za refleksivne koeficijente:

$$R_{1m} = \frac{Z_1 - Z_m}{Z_1 + Z_m} = \frac{1 - \frac{Z_m}{Z_1}}{1 + \frac{Z_m}{Z_1}} \quad (11.35)$$

$$R_{m2} = \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_m}}{1 + \frac{Z_2}{Z_m}} \quad (11.36)$$

Lako je ustanoviti : ako je numerička vrijednost impedancije umetka između impedancija sredstava 1 i 2, tada su koeficijenti R_{1m} i R_{m2} istog predznaka. Da bi se dva reflektirana vala poništila u području 1, potrebno je da ti valovi u sredstvu 1 negativno interferiraju s amplitudama iste jakosti. Proučimo što je rezultat ulaznog vala područja 1:

$$\psi_1^{ulaz} = \psi_1 \cos(kx - \omega t) \quad (11.37)$$

$$\psi_1^{refl} = R_{1m} \psi_1 \cos(kx + \omega t) \quad (11.38)$$

U gornjoj relaciji se pretpostavlja da je kontakt medija 1 i međusloja m u $x=0$ točki.

$$\psi_2^{refl} = T_{1m} R_{m2} T_{m1} \psi_1 \cos(kx + \omega t - 2k_m L) \quad (11.39)$$

Gornja relacija opisuje val koji je prodro iz 1 u m, reflektirao se na granici m i 2 te je ponovno prodro iz m u 1 ali sada sa suprotnim smjerom propagacije. U tom dvostrukom prolasku kroz medij m dobio je fazni dodatak $-2k_m L$, gdje je k_m valni broj u mediju m a L je debljina sloja naparenog medija m. Već smo prije uočili da je refleksivni koeficijent za kontakt zrak staklo relativno mali (0.2 na primjer). Tada je produkt transmisivnih faktora:

$$T_{1m} T_{m1} = (1 + R_{1m})(1 - R_{1m}) = 1 - R_{1m}^2 \approx 1 \quad (11.40)$$

Tako je zbroj reflektiranih valova u sredstvu 1, to jest zbroj (11.59) i (11.60) oblika:

$$\psi_1^{refl} + \psi_2^{refl} = R_{1m}\psi_1 \cos(kx + \omega t) + R_{m2}\psi_1 \cos(kx + \omega t - 2k_m L) \quad (11.41)$$

Da bi ta suma iščeznula trebaju faktori ispred kosinusa biti jednaki i faze kosinusa pomaknute za π . Tako se uvjet poništenja refleksije pomoću međusloja svodi na dva uvjeta :

$$2k_m L = \pi \rightarrow L = \lambda_m / 4 \quad (11.42)$$

Duljina međusloja je četvrtina valne duljine u sredstvu i uvjet: $R_{1m} = R_{m2}$, što se preko eksplicitne veze refleksijskih koeficijenata i impedancija svodi na:

$$Z_m = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (11.43)$$

Ovom se tehnikom koristi optička industrija. Naime u optičkim instrumentima ima mnogo kontakata zraka i stakla duž putanje optičkih zraka. Time se velikim brojem malih efekata smanjenja amplitude refleksijom može izgubiti dosta svjetlosnog intenziteta. Naparavanjem međuslojeva prave debljine i impedancije (indeksa loma) izračunane preko (11.43), ti se gubici sprečavaju. Možemo dodati da uz ovu tehniku postoje i tehnike koje variraju indeks loma kontinuirano no ovdje to nećemo detaljnije razrađivati.

11.5 Boje tankih slojeva / općenitije o refleksijama na tankim slojevima

Možemo započeti s demonstracijom boja vidljivih pri obasjavanju mjehura sapunice bijelom svjetlošću. Ovome slični efekti javljaju se na raznim mjestima poput Newtonovih kolobara, pri zračnom klinu i pri promatranju tankih listića. Pogledajmo što se dešava sa svjetlosnim valom koji pada okomito iz zraka (indeks loma je jedinica) na listić debljine d indeksa loma n_2 . Na kontaktu zraka i listića javlja se prva refleksija, a na izlaznom kontaktu listića i zraka je druga refleksija. Promatramo refleksijske koeficijente električkog polja koje smo odredili unutar ovog poglavlja :

$$R_{12}^E = \frac{1-n_2}{1+n_2}, \quad R_{21}^E = \frac{n_2-1}{n_2+1} = -R_{12} \quad (11.44)$$

Očito su dva vala u protufazi već samim aktom refleksije. Ako se sada debljina tankog listića poklopi s četvrtinom valne duljine svjetlosti, dva vala će biti u fazi (efekt pozitivne interferencije). Očito se ovakvi maksimumi pojavljuju u zavisnosti o valnoj duljini svjetlosti. Gledajući pod raznim kutovima tanki sloj, vidjet ćemo s raznih mjesta razne boje. Studenti su mogli opažati ovakve boje na vodi na kojoj plivaju tanki slojevi benzina ili nekog drugog sredstva sličnih svojstava.

Proračun rezultata interferencije za jednu frekvenciju svjetlosti

$$\psi_1^{refl} + \psi_2^{refl} = \psi_1 R_{12} [\cos(kx + \omega t) - \cos(kx + \omega t - 2k_2 L)] \quad (11.45)$$

Gornji izraz dobivamo uobičajenom superpozicijom reflektiranih valova koristeći aproksimaciju (11.60) odnos refleksijskih koeficijenata (11.65).

Preko relacije za razliku kosinusa imamo:

$$\psi_1^{refl} + \psi_2^{refl} = -2\psi_1 R_{12} \sin(kx + \omega t - k_2 L) \sin k_2 L \quad (11.46)$$

Tako omjer intenziteta reflektiranog i upadnog vala postaje:

$$\frac{\psi_{refl}^2}{\psi_1^2} = 4R_{12}^2 \sin^2 k_2 L \quad (11.47)$$

12. Moduliranje harmonijskih titranja

Do sada smo razmotrili kako putujući valovi nastaju, kako prolaze transmisijskim linijama i što se dešava kada u svojem širenju naiđu na promjenu svojstava medija. Međutim, u samom harmonijskom titranju nema bitnog sadržaja: u obliku oscilacija pronosi se (periodički, ako se usrednji po periodu tada i ravnomjerno) energija. Ako, međutim, amplituda tog titranja varira, tada šaljemo poruke. Takav način rada koriste na primjer radiostanice, TV odašiljači, radarski sustavi a u najnovije vrijeme stvaraoci kratkotrajnih pulsova (femtosekundna tehnika). Najjednostavniji oblik moduliranja već smo sreli kod fenomena udara pri superponiranju dva titranja bliskih frekvencija kada intenzitet titranja pulsira razlikom njihovih frekvencija. U ovom poglavlju ćemo razmotriti potankosti fenomena koji nastaju superpozicijom većeg broja, a ponekad i kontinuuma doprinosa raznih frekvencija rezultantnom titranju.

12.1 Fazna i grupna brzina na primjeru dva harmonijska titranja:

POKUS

Demonstriranje akustičkih udara

Započinjemo s medijem na čijem početku imamo dvije pogonske sile koje titraju s različitim frekvencijama, ali istim amplitudama. Odmah u izvoru imamo tipičnu situaciju udara:

$$\psi(0, t) = \psi(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2\psi \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (12.1)$$

Drugi kosinus titra usrednjenom, frekvencijom. U komunikacijskom žargonu taj se dio naziva valom nosiocem. Sve ostalo predstavlja modulacijski faktor.

$$\psi(0, t) = \psi_{\text{mod}}(t) \cos \omega_{\text{srednje}} t \quad (12.2)$$

Nas zanima općeniti slučaj u kojem titranja različitim frekvencijama imaju preko disperzijske relacije različitu brzinu širenja pojedinih frekvencija. Već znamo analitički opis putujućeg vala, na primjer, (9.2) i vezu fazne brzine pojedine komponente s kružnom frekvencijom i valnim brojem (9.3) i to možemo kombinirati da bismo dobili njihov zajednički rezultat na koordinati x :

$$\psi(x, t) = \psi \left[\cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{v_1} x\right) + \cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2}{v_2} x\right) \right] \quad (12.3)$$

U gornjoj relaciji načinili smo inverziju poretka vremenskog i prostornog dijela argumenta (dozvoljeno radi parnosti kosinusa) kako bismo naglasili da u točki x iz izvora dolaze titranja dviju komponenti s dvije RAZLIČITE faze. Vratit ćemo se na uobičajenu notaciju prostornog dijela opisanu s valnim brojevima i napisati relaciju ekvivalentnu (12.1) proširenu prostornim dijelom:

$$\psi(x,t) = 2\psi \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right] \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right] \quad (12.4)$$

Radi lakšeg razumijevanja sadržaja (12.4) napisat ćemo je pomoću pokrata koje je lako odgonetnuti usporedbom (12.4) i (12.4a):

$$\psi(x,t) = 2\psi \cos(\omega_{\text{mod}}t - k_{\text{mod}}x) \cos(\omega_{\text{srednje}}t - k_{\text{srednje}}x) \quad (12.4a)$$

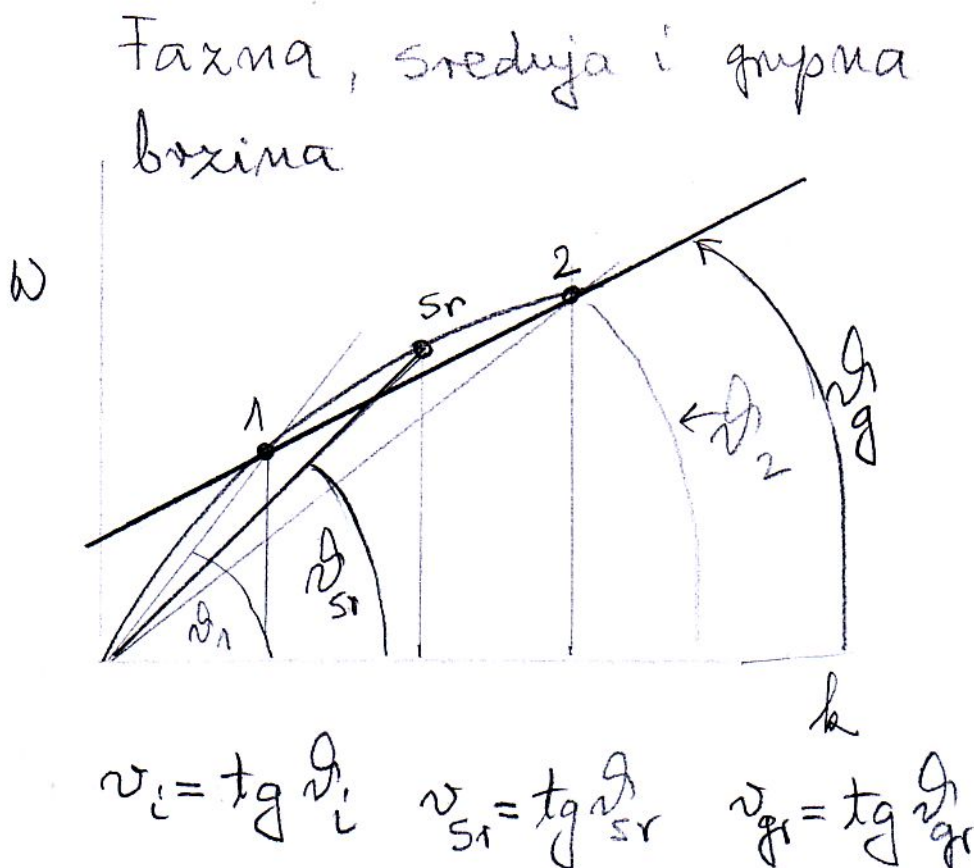
Iz (12.4a) je očito da se medijem širi val nosač koji brzo titra usrednjenom frekvencijom i usrednjenim valnim brojem a njihov omjer predstavlja brzinu širenja brzih oscilacija.

$$v_{\text{srednje}} = \frac{\omega_{\text{srednje}}}{k_{\text{srednje}}} \quad (12.5)$$

Poruka, moduliranje vala nosača putuje međutim drugom brzinom, koju se naziva grupnom brzinom:

$$v_{\text{grupno}} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (12.6)$$

Bitnu razliku fazne i grupne brzine može se uvidjeti s grafičkog prikaza u kojem je nacrtana tipična disperzijska krivulja s prikazom fazne i grupne brzine načinjenog prema izrazima (12.6), (12.5), (12.4a) i (12.4).



Ovdje je vrlo bitno uočiti da poruka (a ne stalno harmonijsko titranje) stiže grupnom brzinom. Nemamo spoznaje da bi grupna brzina širenja bilo koje poruke ili titranja prelazila brzinu svjetlosti u vakuumu: c !

12.2 Amplitudna modulacija

Amplitudna modulacija je najjednostavniji oblik modulacije; kako takozvano AM područje radiostanica funkcionira na tom temelju nastojat ćemo objasniti temelje rada. Pri biranju koju stanicu slušamo, mi variramo rezonantnu frekvenciju radioprijemnika na kojoj on prima signal t.j. val nosač. U AM tehnici taj val nosač se sada amplitudno modulira. Na primjer kod prijenosa zvuka glazbala ili govornika, zavisno o akustičkom nadtlaku preko mikrofona (kao transducera-pretvarača) pojačava se ili oslabljuje amplituda vala nosača. Tako nastalo titranje emitira se preko antene u prostor. Radi stjecanja intuicije izabiremo nedisperzivni primjer, znači situaciju u kojoj su fazna i grupna brzina jednake, pa je signal slušaoca identičan onom emitiranom. To jest situacija s AM frekventnim područjem. Pretpostavimo tom slučaju da pozitivno definitna funkcija vremena $A(x-ct)$ modulira uobičajeni val nosač valnog broja k_0 i kružne frekvencije ω_0 . Rezultantno titranje ima oblik:

$$\psi(x,t) = A(x-ct)\cos(k_0x - \omega_0t) \quad (12.7)$$

U slučaju AM valova stanje titranja u izvoru prenosi se brzinom c , bez deformacija koje ćemo sresti kod disperzivnih sredstava, kroz prostor brzinom svjetlosti. Stoga je dovoljno promatrati samo rezultat modulacije u izvoru. Pogledajmo rezultat dobiven najjednostavnijom modulacijom vala nosača modulacijskom frekvencijom ω_m amplitudom koja je manja i maksimalno jednaka osnovnoj amplitudi opisanoj upravo relativnim odnosom dviju amplituda: m

$$A'(t) = A_0(1 + m \sin \omega_m t) \quad (12.8)$$

Očito je u gornjem primjeru $A'(t)$ pozitivno definitna funkcija. Baš m može biti vremenski zavisna i određen na primjer strujom proizvedenom u mikrofONU.

Rezultat te modulacije jest:

$$\psi(t) = A'(t)\cos \omega_0 t = A_0 \left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m \sin(\omega_0 + \omega_m)t - \frac{1}{2} m \sin(\omega_0 - \omega_m)t \right] \quad (12.9)$$

Vidimo da je ukupno titranje razdijeljeno u tri harmonijska titranja frekvencija $\omega_0, \omega_0 + \omega_m, \omega_0 - \omega_m$. Titranja imaju centralnu frekvenciju i dvije bočne frekvencije. Val nosač ima temeljnu amplitudu a bočna titranja imaju amplitude reducirane faktorom $\frac{1}{2}m$. S

druge strane možemo s pojasom frekvencija ω_m pokriti najvažniji dio spektra ljudskog sluha (znači otprilike 10-20 kHz) da bi se u modulaciju vala nosača svaka akustična frekvencija ω_m utiskivala svojom trenutnom amplitudom. To područje frekvencija uz val nosač zove se bočnim pojasom. Tijekom stvarnog emitiranja glazbe ili govora modulirajući faktor (12.8) ima, dakle, mnogo kompleksniji i vremenski ovisan sastav i možemo ga kao primjer predstaviti Fourierovim redom u jednom trenutku čiji dijapazon frekvencija ide od jedne bočne frekvencije do vala nosača. (Očigledno je da se frekvencije emisije ne mogu proizvoljno odabirati; pozicije emitiranja stanica i njima dozvoljenih pojasa reguliraju se planetarno dogovorenim sustavom.) Da bi studenti imali osjećaj o širinama bočnih pojasa, ukupna širina između ω_{\max} i ω_{\min} je 10 kHz. To znači da je zapravo vjerno transmitirano područje od 5 kHz.

12.3 Frekventna i fazna modulacija

Tehnički detalji ovih metoda neće se ovdje razrađivati; fazna modulacija na primjer uvodi u pomoć unutar Fourierove analize i Besselove funkcije. Dat ćemo samo slijedeće ideje: pri frekventnoj modulaciji modulacijska se amplituda ne „utiskuje“ u val nosač kao varijacija faze nego kao odstupanje od frekvencije vala nosača. Kod fazne modulacije modulacijska amplituda ulazi u varijaciju trenutne faze vala nosača. Neočekivano, frekventna modulacija (FM) i fazna modulacija su dosta bliske

12.4 Multipleksno komuniciranje

Često postoji potreba prenošenja mnogo kanala komunikacije istovremeno. U staro doba transoceanski kablovi za prijenos telefonskih razgovora ovaj su problem rješavali paralelnom transmisijom kroz različite žice kompleksnog kabla. Druga je mogućnost da postoji jedan val nosilac s mnogo modulirajućih frekvencija ω_i svaka sa svojim bočnim pojasom $\Delta\omega_i$ s tim da se svi navedeni pojasevi ne preklapaju. Tako se jednim medijem, na primjer jednim optičkim vlaknom, može pronesiti mnoštvo paralelnih komunikacijskih linija.

12.5 Intuitivna priprema za razumijevanje nastanka pulsova.

Pod pulsom podrazumijevamo signal vrlo ograničen u trajanju. Pulsovi se izgrađuju superponiranjem titranja različitih frekvencija na način koji ćemo ovdje nastojati intuitivno približiti. Pođimo od najjednostavnije situacije superponiranja dvaju valova bliskih frekvencija ω_1 i ω_2 i iste amplitude za koje znamo da rezultiraju u fenomenu udara. Fenomen udara se može smatrati modelom stvaranja pulsa jer se u titranju u trenutku maksimuma modulirajuće amplitude taj trenutni fenomen može opisati i kao najjednostavniji oblik pulsa. No pravi pulsovi nastaju superpozicijom mnogo frekvencija. Kroz slike ćemo prolaziti superpoziciju dva, a zatim više valova kako bismo stvaranje pulsa približili intuiciji.

Vremensko ponašanje :

$$\psi(t) = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \quad (12.10)$$

možemo grafički reprezentirati kao projekciju dva vektora modula A koji različitim brzinama kruže oko ishodišta. No izvanredno je poučno promatrati ponašanje tih vektora u sustavu koji ROTIRA srednjom kružnom frekvencijom. U njemu (pretpostavimo $\omega_1 < \omega_2$) prvi vektor rotira u negativnom smjeru s kružnom frekvencijom koja je polovica razlike srednje frekvencije i njegove frekvencije. Drugi vektor rotira pozitivnim smjerom isto kružnom frekvencijom. Rezultanta njihovog zbroja je duž osi x i oscilira sukladno modulirajućem faktoru iz (12.2) i (12.1). Sada imamo izvrsnu grafičku predodžbu kako nastaje modulirajući faktor u najjednostavnijem slučaju. Rezultantni vektor titra između vrijednosti 2A i -2A s kružnom frekvencijom $(\omega_2 - \omega_1)/2$. Poopćimo ovu sliku na situaciju u kojoj je šest frekventnih komponenti koje se međusobno razlikuju za stalni iznos $\Delta\omega$. Imamo znači frekvencije

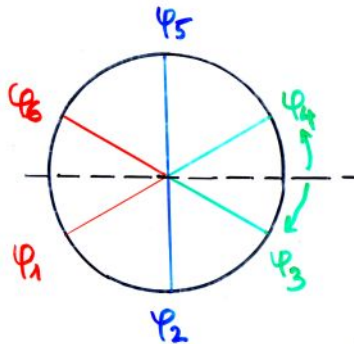
$$\omega_1 = \omega_{sr} - 2.5\Delta\omega, \omega_2 = \omega_{sr} - 1.5\Delta\omega, \omega_3 = \omega_{sr} - 0.5\Delta\omega, \omega_4 = \omega_{sr} + 0.5\Delta\omega, \omega_5 = \omega_{sr} + 1.5\Delta\omega, \omega_6 = \omega_{sr} + 2.5\Delta\omega$$
 koje sve titraju amplitudom A.

Ako ponovno pogledamo prikaz svih šest vektora koji rotiraju navedenim frekvencijama u sustavu koji rotira srednjom frekvencijom vidimo njihov rasap po kutovima stvoren razlikama u frekvenciji. Njihova početna rezultanta je 6A i nakon vremena:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{6\Delta\omega} = \frac{\pi}{3\Delta\omega} \quad (12.11)$$

vektori će biti jednoliko raspoređeni po kružnici. To je prva nultočka modulacije.

$$t_1 = \frac{\pi}{3\Delta\omega}$$



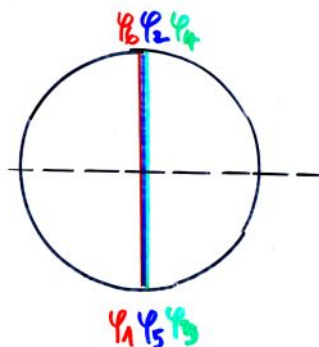
$$\varphi_1(t_1) = -\frac{5}{2}\Delta\omega t_1 = -\frac{5}{2}\Delta\omega \frac{\pi}{3\Delta\omega} = -\frac{5\pi}{6} = -\varphi_6$$

$$\varphi_2(t_1) = -\frac{3}{2}\Delta\omega t_1 = -\frac{3}{2}\Delta\omega \frac{\pi}{3\Delta\omega} = -\frac{\pi}{2} = -\varphi_5$$

$$\varphi_3(t_1) = -\frac{1}{2}\Delta\omega t_1 = -\frac{1}{2}\Delta\omega \frac{\pi}{3\Delta\omega} = -\frac{\pi}{6} = -\varphi_4$$

Sa slike očitno: modul resultantnog vektora u $t_1 = \frac{\pi}{3\Delta\omega}$ iščezava

$$t_2 = \frac{\pi}{\Delta\omega}$$



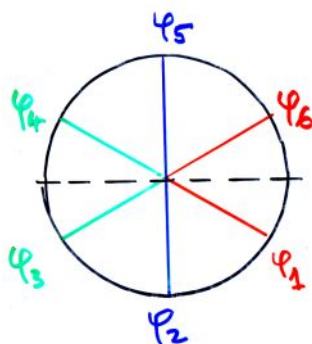
$$\varphi_1(t_2) = -\frac{5}{2}\Delta\omega t_2 = -\frac{5}{2}\Delta\omega \frac{\pi}{\Delta\omega} = -\frac{5\pi}{2} = -\varphi_6$$

$$\varphi_2(t_2) = -\frac{3}{2}\Delta\omega t_2 = -\frac{3}{2}\Delta\omega \frac{\pi}{\Delta\omega} = -\frac{3\pi}{2} = -\varphi_5$$

$$\varphi_3(t_2) = -\frac{1}{2}\Delta\omega t_2 = -\frac{1}{2}\Delta\omega \frac{\pi}{\Delta\omega} = -\frac{\pi}{2} = -\varphi_4$$

S očitno je očitno modul resultantnog vektora u $t_2 = \frac{\pi}{\Delta\omega} = 0$

$$t_3 = \frac{5\pi}{3\Delta\omega}$$



$$\varphi_1(t_3) = -\frac{5}{2}\Delta\omega t_3 = -\frac{5}{2}\Delta\omega \frac{5\pi}{3\Delta\omega} = -\frac{25\pi}{6} = -\varphi_6$$

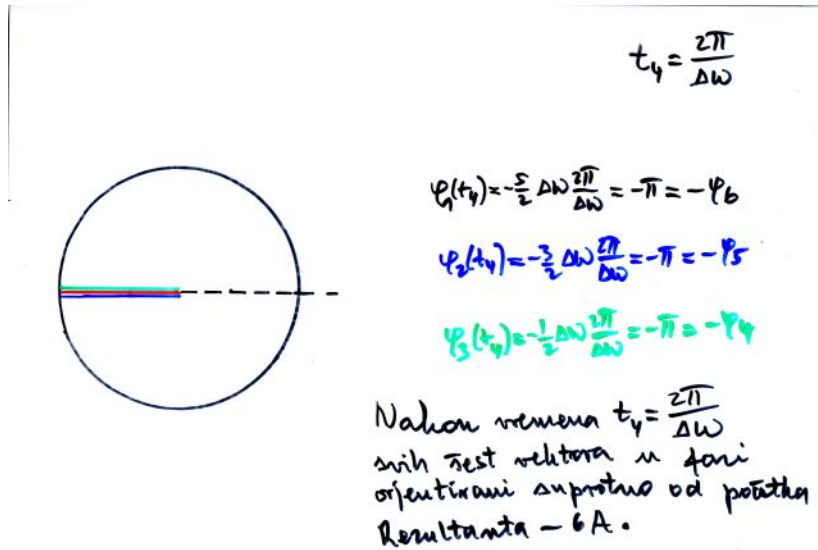
$$\varphi_2(t_3) = -\frac{3}{2}\Delta\omega t_3 = -\frac{3}{2}\Delta\omega \frac{5\pi}{3\Delta\omega} = -\frac{5\pi}{2} = -\varphi_5$$

$$\varphi_3(t_3) = -\frac{1}{2}\Delta\omega t_3 = -\frac{1}{2}\Delta\omega \frac{5\pi}{3\Delta\omega} = -\frac{5\pi}{6} = -\varphi_4$$

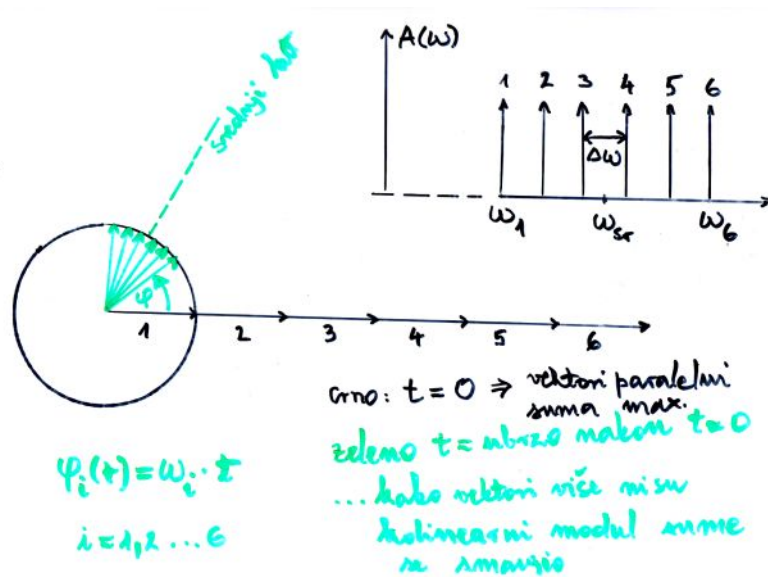
Modul resultantnog vektora u $t_3 = \frac{5\pi}{3\Delta\omega}$ iščezava

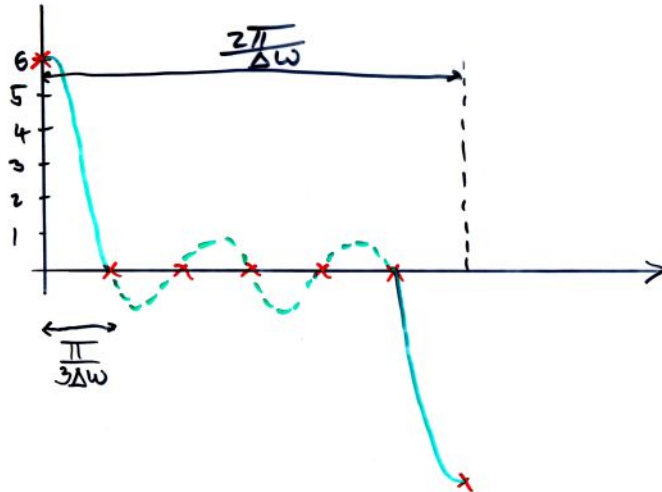
Crtežima se može ilustrirati da se nultočke dobivaju za još četiri višekratnika od (12.11). No nakon vremena:

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (12.11a)$$



svi vektori u rotirajućem sustavu imaju istu fazu: $\pm\pi$, tako da je rezultanta $-6A$. Između nultočaka se javljaju i maksimumi koji su relativno mali radi negativnih interferencijskih efekata. Ovdje je vrijedno razumjeti da je veza vremena Δt koje protječe od maksimuma modulacijske amplitude do njenog pada na nultu vrijednost vezano za veličinu intervala u kojem se kreću frekvencije članova ove superpozicije (12.11).

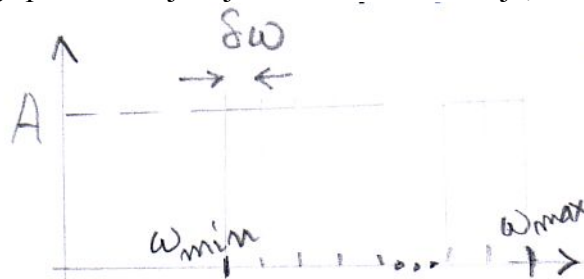




Studenti mogu sami računati vremensko ponašanje superpozicije navedenog oblika i uočiti da se za razliku od fenomena udara sada javljaju mnogo istaknutiji vrhovi. Modulacijski faktor izvan glavnih vrhova i dalje titra, ali s mnogo manjim amplitudama. (Naravno ne treba zaboraviti da još uvijek postoje (unutar anvelope modulacijskog titranja) i titranja srednjom vrijednošću kružne frekvencije.)

12.6 Proračun oblika pulsa proizvedenog češljastim frekventnim spektrom

Polazimo od frekventnog spektra u kojem je N kosinusnih titranja; svako od njih pomaknuto u



frekvenciji za $\delta\omega$ razmak među frekvencijama, koji je razmak povezan s ukupnom širinom spektra:

$$\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{\min} \quad (12.12)$$

Relacijom:

$$\Delta\omega = (N-1)\delta\omega \approx N\delta\omega \quad (12.13)$$

Sumiranje kosinusnih titranja najlakše je izvesti u kompleksnom području i zatim rezultat vratiti u realno područje:

$$\psi(t) = A[\cos \omega_{\min} t + \cos(\omega_{\min} + \delta\omega)t + \cos(\omega_{\min} + 2\delta\omega)t + \dots + \cos(\omega_{\min} + (N-1)\delta\omega)t] \quad (12.14)$$

$$\psi(t) = A \operatorname{Re} [e^{i\omega t} + e^{i(\omega+\delta\omega)t} + e^{i(\omega+2\delta\omega)t} + \dots + e^{i(\omega+(N-1)\delta\omega)t}] \quad (12.15)$$

U gornjem izrazu smo u iz grafičkih razloga ispustili indeks min uz kružnu frekvenciju. Kako (12.15) predstavlja geometrijski red možemo ga zbrojiti prema pravilima sume takvog reda:

$$\psi(t) = A \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \frac{e^{iN\delta\omega t} - 1}{e^{i\delta\omega t} - 1} \right] = A \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \frac{e^{iN\delta\omega t/2}}{e^{i\delta\omega t/2}} \frac{e^{iN\delta\omega t/2} - e^{-iN\delta\omega t/2}}{e^{i\delta\omega t/2} - e^{-i\delta\omega t/2}} \right] \text{ i u nastavku}$$

$$\psi(t) = A \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega + (N-1)\delta\omega t/2)} \frac{2i \sin(N\delta\omega t/2)}{2i \sin(\delta\omega t/2)} \right] = A \frac{\sin(N\delta\omega t/2)}{\sin(\delta\omega t/2)} \cos(\omega_{srednje} t) \quad (12.16)$$

Naravno $\omega_{srednje}$ je srednja vrijednost kružne frekvencije u intervalu $\Delta\omega$. Fizikalni sadržaj rezultata (12.16) jest modulirano titranje ; „val nosač“ titra frekvencijom $\omega_{srednje}$, a njegovo titranje je modulirano faktorom razlomka. Taj pak faktor ima vrlo naglašena povećanja na mjestima gdje argument sinusa u nazivniku poprima vrijednost nula. Jasno je da vrijedi za period ponavljanja tog maksimuma, T_{\max} :

$$T_{\max} \delta\omega / 2 = \pi \quad \text{ili} \quad T_{\max} = \frac{2\pi}{\delta\omega} \quad (12.17)$$

Uz ove glavne maksimume postoje i mnogo manji modulacijski maksimumi od titranja brojnika od kojih je prvi vremenu odmaknut od glavnog maksimuma Δt :

$$\frac{N\delta\omega\Delta t}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{to jest} \quad \Delta t = \frac{\pi}{\delta\omega N} \quad (12.18)$$

Unutar te ovojnice nalaze se još sićušni titraji načinjeni srednjom frekvencijom titranja. Možemo još spomenuti da je ovaj formalizam temelj za proizvodnju vrlo uskih vremenskih pulsova; ti su pulsovi sada ušli u femtosekundno područje.

S druge strane, isti formalizam se upotrebljava za opis prostorne raspodjele zračenja emitiranog s difrakcijske rešetke. Geometrijski red koji nastaje superpozicijom valova jednakih sukcesivnih pomaka u fazi zbraja se upravo navedenim postupkom.

12.7 Proračun oblika pulsa proizvedenog pravokutnim frekvencijskim spektrom

Jasno je da taj problem možemo praktički rješavati prijelazom gornjeg formalizma u limes s $N \rightarrow \infty$.

Promotrimo vrijednost amplitude titranja u trenutku $t=0$

$$\psi(0) = NA \quad (12.19)$$

Time je prije odlaska u limes s beskonačnim brojem frekvencija:

$$\psi(t) = \frac{\psi(0)}{N} \frac{\sin(N\delta\omega t/2)}{\sin(\delta\omega t/2)} \cos \omega_{sr} t \quad (12.20)$$

Kako $\delta\omega \rightarrow 0$ to se za male vrijednosti argumenta sinusa u nazivniku može znak sinusa ispustiti i argumentu pridodati faktor N. Time gornji izraz prelazi u:

$$\psi(t) = \psi(0) \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)}{\frac{\Delta\omega t}{2}} \cos \omega_{sr} t \quad (12.21)$$

gdje smo iskoristili relaciju (12.13) koja povezuje razmake među frekvencijama sa ukupnom širinom frekventnog pojasa.

Ovaj se rezultat jednostavno dobiva i preko metode Fourierovog integrala i student ga može načiniti kada i postupak Fourierovog integrala prođemo.

12.8 Valni paket i dinamika njegovog širenja

Ako smo u izvoru emitirali pravokutni spektar frekvencija, vidimo da je rezultat puls oblika (12.21). Postavlja se međutim pitanje što se dalje dešava s takvim pulsom tijekom njegove propagacije duž medija. Puls može biti i nekog drugog oblika. Jedan intuiciji bliski model jest valni paket u kojem je izvor emitirao jednu frekvenciju konačan vremenski interval. No bez obzira o kojem se modelu paketa radi, pitanje je što se dalje s njim dešava. Pri studiju grupne brzine smo zaključili da se grupa valova širi grupnom brzinom koja je dana preko (12.6)

$$v_{\text{grupno}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Ukoliko se radi o nedisperzivnom sredstvu, to jest ako je veza kružne frekvencije i valnog broja linearna to koincidira s faznom brzinom; posljedica za valni paket je još dramatičnija. Kako sve frekvencije putuju istom brzinom, isti valni paket se bez promjena oblika širi medijem. Njegova je pak prostorna duljina jednostavna za izračunati. Označimo s Δx put koji početak vala prođe dok se ne završi emitiranje valnog paketa u izvoru. Trajanje emisije je Δt . Jasno je da je pređeni put:

$$\Delta x_0 = v_{\text{grupno}} \Delta t = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Delta t \quad (12.22)$$

Odatle dalje slijedi:

$$\Delta x \Delta k = \Delta\omega \Delta t = 2\pi \quad (12.23)$$

Druga jednakost u (12.23) je očitana iz (12.18) kao veza između trajanja glavnog maksimuma i širine spektra kojim je kreirana. Pred nama je izvor jedne od najvažnijih relacija u kvantnoj fizici. Tamo se položaj čestice identificira s područjem u kojem postoji jako titranje valnog paketa koji česticu reprezentira (u ovom slučaju to je Δx). S druge strane Δk je direktno proporcionalan s neodređenošću impulsa čestice Δp . Tako prvi i treći dio (12.23) jesu relacije neodređenosti koordinate i impulsa. Kako su u kvantnoj fizici energija i frekvencija proporcionalne imamo i relacije neodređenosti energijska širina zračenja s vremenom emitiranja zračenja kroz vez drugog i trećeg dijela (12.23).

Gornja je diskusija za valove općenito ograničena na medije bez disperzije. No u principu smo vidjeli da postoje situacije u kojima postoji kompliciraniji odnos ω i k nego što je proporcionalnost. U tom slučaju postoji i pojas grupnih brzina:

$$\Delta v_g = \frac{dv_g}{dk} \Delta k = \frac{d^2\omega}{dk^2} \Delta k \quad (12.24)$$

Radi širine grupne brzine proširuje se i valni paket koji je u vrijeme $t = 0$ imao dimenziju Δx_0 (12.22).

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 + (\Delta v_g)t \quad (12.25)$$

12.9 Prikaz funkcije pomoću Fourierovog integrala

U modulacijskim razmatranjima vrlo snažan alat dobivamo upotrebom Fourierovog integrala. Fourierov integral se razlikuje od reda kako mu ime kaže: umjesto sumiranja po indeksu vrši se integriranje po kontinuiranoj varijabli. Ponovimo izraze Fourierovog reda za opis vremenske funkcije $F(t)$ zadane na intervalu t_0 do $t_0 + T_1$ čija je osnovna frekvencija time zadana kao $\omega_1 = 2\pi/T_1$

$$F(t) = B_0 + \sum_1^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t) + \sum_1^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t) \quad (12.26)$$

S time da vrijede:

$$B_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t) dt \quad B_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (12.27)$$

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} F(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (12.28)$$

Ići ćemo na limes u kojem vremenski interval prikaza $T_1 \rightarrow \infty$. Ako je impuls ograničenog trajanja i ne penje se u beskonačne vrijednosti, očito u tom limesu B_0 postaje jednak nuli.

Vrijednost ω_1 u limesu postaje sve manja, no s velikim vrijednostima indeksa n to se može kompenzirati tako da se definiira gotovo kontinuirana varijabla :

$$\omega = n\omega_1 \quad \text{i njen prirast} \quad \delta\omega = \omega_1 \delta n \quad \text{to jest} \quad \delta n = \delta\omega / \omega_1 \quad (12.29)$$

Uz ove napomene prikaz funkcije F postaje:

$$F(t) = \sum [A_n \sin(n\omega_1 t) + B_n \cos(n\omega_1 t)] \delta n \quad (12.30)$$

$$F(t) = \sum [\frac{A_n}{\omega_1} \sin(n\omega_1 t) + \frac{B_n}{\omega_1} \cos(n\omega_1 t)] \delta\omega \quad (12.31)$$

Na kraju procedure limesa omjeri malih veličina uz sinus i kosinus se zovu novim imenima:

$$F(t) = \int_0^\infty [A(\omega) \sin(\omega t) + B(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \quad (12.32)$$

U istom limesu je očito

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega_1} \frac{2}{T_1} \int_{-\infty}^\infty F(t) \sin \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty F(t) \sin \omega t dt$$

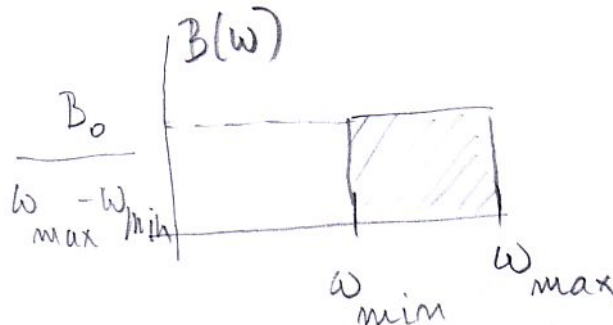
$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty F(t) \cos \omega t dt$$

Prikazi preko Fourierovog integrala će biti korišteni pri upotrebi kontinuiranih spektara bilo frekvencijskih bilo vremenskih!

12.10 Proračun rezultata aktivnosti pravokutnog frekvencijskog spektra Fourierovim integralom

Na djelu je emisija pravokutnog frekvencijskog spektra oblika:

$$B(\omega) = \frac{B_0}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \quad \text{za} \quad \omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$$



Izvan tog intervala $B(\omega) = 0$. $A(\omega) = 0$ svugdje. Možemo prići smjesta konstrukciji resultantnog vremenskog pulsa upotrebom (12.32) :

$$\psi(t) = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{B_0}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \cos \omega t d\omega \quad (12.33)$$

Nakon što podintegralni izraz proširimo faktorom t (brojnik i nazivnik), lako možemo integrirati funkciju kosinusa i uvrstiti vrijednosti primitivne funkcije na krajevima područja integracije:

$$\psi(t) = \frac{B_0}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \frac{\sin \omega_{\max} t - \sin \omega_{\min} t}{t} = B_0 \frac{\sin \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2} t}{\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2} t} \cos \omega_{srednje} t \quad (12.34)$$

Ako student ovaj rezultat usporedi s (12.21) jasno je da (osim drukčije notacije) ovo predstavlja isto rješenje istog problema. Također je jasno s koliko manje računskog napora je ovo izvedeno!

12.11 Proračun frekventnog spektra za vremenski pravokutan puls Fourierovim integralom

Ako vremenski pravokutni spektar postavimo simetrično obzirom na vremensku nulu imamo dvije računalne prednosti. Uvrštenjem tako smještenog spektra u (12.34) dobivamo da je ovisnost funkcije A o kružnoj frekvenciji jednaka nuli, jer u (12.34) trebamo provesti integral antisimetrične funkcije po simetrično postavljenom intervalu, što mora dati nulu za sve kružne frekvencije! S druge strane za puls opisan u vremenu kao :

$$\psi(t) = \frac{B_0}{\Delta t} \quad \text{za } -\Delta t < t < \Delta t$$

a izvan toga jednak nuli imamo za spektralnu funkciju B :

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{B_0}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \frac{B_0}{\Delta t} \frac{1}{\omega} \left[\sin\left(\frac{\Delta \omega t}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\Delta \omega t}{2}\right) \right] = \frac{B_0}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\Delta t}{2} \omega\right)}{\left(\frac{\Delta t}{2} \omega\right)} \quad (12.35)$$

Ako usporedimo (12.34) i (12.35) vidimo i drugu prednost našeg izbora vremenskog pulsa simetričnog s obzirom na vremensko ishodište. U rezultatu je samo modulacijska obujmica (anvelopa), dok faktora sitnog titranja funkcije B nema, jer je taj titrajući faktor izbjegnuto smještajući srednje vrijeme vremenskog pulsa u nulu!!! Iz ovog egzaktnog rezultata još se bolje vidi klasična relacija neodređenosti. Vrijeme trajanja pulsa je Δt , a njegovu frekventnu širinu možemo procijeniti iz (12.35). Naime frekventna širina ide od nule do prve nultočke (12.35) a ona nastupa na mjestu:

$$\frac{\Delta t \Delta \omega}{2} = \pi \quad \text{što povlači} \quad \Delta t \Delta \omega = 2\pi \quad (12.36)$$

zaključak kojeg smo već dobili u (12.11) i (12.18).

Berkeleyški udžbenik na ovom mjestu nudi zanimljivu ilustraciju mjerenja vremenskog trajanja pljeska ruku. Otvorimo poklopac glasovira tako da će proizvedeni pljesak imati maksimalni ulaz u glasovirski rezonator. Pritisnimo papučicu glasovira koja oslobađa žice od dijelova koji svojim mekim poklapanjem prigušuje titranje žica. Snažno pljesnimo. Ustanovimo koji područje žica (dijapazon) je uzbuđeno u titranje. (Može se ustanoviti opipom). Upotrebom (12.36) možemo u pogodnim vremenskim intervalima tako određivati trajanje puls u vremenu. Student može vježbati ustanoviti koliko je ova metoda dobra za gitaru ili tamburu!

POKUS

12.12 Analiza putujućeg valnog paketa uz pomoć metode Fourierovog integrala

Neka je izvor valnog paketa smješten u ishodištu ($x=0$) zatitrao na način opisan svojim spektralnim komponentama A i B na način opisan Fourierovim integralom:

$$\psi(0,t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin(\omega t) + B(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \quad (12.37)$$

Ako pretpostavimo sistem s disperzijom to jest situaciju da fazna brzina nije stalna,

$$v = \frac{\omega}{k} \neq \text{konstanta} \quad (12.38)$$

u položaju x u kasnijem vremenu t' različite frekvencijske komponente daju svoje doprinose čije su težine u izvoru bile određene faktorima $A(\omega)$ i $B(\omega)$ u različitim vremenima

$$t' = t - \frac{x}{v(\omega)} \quad (12.39)$$

Time u točki x u prikazu (12.37) treba voditi računa da tamo titranje nije jednostavna prostorna translacija izvornog titranja; sada na mjestu vremenske varijable t treba uvrstiti t' dan s (12.39), pa je konačan rezultat

$$\psi(x,t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin(\omega t - k(\omega)x) + B(\omega) \cos(\omega t - k(\omega)x)] d\omega \quad (12.40)$$

čime je izvorni puls promijenjen!!! Valni se oblik mijenja kako puls putuje sustavom. Potpuno je drugi zaključak za nedisperzivni sustav. Tamo radi proporcionalnosti u analogonu omjera iz (12.38) vremensko prostorni opis sustava postignut identičnim koracima u analizi ima oblik:

$$\psi(x,t) = \int_0^{\infty} \left[A(\omega) \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + B(\omega) \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] d\omega \quad (12.41)$$

što nije ništa drugo nego brzinom v (konstanta za sve frekvencije) translirano originalno titranje izvora opisano s (12.37).

12.13 Kako iz poznatih rješenja valne jednadžbe rekonstruirati valnu jednadžbu?

Pretpostavimo da nam je dan analitički oblik rješenja valne jednadžbe:

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - k(\omega)x) \quad (12.42)$$

Dvostrukim parcijalnim deriviranjem po t i x varijablama nalazimo:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{[k(\omega)]^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (12.43)$$

Nedisperzivne sustave karakterizira konstantnost omjera $\omega/k = v$ u (12.43) pa je opće rješenje u tom slučaju: oblika $f(x - vt) + g(x + vt)$ gdje su f i g proizvoljne funkcije.

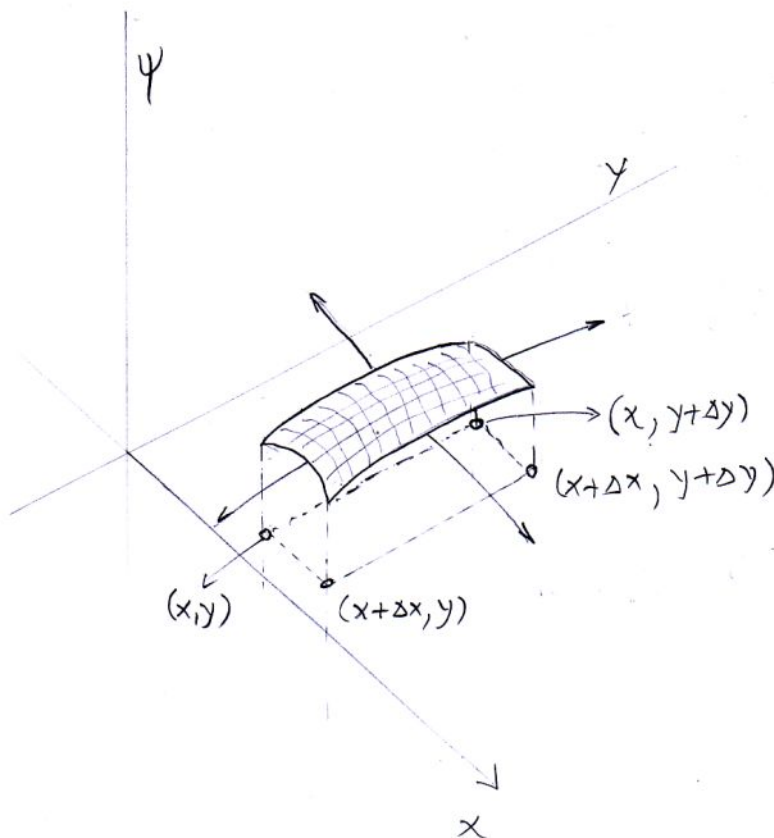
13. Valovi u dvije dimenzije

Radi postepenog razvoja intuicije posebno za ravne valove, poopćit ćemo naša razmatranja titranja jednodimenzionalnog medija na dvije dimenzije. Umjesto tanke napregnute žice razmatrat ćemo tanku membranu bez utjecaja gravitacije i bez utjecaja okolnog zraka.

13.1 Valna jednadžba za titranje membrane

Polazimo od membrane u kojoj postoji površinska napetost f_0 . (Ponovi pojam površinske napetosti iz prvog semestra kao sile koja djeluje na jedinicu širine sloja). Membrana je u položaju ravnoteže dio ravnine x-y. Odstupanje točke membrane na koordinatama x i y od tog položaja ravnoteže označavamo s $\psi(x, y, t)$ gdje je t vremenska varijabla. Napetost postoji i u smjerovima x i y. Promatrajmo element membrane površine $\Delta x \Delta y$ smješten između koordinata x i $x + \Delta x$ te y i $y + \Delta y$. Sile koje zatežu membranu su: u y smjeru $f_0 \Delta x$ a u smjeru x to je $f_0 \Delta y$. Ako smo površinu pomakli iz ravnoteže kako je opisano s $\psi(x, y, t)$, tada u punoj analogiji s izvodom rezultantne sile na element žice načinjen u tekstu 4.1 za rezultantnu silu (4.1) možemo pisati za smjer y:

$$f_0 \Delta x \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_y \right] = f_0 \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Delta y \quad (13.1)$$



To je sila koja potječe od deformacije elementa membrane $\Delta x \Delta y$ promatrane u y smjeru a rezultira kao i u jednodimenzionalnom mediju u transverzalnoj sili (ovdje u smjeru z osi). U punoj je analogiji rezultantna sila, koja potječe od deformaciji istog elementa promatrane duž smjera x (sila je usmjerena također duž z osi):

$$f_0 \Delta y \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_x \right] = f_0 \Delta y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta x \quad (13.2)$$

Time je sveukupna sila duž osi z zbroj (13.1) i (13.2) i može se prema 2. Newtonovom zakonu napisati (uz σ_0 kao površinska gustoća mase):

$$f_0 \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Delta y + f_0 \Delta y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta x = \sigma_0 \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (13.3)$$

što je nakon pokrata:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (13.4)$$

gdje je naravno:

$$v^2 = \frac{f_0}{\sigma_0} \quad (13.5)$$

Tako smo dobili dvodimenzionalnu valnu jednadžbu kao generalizaciju jednodimenzionalne. Ovo nam je poučno iz više razloga. Najprije je jasno kako se sada od dvije ide na tri dimenzije ako imamo elastičan medij koji se lokalno deformira, što bi dalo objašnjenje 3D zvučnih valova. Nadalje, u dvije dimenzije je lakše zamišljati ravni val i to ćemo upravo činiti.

13.2 Ravni val u dvije dimenzije

Student će lako provjeriti računanjem drugih derivacija po prostornim i vremenskoj koordinati da titranje oblika:

$$\psi(x, y, t) = \psi_0 \cos(k_x x + k_y y - \omega t) \quad (13.6)$$

zadovoljava dvodimenzionalnu jednadžbu (13.4) pod uvjetom da je ispunjeno da je

$$k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \quad (13.7)$$

Očito se k_x i k_y mogu interpretirati kao komponente vektora :

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} \quad (13.8)$$

pa se (13.8) može elegantnije napisati u obliku vrlo čestom u fizici:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (13.9)$$

Ovo je analitički prikaz dvodimenzionalnog ravnog vala. Na njemu ćemo ilustrirati svojstva ravnih valova koja student može kasnije lako generalizirati na 3D prostor. Što predstavlja izraz (13.10)? Pođimo od trenutka $t=0$ i obratimo pažnju samo na opis kosinusnog titranja u prostoru. Gdje su smještene nultočke izraza (13.10) koje korespondiraju vrijednosti

argumenta $\vec{k}\vec{r} = \frac{\pi}{2}$?

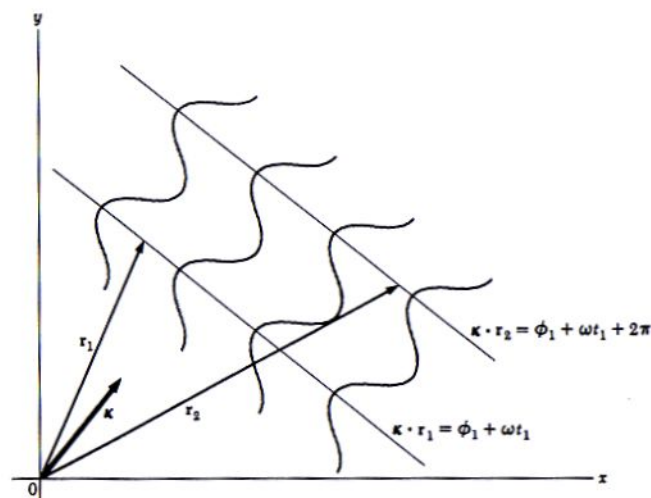
Student će lako provjeriti da je najbliža točka koja ispunjava taj uvjet udaljena od ishodišta $r_0 = \pi/(2k)$. No isti uvjet ispunjavaju i sve točke na pravcu okomitom na \vec{k} koji prolazi točkom udaljenom od ishodišta za onu vrijednost r . To znači da se u trenutku $t=0$ cijeli taj pravac točaka nalazi u nultom položaju (čvorovi ravnog vala). Trbusi ravnog vala (maksimalne vrijednosti ψ_0) su na pravcu koji prolazi kroz ishodište, a okomit je vektor \vec{k} . Geometrijsko mjesto točaka gdje je slijedeći trbuh ravnog vala je ponovno pravac okomit na \vec{k} koji je od ishodišta odmaknut za iznos $r_{trbuh\ 1} = 2\pi/k$. Razmak pravaca s trbusima je upravo ta udaljenost jer prvi pravac točaka s trbusima prolazi kroz ishodište. Razmak pravaca s trbusima je prirodno zvati valnom duljinom vala:

$$\lambda = 2\pi/k \quad (13.10)$$

Sada znamo da titranje opisano s (13.9) u vrijeme $t=0$ predstavlja kosinusno ponašanje dok se krećemo u smjeru paralelnom s valnim vektorom \vec{k} . Obratno ako se krećemo okomito na valni vektor, nalazimo isto stanje odmakom od ravnoteže.

To je razlog tvrdnji da su valne fronte (sinonim za točke istog stanja titranja) okomite na valni vektor \vec{k} iz izraza (13.9). Kada sad uključimo i vremensko variranje, jasno je da se isto stanje titranja nalazi na mjestima za koja vrijedi:

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{kons} \tan ta \quad (13.11)$$



To pak znači da isto stanje gibanja putuju u smjeru valnog vektora brzinom koju smo već izračunali u (13.7) a ovdje je ponavljamo u otprije poznatoj formi iz jednodimenzionalnog harmonijskog vala:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (13.12)$$

13.3 Stojni valovi na membrani

U gornjem smo odjeljku obradili ravne valove koji putuju u smjeru valnog vektora u 2D slučaju. Zbog opće fizičarske kulture spominjemo valove koji su rješenja iste valne jednadžbe (13.4) ali predstavljaju stacionarna rješenja; to jest ne napreduju prostorom. Takva rješenja, kao i u jednodimenzionalnom slučaju dobivamo separacijom prostorne i vremenske zavisnosti:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cos(\omega t) \quad (13.13)$$

Ovakva rješenja su rezultat rubnih uvjeta; na primjer da se čvor vala nalazi na rubu membrane koja ima zadani oblik. Najjednostavniji slučaj za obradu je pravokutna membrana u kojoj možemo nadalje načiniti daljnju separaciju i dobiti sinusna i/ili kosinusna titranja posebno za x varijablu i posebno za y varijablu. Studenti će tokom ove godine studija upoznati i Besselove funkcije. One su stacionarna rješenja titranja (stojni valovi) za slučaj kružne membrane kada se (13.4) piše u obliku prilagođenom toj geometriji to jest preko polarnih koordinata r i φ .

POKUS

Demonstrirat će se Chladny-jeve figure koje nastaju titranjem 2D profila.

Bubnjevi i timpani proizvode zvuk koji je rezultat stacionarnih rješenja jednadžbe (13.4)

14. Valovi u tri dimenzije

U tri dimenzije možemo imati veliko bogatstvo mogućnosti; na primjer putujući val u jednom smjeru, stojni val u okomitom smjeru i eventualno eksponencijalni val u trećem okomitom smjeru. No nas najprije zanima generalizacija ravnog vala iz poglavlja prije ovog

14.1 Harmonički ravni val u prostoru

Promotrimo sinusoidalno/kosinusoidalno koje se širi u smjeru opisanim valnim vektorom \vec{k} koji za razliku od prijašnjeg poglavlja ima i z komponentu. Ravnine istog stanja titranja su položene okomito na smjer valnog vektora. Student će lako provjeriti da titranje :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (14.1)$$

opisuje za $t=0$ slijedeću situaciju. Val ima maksimum u ishodištu, a istu vrijednost val ima za sve točke u kojima je $\vec{k}\vec{r} = 0$. To je ravnina koja ide ishodištem a okomita je na vektor \vec{k} . Sada možemo ponoviti argumentaciju iz prošlog poglavlja. Pođimo u smjeru valnog vektora za iznos $r = \frac{2\pi}{k}$. Ta točka ima ponovno maksimalnu vrijednost u titranju. Sve točke koje su

u ravnini okomitoj na valni vektor \vec{k} a uključuje navedenu točku imaju slijedeći trbuh vala. To znači da je razmak dvije paralelne ravnine trbuha:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (14.2)$$

Tako izraz (14.1) opisuje za $t=0$ kosinusoidalni oblik raspodjele amplituda u prostoru smješten tako da je maksimum u ishodištu i u cijeloj ravnini koja ide ishodištem te u svim ravninama koje su za višekratnik od (13.2) udaljene od ravnine trbuha koja ide ishodištem. Ako sada počnemo uključivati i vremensku zavisnost jasno je da se ove ravnine trbuha, a tako i sve druge ravnine istog stanja titranja miču u smjeru valnog vektora \vec{k} koja se dobiva iz zahtjeva:

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{kons tan ta} \quad (14.3)$$

Iz (14.3) je jasno da je brzina napredovanja tih ravnina $v = \frac{\omega}{k}$ (kao i u jednodimenzionalnom i dvodimenzionalnom slučaju!!!)

14.2 Veza disperzijske relacije i valne jednadžbe u slučaju elektromagnetskih valova u vakuumu

U vakuumu nema plazme pa frekvencija plazme u disperzijskoj relaciji (9.14) iščezava. Tako je disperzijska relacija elektromagnetskih valova u vakuumu:

$$\omega^2 = c^2 k^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (14.4)$$

Ovu relaciju možemo množiti s amplitudom ψ i rezultat usporediti s drugim derivacijama putujućih valova (14.1):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi \quad (14.5)$$

Očito rješenja oblika (14.1) zadovoljavaju jednadžbu dobivenu iz disperzijske relacije; s druge strane diferencijalna jednadžba koje je nastala iz disperzijske relacije (14.4) jest:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (14.6)$$

Tako za dobivanje valne jednadžbe za komponente električnog i magnetskog polja imamo osim Maxwellovih jednadžbi i kraticu preko disperzijskih relacija! Naravno da isti pristup možemo primijeniti i pri nalaženju valne jednadžbe za valove u plazmi polazeći od originalne disperzijske relacije za valove u plazmi: (9.14).

14.3 Elektromagnetski val unutar pravokutnog valovoda (u vakuumu)

Disperzijska relacija (14.4) i valna jednadžba (14.6) mogu biti početna točka i za razmatranje putujućih valova duž valovoda konstruiranog od vodičkog materijala formiranog iz pravokutnog profila širine \check{s} i razmaka r , čije su dužinske dimenzije daleko veće tako da u smjeru osi z uzimamo da su beskonačne. Kako u x smjeru visine i y smjeru širine imamo rubni uvjet postojanja vodiča, u tim smjerovima se formira stojni val, dok se elektromagnetski val širi duž osi z . Tako je rješenje(*) za ponašanje elektromagnetskog titranja u ovom valovodu:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_0 \sin k_x x \sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) \quad (14.7)$$

Radi rubova imamo diskretizaciju spektara k_x i k_y vrijednosti:

$$k_x r = \pi, 2\pi, \dots, m\pi \dots \quad k_y \check{s} = \pi, 2\pi, \dots, n\pi \dots \quad (14.8)$$

Time se disperzijska relacija svodi na:

$$\omega_{m,n}^2 = c^2 \left[\left(\frac{m\pi}{r} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\check{s}} \right)^2 + k_z^2 \right] \quad (14.9)$$

Iz (14.9) je jasno da svaki mod (m,n) (rasporeda $\psi_{m,n}$ po $x-y$ ravnini) koji prema (14.7) putuju duž valovoda ima graničnu frekvenciju :

$$\omega_{m,n}^2(\text{graničra}) = c^2 \left[\left(\frac{m\pi}{r} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\check{s}} \right)^2 \right] \quad (14.10)$$

Dok ω nije veći od $\omega_{m,n}$, mod (m,n) [to jest površinska raspodjela amplitude zadana kvantiziranim vrijednostima k_{xm} i k_{yn} sukladno uvjetima (14.8), a koja se pojavljuje u (14.7)] ne može se širiti duž z smjera. Naime da bi se mod širio duž osi z , mora k_z^2 biti pozitivan. Vratimo se još jednom stvaranju slike o valu (14.7). On za $t=0$ i $z=0$ predstavlja produkt sinusne raspodjele i u x i u y koordinati. Kad uključimo vrijeme i os z , vidimo da taj profil koji smo upravo razmatrali putuje duž osi valovoda. To je način transporta titranja visoke frekvencije bez gubitaka na zračenje.

Naime električna i magnetska polja su zatvorena unutar vodičkih zidova valovoda. Kada bi ta polja u značajnom iznosu prodirala izvan valovoda, valovod bi se ponašao poput radio-antene i postojali bi radi toga veliki radijativni gubici.

(*) *Korektnosti radi moramo spomenuti da postoje i rješenja ψ , koja u x i u y smjeru zavise kosinusno o položaju. Odluka o kojoj se raspodjeli radi zavisi o rubnom uvjetu koji želimo ispuniti. Diskusija rubnih uvjeta na valovodu, međutim, tražila bi mnogo opširniji tekst i nije na direktnoj liniji sadašnjeg razmatranja. U jednom od kasnijih kolegija tome se posvećuje veća pažnja kada se valovod diskutira u kontekstu mikrovalne tehnologije.*

14.4 Potankosti prijelaza elektromagnetskih valova iz jednog sredstva u drugo

U našem prvom susretu s lomom svjetlosti sreli smo pojam graničnog kuta u smislu da svjetlost ne može prijeći iz optički gušćeg sredstva u optički rjeđe sredstvo ako dolazi pod kutom većim od graničnog. Taj smo zaključak izveli iz Snellovog zakona ; zaključak je makroskopski točan no ne i mikroskopski kako ćemo sad pokazati. Promatramo optička sredstva 1 i 2 s odgovarajućim indeksima lomova. Apsolutne vrijednosti valnih vektora se mogu proračunati standardnom vezom s kružnom frekvencijom i brzinom širenja svjetla u sredstvu, koja je povezana s indeksom loma.

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = n_1 \frac{\omega}{c} \quad (14.11)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = n_2 \frac{\omega}{c} \quad (14.12)$$

Razdijelimo valne vektore u komponente: n-normalna na površinu i p-paralelna s površinom kontakta. Kao i prije kut theta se mjeri u odnosu na normalu na površinu kontakta. Imamo četiri relacije za te komponente dobivene projiciranjem

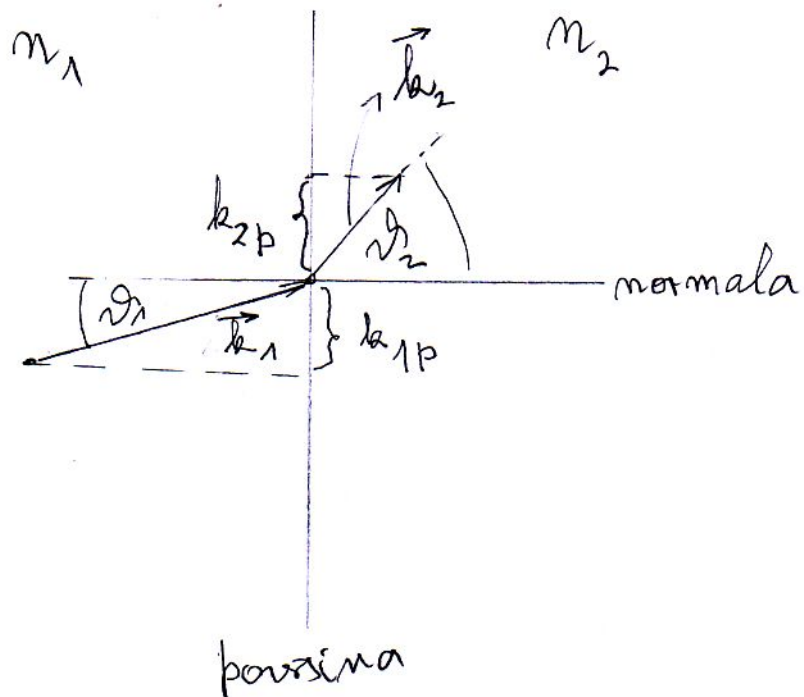
$$k_{1n} = n_1 \frac{\omega}{c} \cos \mathcal{G}_1 \quad k_{2n} = n_2 \frac{\omega}{c} \cos \mathcal{G}_2 \quad k_{1p} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \mathcal{G}_1 \quad k_{2p} = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \mathcal{G}_2 \quad (14.13)$$

Broj valova na kontaktnoj površini mora biti stalan to komponente valnih vektora paralelne kontaktnoj površini moraju biti jednake

$$k_{1p} = k_{2p} \quad (14.14)$$

što iz (13.26) povlači:

$$n_1 \frac{\omega}{c} \sin \mathcal{G}_1 = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \mathcal{G}_2 \quad (14.15)$$



Ovo je poslije kraćenja zajedničkih faktora zakon loma koji smo već izveli. Možemo sada krenuti od disperzijskog izraza u sredstvu 2, za koje pretpostavljam da je rjeđe ($n_1 > n_2$):

$$n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} = k_{2p}^2 + k_{2n}^2 = \text{prema (14.14) i (14.13)} = \left(n_1 \frac{\omega}{c} \sin \vartheta_1\right)^2 + k_{2n}^2 \quad (14.16)$$

odakle proizlazi:

$$k_{2n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \vartheta_1) \quad (14.17)$$

Dok vrijede uvjeti prije graničnog kuta kvadrat komponente (14.17) je pozitivan i titranje se nastavlja u drugom sredstvu. Povećanjem kuta iza veličine graničnog kuta je k_{2n}^2 negativan * (* Naime kod graničnog kuta, uz uvjet da je sredstvo 1 većeg indeksa loma od sredstva 2, vrijedi $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2$. Za veći upadni kut ϑ_1 , izraz $n_1 \frac{\omega}{c} \sin \vartheta_1$ u (14.15) premašuje $n_2 \frac{\omega}{c}$ što je modul valnog vektora k_2 i time automatski k_{2n}^2 postaje negativan.)

To znači da smo u situaciji eksponencijalnog vala! Dalje je ponašanje: $e^{-\kappa x}$ ako s x označimo koordinatu u smjeru normale na kontaktnu površinu. To je veoma važno. Val se ne prekida smjesta kontaktom s drugim medijem. On se u njemu nastavlja ali ne kao putujući val nego kao stacionarno titranje koje eksponencijalno zamire. Ova pojava ima fundamentalne posljedice: Mi možemo modulirati jakost reflektiranog elektromagnetskog signala mijenjajući razmak raspore između ploča istog prozirnog materijala ako zračenje dolazi pod kutom većim od graničnog. Naime mijenjanjem tog razmaka mi odlučujemo debljinu kojom u rasporu upadni signal trne. Domogavši se ponovno sredstva indeksa loma prve ploče, signal se dalje transmitira kao putujući val oslabljen eksponencijalnim faktorom trnjenja.

14.5 Tuneliranje

Izvadili smo ova razmatranja u posebni pasus iako su ona samo nastavak gornje materije. Gore opisani efekt je oslabljenja signala prolaskom kroz sloj materijala s indeksom loma manje vrijednosti od materijala kroz koji se signal normalno širi kao putujući val kada zračenja pada na graničnu plohu pod kutom većim od graničnog kuta. Tada se u tom međusloju javlja eksponencijalni atenuirajući val. Spoznajno je ova mogućnost strahovito bitna. Naime ona ima pandan u kvantnoj mehanici kada val materije (slikovito čestica) nailazi na potencijalnu barijeru koja je viša od njene kinetičke energije. Klasična bi se čestica odbila od barijere. No u punoj analogiji s gornjim primjerom, u kvantnoj fizici se javlja eksponencijalno trnjenje vjerojatnosti da će se čestica naći u ili iza barijere ali situacija nije kompletno determinirana. Kako se ide dublje u barijeru, vjerojatnost penetracije eksponencijalno opada ali nije automatski jednaka nuli. Slikovito se kaže da čestica tunelira kroz barijeru .

POKUS

Pokazuje se studentima kako mikrovalovi bivaju reflektirani ako naiđu pod kutom većim od graničnog. Štoviše rezanjem parafinske ploče i mijenjanjem razmaka među tim dijelovima pokazuje se da val doista može proći kroz zračni raspor ako može nakon njega nastaviti u istom sredstvu i ako taj razmak nije prevelik s obzirom na brzinu atenuacije.

15.1 Osnovni opis putujućeg linearno polariziranog elektromagnetskog (EM) vala

U poglavlju 9. ponovili smo (9.8) i (9.9) kako izgledaju Maxwellove jednadžbe i za specijalni slučaj plazme izveli diferencijalnu jednadžbu za druge derivacije električnog polja (9.12). Ako iz tog izvoda ispustimo dio koji dolazi od mogućih struja u plazmi, a kojeg nema u vakuumu, slijede valne jednadžbe za komponente električnog i magnetskog polja u obliku poznatih valnih jednadžbi:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (15.1)$$

Polazeći od rotora električnog polja iz Maxwellovih jednadžbi analognim postupkom slijedi:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (15.2)$$

Odatle je jasno (može se provjeriti parcijalnim deriviranjem) da je dobro rješenje za (15.1) i prostorni putujući ravni val oblika:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (15.3)$$

naravno pod uvjetom da su valni vektor i kružna frekvencija povezani uobičajenom relacijom s brzinom svjetlosti:

$$\frac{\omega}{k} = c \quad (15.4)$$

U stručnoj terminologiji (15.3) je linearno polarizirani ravni val, što ima specifično značenje da električno polje koje je opisano tim izrazom titra u smjeru vektora \vec{E}_0 s amplitudom E_0 . Za linearno polarizirani ravni val čije električno polje titra prema (15.3) pokazat ćemo dodatna svojstva. Bez gubitka općenitosti izaberimo položaj koordinatnog sustava tako da val napreduje duž z osi. Tako električno polje ovisi samo o vremenu i koordinati z:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x}E_{x0} \cos(kz - \omega t) + \hat{y}E_{y0} \cos(kz - \omega t) + \hat{z}E_{z0} \cos(kz - \omega t) \quad (15.5)$$

Prema Maxwellovim jednadžbama u vakuumu divergencija električnog polja iščezava:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (15.6)$$

Kako transverzalne komponente ne ovise o x i y, to njihove derivacije u (15.6) iščezavaju. To znači da iščezava i derivacija $\partial E_z / \partial z$. (nismo zainteresirani za eventualnu stalnu vrijednost longitudinalne komponente električnog polja). Znači da električno polje nema longitudinalne komponente u slobodnom prostoru. Ono je transverzalno! Pretpostavljajući da i magnetski dio titra poput (15.3) s eventualnim pomakom u fazi (za koji ćemo smjesta pokazati da u slobodnom prostoru ne postoji) identičnim postupkom slijedi da je i magnetsko polje transverzalno! No rotori polja u Maxwellovim jednadžbama nam pokazuju da su električna i magnetska polja međusobno povezana. Na primjer uzimanjem x komponente električnog polja iz odgovarajuće Maxwellove jednadžbe imamo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad \text{transverzalnost } \vec{B} \rightarrow B_z = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (15.7)$$

Iz eksplicitnog izraza za x komponentu električnog polja u (15.5) deriviranjem imamo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = E_{x0} \omega \sin(kz - \omega t) \quad \text{i} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -E_{x0} k \sin(kz - \omega t) \quad (15.8)$$

odakle slijedi njihovom usporedbom:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \omega \left(-\frac{1}{k}\right) \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (15.9)$$

Korištenjem (15.7) i (15.9) koje obadviije sadrže parcijalnu derivaciju E_x po vremenu :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z} c \quad \text{iz čega slijedi} \quad B_y = \frac{E_x}{c} \quad (15.10)$$

Znači da za linearno polarizirani val koji se širi duž z osi a čije električno polje titra u x smjeru pridruženo magnetsko polje u y smjeru titra u fazi s električnim. Naime sličnim se postupkom može pokazati i analogna relacija:

$$B_x = -\frac{E_y}{c} \quad (15.11)$$

što u ovom specijalnom slučaju znači da je $B_x = 0$, a to znači da su komponente električnog i magnetskog polja povezane sa smjerom širenja vala (smjer valnog vektora) relacijom:

$$\hat{E} \times \hat{B} = \hat{k} \quad (15.12)$$

Sada znamo ukupni opis putujućeg ravnog elektromagnetskog vala koji je linearno polariziran. Električni dio opisan je s (15.3) a magnetski s :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad (15.13)$$

s time da su im komponente povezane relacijama (15.10) i (15.11). Drukčiji način memoriranja jest da imaju međusobni odnos (15.12) i odnos modula u kojem je magnetsko polje jakosti za faktor c slabije od električnog.

POKUS

Demonstriranje linearno polariziranog EM vala izvorom i detektorom mikrovalova i polarizacijskim komponentama

15.2 Tok energije u ravnom putujućem valu

Iz drugog semestra znamo da je prostorna gustoća energije :

$$\frac{d\text{Energ}}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{c^2} E^2 = \epsilon_0 E^2 \quad (15.14)$$

Kao što električno polje putuju prostorom brzinom c, isto se dešava i s energijom! Ako se prostorna gustoća energije pomnoži s brzinom svjetlosti kojom se ta energija pronosi, dobiva se snaga koja prolazi jedinicom površine. Znači da je tok snage:

$$\frac{\partial^2 \text{Energ}}{\partial t \partial A} = \epsilon_0 c E^2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{E}{c} E = \frac{1}{\mu_0} |B||E| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| \quad (15.15)$$

Kako je Pointingov vektor (15.16) usmjeren upravo u smjeru širenja ravnog vala,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (15.16)$$

to je upravo Pointingov vektor puni opis toka snage po jedinici površine. Nešto strožiji izvod toka energije načinit ćemo upotrebom pojednostavljenog opisa linearno polariziranog ravnog vala iz gornjeg teksta u kojem električno polje titra u x smjeru a magnetsko u y smjeru. Ovo ne smanjuje općenitost zaključka jer se koordinatni sustav možemo takvom opisu prilagoditi. Polazimo od prostorne gustoće energije elektromagnetskog polja (15.14). Promatramo dio volumena površine ΔA i debljine Δz u kojem je gustoća energije (15.14). Tada je vremenska derivacija energijskog sadržaja tog volumena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{Energ}}{\partial t} &= \Delta A \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E_x^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_y^2 \right) = \Delta A \Delta z \left(\varepsilon_0 E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) = \\ &= \Delta A \Delta z \left[\varepsilon_0 E_x (-c^2) \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{\mu_0} B_y \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \right] = -\Delta A \Delta z \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z}\end{aligned}\quad (15.17)$$

Pri prijelazu iz gornjeg u donji red relacije (15.17) koristili smo relacije (15.9) i (15.10) kao i njihove analogone. Derivacija produkta komponenti električnog i magnetskog polja u (15.17) pomnožena s Δz može se prikazati kao razlika funkcijskih vrijednosti primitivne funkcije uzetih na krajevima intervala Δz znači:

$$\frac{\partial^2 \text{Energ}}{\partial t \partial A} = -\frac{1}{\mu_0} \left[(E_x B_y)_{z+\Delta z} - (E_x B_y)_z \right] = \frac{1}{\mu_0} \left[(E_x B_y)_{\text{ulaz}} - (E_x B_y)_{\text{izlaz}} \right] \quad (15.18)$$

I u slučaju specijalnog izbora koordinatnog sustava to je upravo:

$$\frac{\partial^2 \text{Energ}}{\partial t \partial A} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{E} \times \vec{B})_{\text{smjer } \vec{k}}^{\text{ulaz}} - (\vec{E} \times \vec{B})_{\text{smjer } \vec{k}}^{\text{izlaz}} \right] \quad (15.19)$$

Odavle je također očito da Pointingov vektor (15.16) predstavlja tok snage elektromagnetskog vala (energija na jedinicu površine i jedinicu vremena koja tom površinom protječe). Na seminaru će studenti sresti vrlo strogi izvod za Pointingov vektor (udžbenik Elmore...); on zahtijeva dobro poznavanje manipulacija vektorskim operatorima i dobru prostornu vizualizaciju; taj izvod se neće zahtijevati na ispitu.

POKUS

Demonstriranje unosa energije svjetlom u uređaj koji obasjan zračenjem radi toga počinje vrtnju.

15.3 Impulsni tok koji nosi linearno polarizirani putujući ravni val

Gornji tok energije se moglo egzaktno demonstrirati pomoću poznatog izraza za gustoću energije polja. Situacija s impulsom je malo kompleksnija. Naime da bi se pokazao efekt impulsa dolazimo na njegovu predaju materiji i pitanje kvalitetnog tretmana interakcije putujućeg polja i primatelja impulsa (generalno nakupine naboja i struja). Ovdje ćemo dati dva nivoa indikacije impulsnog toka. Kao i kod Pointingovog vektora skrećemo pažnju da se najstroži izvod impulsnog toka može naći u udžbeniku Elmore...

Najjednostavniji argument za izraz pronosa impulsa možemo dobiti upotrebom svojstva fotona iz relativističkih razmatranja u prvom semestru. Kako je masa mirovanja fotona nula, to za impuls vrijedi:

$$p = \frac{\text{Energ}}{c} \quad (15.20)$$

Relativno plauzibilno (razumljivo/prihvatljivo) objašnjenje gornje relacije dobivamo razmatranjem efekta polja na elektron koji je elastično vezan i prisilnim titranjem prihvaća energiju i impuls od elektromagnetskog vala. Na elektron djeluje Lorentzova sila:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (15.21)$$

Kao i gore pretpostavljamo da je elektromagnetski val usmjeren duž osi z a da električno polje titra duž osi x a magnetsko duž osi y. Ako smo daleko od rezonancija elastična je amplituda dominantna ali titranje električnog polja koje stalno mijenja predznak zapravo nema rezultantne sile kad se efekt usrednji po periodu. Najprije podsjećamo:

$$\vec{F} = \hat{x}qE_x + q(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}) \times (\hat{y}B_y) = \hat{x}qE_x + \hat{z}q\hat{x}B_y - \hat{x}q\hat{z}B_y \quad (15.22)$$

U gornjem izrazu je dobro uočiti slijedeće. Rezultat titranja električnog polje u uprosječnoj sili je nula. $\dot{x}B_y$ doprinos nije velik ali je stalnog predznaka jer brzina i magnetsko polje titraju zajedno mijenjajući predznak. Kako je s jedne strane \dot{z} mali a s druge strane ne titra, to uprosječena vrijednost odgovarajućeg člana jest zanemariva. Tako zaključujemo

$$\langle \vec{F} \rangle = \langle \frac{d\vec{p}}{dt} \rangle = \hat{z}q \langle \dot{x}B_y \rangle = \frac{\hat{z}}{c} \langle q\dot{x}E_x \rangle \quad (15.23)$$

Istovremeno je apsorpcija energije koju iz vala uzima elektron prosječno po periodu:

$$\langle \frac{dEnergy}{dt} \rangle = \langle \vec{F}\vec{v} \rangle = \langle \vec{v}q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rangle = q \langle \dot{x}E_x \rangle \quad (15.24)$$

Usporedbom (15.23) i (15.24) očitavamo odnos brzine promjene impulsa i brzine promjene energije:

$$\langle \frac{d\vec{p}}{dt} \rangle = \frac{\hat{z}}{c} \langle \frac{dEnergy}{dt} \rangle \quad (15.25)$$

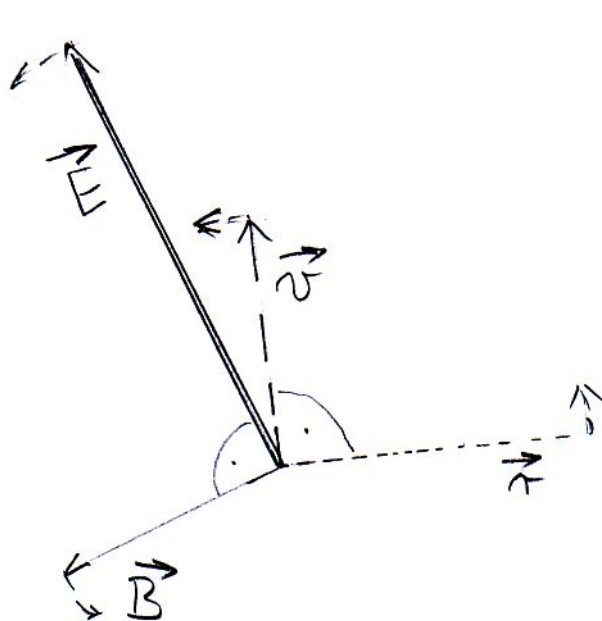
Znači, dok elektron iz vala vadi energiju, on vadi i impuls, pri čemu među energijom i impulsom postoji proporcionalnost već indicirana kroz jednadžbu (15.20). To je ekvivalentno izjavi da zračenje pronosi impuls i proizvodi tlak.

15.4 Cirkularno polarizirani ravni val pronosi i kutnu količinu gibanja

Polariziranom svjetlu i manipulacijama s polarizacijom bit će posvećeno posebno poglavlje. Ovdje je dovoljno reći da se posebnim postupcima može proizvesti svjetlo čiji električni vektor a time i magnetski rotiraju kružnom frekvencijom ω . Tada govorimo o cirkularno polariziranoj svjetlosti. Ovdje ćemo pokazati postupkom analognim gornjem da se u tom slučaju kroz medij također pronosi i kutna količina gibanja (sposobna proizvesti rotaciju).

Polazi se od razmatranja naboja q koji je pod utjecajem rotirajućih polja \vec{E} i \vec{B} . Promatranje činimo u ravnini koja je okomita na smjer širenja vala. U istoj ravnini nalazi se i vektor trenutne brzine naboja q : \vec{v} . On rotira istom kružnom frekvencijom kao i vektori polja malo zaostajući za vektorom električnog polja. Kako su pri kružnom gibanje položaj i trenutna brzina okomiti, to isto tako rotira na istom radijusu $v = \omega r$ i vektor $\omega\vec{r}$ također unutar ravnine svih ostalih rotacija. Pogledajmo moment sile kojeg daje Lorenzova sila na naboj q smješten na položaj \vec{r} :

$$\vec{M} = \vec{r} \times (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{r} \times q\vec{E} + \vec{r} \times (q\vec{v} \times \vec{B}) \quad (15.26)$$



Prvi sumand stalno je usmjeren duž osi napredovanja vala (z os). Drugi sumand oscilira periodički u x-y ravnini i njegova, po periodu rotacije uprosječna vrijednost, je nula. Prvi sumand ima zgodno svojstvo da mu je modul povezan sa skalarnim produktom električnog polja i brzine naboja:

$$\omega \vec{r} \times \vec{E} = \hat{z} v \vec{E} \quad (15.27)$$

Relacija (15.27) je neobičnog izgleda ali je od velike pomoći i lako se verificira. Da joj je smjer korektan je izvjesno jer \vec{r} i \vec{E} kruže sinkrono u ravnini okomitaj na z os. Jednakost modula potječe od već gornjem tekstu spomenute relacije kutne i obodne brzine. Uz to se dodaje da su vektori brzine i položaja okomiti pa se to odražava u činjenici da je sinus relativnog kuta u vektorskom produktu jednak kosinusu relativnog kuta u skalarnom produktu. Konačni rezultat naše diskusije jest da se uprosječna vrijednost momenta sile iz (15.26) može napisati kao:

$$\langle \vec{M} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{L}}{dt} \right\rangle = \frac{\hat{z}}{\omega} \langle qv\vec{E} \rangle \quad (15.28)$$

Relacijom (15.24) smo pokazali da je to s faktorom $1/\omega$ upravo brzina apsorpcije energije. Tako je konačni rezultat

$$\vec{L} = \hat{\omega} \frac{Energ}{\omega} \quad (15.29)$$

Ova relacija nam također ukazuje da se apsorpcijom cirkularno polariziranog zračenja apsorbira i kutna količina gibanja. To znači da se može proizvesti i rotiranja objekata. Kada student bude upoznat s konceptom kvanta svjetlosti: fotona, ova će relacija ukazivati da cirkularno polarizirani fotoni nose kvant kutne količine gibanja: spin.

15.5 Stvaranje elektromagnetskih valova titranjem naboja

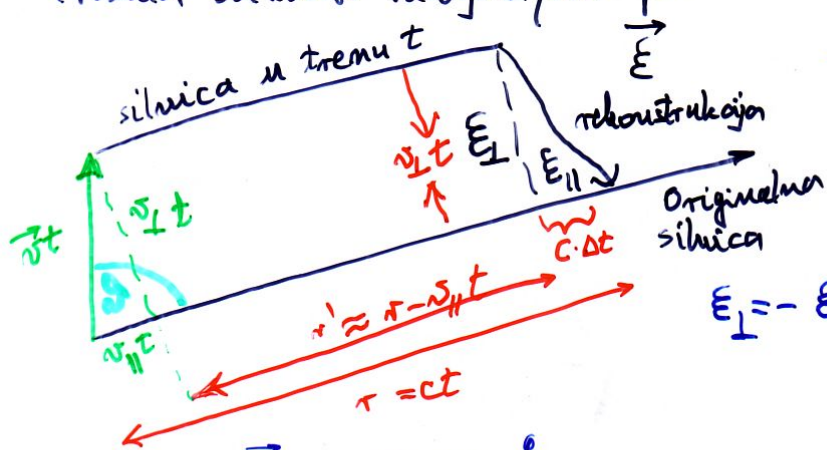
Dok smo za mehaničke i zvučne valove dali objašnjenja kako ih se pokreće to još nismo načinili za EM valove. Koristeći poznati princip vremenske inverzije (proces koji može teći u jednom smjeru toka vremena treba moći teći i obratno) možemo se vratiti procesu apsorpcije

elektromagnetskog zračenja kada vezani elektron titra. Elektron prisiljen na titranje apsorbira dio elektromagnetskog vala. Očito je moguć obrat. Ako elektron titra, mora proizvoditi elektromagnetski val. S druge strane elektromagnetski val ne može biti posljedica jednolikog gibanja elektrona. Naime invarijantnost fizikalnih događaja na jednoliku translaciju to sprečava. U sustavu u kojem elektron miruje on ne proizvodi EM val. Kako val predstavlja pronos energije, i tog pronosa nema dok elektron miruje, isto mora vrijediti i u svim sustavima koji se jednoliko gibaju. Znači da jednoliko gibanje ne može proizvoditi elektromagnetske valove. Jasno dakle, da samo akceleriranje (jednako u svim inercijskim sustavima) može proizvoditi zračenje. Iz već spomenutog slučaja međudjelovanja naboja i vala sjećamo se također da elektron prisiljen na titranje titra okomito na smjer širenja vala. Tako očekujemo da elektronovo titranje proizvodi val usmjeren okomito na smjer titranja naboja.

Koncept koji izvrsno pomaže u izvodu izraza za zračenje je koncept silnica električnog polja: zamišljenih niti koje izlaze iz pozitivnog naboja i odlaze ili prema beskonačnosti ili prema nekim drugim nabojima. U drugom smo semestru obrazlagali njihovu upotrebljivost u slijedećem smislu. Gustoća silnica u prostoru odražava jakost električnog polja u tom dijelu prostora. Radi $\text{div}\vec{E} = 0$ u prostoru bez naboja, silnice se ne mogu prekidati niti nastajati dok ne naiđemo na novi naboj. Sve nas to navodi na model praćenja pojave zračenja promatranjem što se dešava sa silnicom kada se naboj pomiče. Pretpostavljamo da iz stanja mirovanja, u ishodištu, u $t = 0$ naboj q doživljava kratko vrijeme Δt snažnu akceleraciju \vec{a} koja je pod kutom \mathcal{G} orijentirana u odnosu na položaj \vec{r} točke u kojoj ćemo izračunavati efekt te kratkotrajne akceleracije; točka s radijusvektorom \vec{r} je vrlo daleko od ishodišta. Nakon toga naboj nastavlja jednoliko gibanje brzinom $\vec{v} = \vec{a}t$. Dodatna je pretpostavka da je brzina jednolikog gibanja zanemariva prema brzini svjetlosti c . Pogledajmo što se dešava sa silnicom koja iz naboja q teče prema udaljenoj točki promatranja. Silnica se u fazi jednolikog gibanja praktički translacija paralelno svojoj osnovnoj orijentaciji u vrijeme $t = 0$. Vijest o promjeni položaja naboja putuje puno brže (s brzinom c) nego što se naboj miče! Vidi sliku:

Scenarij događaja: Naboje q miruje u ishodištu od $t = -\infty$ do $t = 0$. U kratkom intervalu Δt naboj se jednoliko ubrzava do brzine $\vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t$ prevaživši zanemarljivo put. Potom putuje vrijeme t jednoliko put $\vec{v} \cdot t$ nactan zeleuo na ctinu. Promatra se efekt scenarija u dalekoj točki \vec{r} pod kutem θ .

Posljedice na silnice: Radi Gaussovog teorema / sačuvanja naboja / silnice se ne kidaju nego premeštaju. U $t = 0$ silnica ide do točke \vec{r} $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. U točki \vec{r}' je polje $\frac{q\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$. Relativistički faktor u limesu $v \ll c$ postaje jedinica. Stoga polje naboja ravijestovog u točki \vec{r} ima silnicu paralelnu starij do točke \vec{r}' . Informacija o promjeni nije dospjela iz tačka daljih od $r = ct$. Stoga je u \vec{r} i dalje silnica potrena kao prije. Radi nehidanja silnice možemo je rekonstruirati između \vec{r} i \vec{r}' i iz slicnosti trougla odrediti radijacijski puls.



$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = -\frac{v_{\perp} t}{c \cdot \Delta t} = \frac{-a_{\perp} \Delta t \cdot \frac{r}{c}}{c \Delta t} = -\frac{a_{\perp} r}{c^2}$$

$$E_{\perp} = -E_{\parallel} \frac{r a_{\perp}}{c^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r a_{\perp}}{c^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{zr} &= -\vec{a}_{\perp}(t') \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \\ \vec{B}_{zr} &= \hat{r} \times \left(\frac{1}{c} \vec{E}_{zr} \right) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{zr} &= -\vec{a}_{\perp}(t') \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \\ \vec{B}_{zr} &= \hat{r} \times \left(\frac{1}{c} \vec{E}_{zr} \right) \end{aligned} \right\} t' = t - \frac{r}{c}$$

Ključan za naše razmatranje jest trokut koji započinje u točki do koje je vijest o promjeni položaja došla; slijedeća točka je na presjeku okomice spuštene iz te točke na pravac originalne silnice i točka na staroj silnici u kojoj informacija o promjeni u izvoru upravo stiže. Hipotenuza tog trokuta je komada silnice između krajnje točke nove silnice i krajnje točke stare silnice u koju informacija upravo stiže. Student može provjeriti da se jakost električnog polja duž smjera silnice nije u suštini promijenila, čak ako se uzme u obzir relativistički efekt iz drugog semestra tako dugo dok je omjer $\beta = v/c$ zanemariv. Trokut kojeg zatvaraju silnica i njezine komponente (okomito i paralelno smjeru stare silnice) sličan je trokutu kojeg čine komad silnice između stare i nove silnice, puta kojeg je u međuvremenu u transverzalnom smjeru prevalio izvor ($v_{\perp}t$) i vremena i puta kojeg je svjetlosti trebalo da se informacija o efektu nastalom akceleracijom proširi od okomice iz novog položaja do položaja promatranja efekta ($c\Delta t$) duž stare silnice. Iz sličnosti pravokutnih trokuta komponenti polja i trokuta koji je sastavljen od navedenih putova, slijedi:

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = -\frac{v_{\perp}t}{c\Delta t} = -\frac{a_{\perp}\Delta t(r/c)}{c\Delta t} = -\frac{a_{\perp}r}{c^2} \quad (15.30)$$

Transverzalni puls električnog polja možemo sada izračunati iz longitudinalne komponente koju znamo iz Coulombovog zakona:

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (15.31)$$

$$E_{\perp} = -E_{\parallel} \frac{a_{\perp}r}{c^2} = -\frac{a_{\perp}q}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \quad (15.32)$$

U (15.32) treba još pamtititi da polje zračenja opisano s (15.32) i vrijednost transverzalne akceleracije ne potječu od istog vremenskog trenutka. Vrijeme za koje treba vrijednost akceleracije je ranije od posljedice u točki r za iznos r/c . U najvećem broju slučajeva se ovo može zanemariti, no studenti će u kasnijim godinama sresti i posljedice ovog kašnjenja (stručno nazvano retardacije). Ovdje smo izračunali posljedice kratkotrajne akceleracije naboja na jakost električnog polja u daljini. Možemo ići i korak dalje i generalizirati naš rezultat (15.32) na svako akceleriranje naboja kada se efekt promatra u vrlo dalekoj točki.

Izraz (15.32) vrijedi i dalje, iako se akceleracija u vremenu mijenja. Određenu vizualnu analogiju u ponašanju silnice imamo s transverzalnim pulsom kojeg generiramo na početku elastične žice i koji se brzinom određenom uvjetima medija širi longitudinalno kao transverzalni puls. Analogija nije potpuna jer u mehaničkom slučaju sva energija pulsa ide jednim smjerom i stoga se ne smanjuje. U električnom slučaju energija odlazi u cijeli prostor što se odražava u faktoru $1/r$ u (15.32). Konačni rezultat našeg razmatranja jest:

$$\vec{E}_{zrač}(\vec{r}, t) = -\vec{a}(\vec{r}, t - \frac{r}{c}) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \quad (15.34)$$

Magnetsko polje dobijemo uzimanjem u obzir relacije stečene kod putujućeg EM vala (15.10) i (15.11):

$$\vec{B}_{zrač} = \hat{r} \times \left(\frac{1}{c} \vec{E}_{zrač} \right) \quad (15.35)$$

15.6 Snaga i energija koju zrači titranje električnog naboja

Već smo pokazali kako se tok snage (energija u jedinici vremena koja prolazi jediničnom površinom izražava Pointingovim vektorom:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \hat{r} \epsilon_0 c E^2 = \hat{r} \frac{\epsilon_0 q^2 a_{\perp}^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^2 c^3} \quad (15.37)$$

Ovaj nam je izraz pogodan za izračunavanje najprije snage koja prolazi površinom dA okomitom na tok zračenja da bismo potom izračunali totalnu snagu izračenu u prostor.

$$dP = S dA = \frac{q^2 a_{\perp}^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{4\pi} \frac{dA}{r^2} \quad (15.38)$$

U gornjem izrazu je posljednji razlomak element prostornog kuta $d\Omega$; zajedno s faktorom prije $1/(4\pi)$ to je priprema za proračun srednje vrijednosti prvog razlomka po svim smjerovima zračenja. Kako je jedina o smjeru zavisna veličina transverzalna akceleracija (koja sinusno ovisi o kutu emisije theta) to će integral ukupne snage značiti zapravo određivanje srednje vrijednosti od $\sin^2 \vartheta$ (po kugli), koja iznosi $2/3$.

$$P(t) = \int_{d\Omega} dP = \frac{q^2 a^2(t')}{4\pi\epsilon_0 c^3} \int_{d\Omega} \sin^2(\vartheta) \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2(t')}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad (15.39)$$

Ovo je iznos snage koja se akceleracijom a naboja q ukupno zrači u prostor. Iz (15.38) je jasno da ta snaga emitirana u površinu dA opada s udaljenošću od izvora s kvadratom udaljenosti! U (15.39) se pojavljuje za akceleraciju vrijeme $t' = t - r/c$ kao i u izrazu (15.34).

Najjednostavniji i prvi uređaj za proizvodnju EM valova ostvario je Hertz. Za to mu je poslužio LC krug. Kapacitor kruga je primao veliku količinu naboja, dok kroz zračni raspor nije potekla struje. Kroz tako ionizirani plin struja je nastavljala teći i nakon ispražnjenja kapacitora jer je energija uložena u stvaranje magnetskog polja induktiviteta to omogućivala. Tako se kapacitor punio na obratni polaritet. Tada bi struja potekla kroz ionizirani plin u obratnom smjeru. Nastalo titranje je bilo visokofrekventno i gušeno, jer se energija trošila na tok struje kroz ionizirani plin. Praktički poučak za studente: iskrišta su često izvori elektromagnetskih valova. Da svjećice u automobilima ne bi ometale radioprijemnike dodaju se u električki krug posebne komponente.

POKUS

Demonstriranje Hertzovih valova dobivenih titranjem električnog naboja

15.7 Primjena rezultata o energiji emitiranoj zračenjem na konfiguraciju dipola

Rezultati koje smo izveli u osječku 15.5 su vrlo općeniti. U praksi postoje mnogi oblici nakupina naboja (podsjetnik: multipolni razvoj kao moguća karakterizacija). Prirodno, svaka karakteristična konfiguracija pri prostornom titranju ima svoju karakterističnu raspodjelu intenziteta zračenja po prostoru. U nuklearnoj fizici, na primjer, kvadrupolna komponenta može postati važna radi geometrijskih ograničenja u raspodjeli nuklearnih naboja. Mi ćemo se radi jednostavnosti ograničiti na najjednostavniju geometriju izvora: dipol. Jednodimenzionalno titranje točkastog naboja q ima karakteristike dipolnog zračenja. Ako smjer titranja ograničimo na x -os i ograničimo ga na harmonijsko titranje kružnom frekvencijom ω imamo:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad i \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \quad (15.40)$$

Uvrštavanjem gornje akceleracije (i oznakom kuta između smjera titranja i smjera promatranja ϑ) u (15.38) slijedi izraz za diferencijal snage u geometriji dipola :

$$dP = \frac{a^2(t')q^2}{4\pi\epsilon_0c^3} \sin^2 \vartheta(t') \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{q^2\omega^4}{4\pi\epsilon_0c^3} x^2(t') \sin^2 \vartheta(t') \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (15.41)$$

t' je naravno vrijeme koje se od t razlikuje za interval potreban da signal stigne od izvora do točke promatranja kao i u prošlom odsječku. Uzimanjem prosječne vrijednosti po periodu titranja i po smjerovima emisije slijedi:

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \frac{q^2\omega^4}{4\pi\epsilon_0c^3} \langle x^2(t') \rangle \quad (15.42)$$

15.8 Procjena vremena života i spektralne širine zračenja pri emisiji atomskog elektrona. (Klasični pristup)

U klasičnom modelu je elektron vezan elastično na ostatak atoma „konstantom opruge“:

$$k = m\omega_0^2 \quad (15.43)$$

Pri titranju frekvencijom ω_0 u (15.42) smo ustanovili snagu koja se pri tome emitira u prostor. Znači, ako je na početku atom imao energiju E_{energ} , on tu energiju gubi zračenjem.

Dvije su posljedice: pojavit će se karakteristično relaksacijsko vrijeme; ritam gubljenja energije, a to znači i da slijedi preko Fourierove transformacije i odgovarajući spektralni interval frekvencija koje se u zračenju pojavljuje! Napišimo najprije izraz za prosječnu energiju tijekom perioda titranja:

$$\langle E_{energ}(t) \rangle = \langle \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2(t) + \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) \rangle = m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle \quad (15.44)$$

Prema (15.42) je energija koja se zrači:

$$P = -\frac{dE_{energ}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2\omega_0^4}{4\pi\epsilon_0c^3} \frac{\langle E_{energ}(t) \rangle}{m\omega_0^2} = \frac{2}{3} \frac{q^2\omega_0^2}{4\pi\epsilon_0c^3 m} \langle E_{energ}(t) \rangle \quad (15.45)$$

Integriranjem diferencijalne jednačbe (15.45) po vremenu:

$$\langle E_{energ}(t) \rangle = E_{energ}(t=0)e^{-t/\tau} \quad (15.46)$$

gdje je relaksacijsko vrijeme τ jasno iz (15.46)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \frac{q^2\omega_0^2}{4\pi\epsilon_0c^3 m} = \Delta\omega \quad (15.47)$$

Jednakost početka i kraja (15.47) potječe iz veze neodređenosti u vremenskom trajanju τ i $\Delta\omega$ frekventne širine potrebne da se opiše eksponencijalni pad energije iz (15.46). U kvantnoj fizici to korespondira vremenu života stanja koje emitira frekvenciju ω_0 i energijskoj širini emitiranog spektra.

15.9 Boje vedrog neba i neba pri zalasku sunca

POKUS

Vodom u kojoj se nalaze molekularni raspršivači svjetla imitira se nebo. Prati se rezultat obasjavanja mješavine običnom svjetlošću i opaža raspršenje svjetla veće frekvencije i dublji prolaz svjetla niže frekvencije

Zadržimo oznake gornjeg slučaja s tim da elektron prisilno titra frekvencijom vanjskog električnog polja $E_x(t) = E_0 \cos \omega t$ koja je mnogo manja od frekvencija rezonantnog područja. To znači da je $\omega \ll \omega_0$ i da je pri interakciji svjetla i elektrona elektron prisiljen titrati:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad \text{što povlači} \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \quad (15.48)$$

Ako je, kao i prije elektron za atom elastično vezan, tada je jednačba gibanja:

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x(t) + qE_x(t) \quad (15.49)$$

Odatle slijedi:

$$x(t) = \frac{qE_x(t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (15.50)$$

Uvrštenjem (15.50) u izraz za emitiranu snagu (15.39) imamo:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega^4 \langle x^2 \rangle}{4\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega^4}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{q}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)^2 \langle E_x^2(t) \rangle \quad (15.51)$$

Dok smo daleko od rezonancije nazivnik u (15.51) je praktički konstantan pa je emitirana snaga proporcionalna s ω^4 (Rayleigh-ev zakon). Jasno je da će se plava svjetlost mnogo jače raspršivati od crvene svjetlosti (njih dvije simboliziraju ekstremne krajeve spektra). To konkretno znači da se na elektronima vezanim uz molekule zraka plava svjetlost jako raspršuje dajući nebu obasjanom suncem plavu boju. Na zapadu sunčana svjetlost prolazi kroz debeli sloj atmosfere, mnogo deblji od onog u podne, pa do nas dopire u direktnom smjeru samo najmanje raspršena svjetlost crvene boje. NAPOMENA: gledanje sunca pri zapadu može trajno oštetiti vid. Iako je svjetlo relativno mnogo slabije od onog u podne, direktan pogled i u sunce na zapadu ugrožava vid čovjeka!

16.10 Pojam udarnog presjeka i njegov iznos za raspršenje svjetla na elektronima (klasično)

Mikrosvijet nije dostupan našem oku. Koristeći znanje stečeno u klasičnim uvjetima mi prodiremo u područje nevidljivog pogodnim eksperimentima. Poslužimo se naivnim modelom. Skriveno od našeg pogleda nalazi se zapreka kojoj ne možemo doprijeti mjernim instrumentima. Na zapreku međutim možemo puštati homogene rojeve loptica koje se od zapreke elastično odbijaju. Iz omjera reflektiranih loptica i onih koje su ukupno bačene prema zapreci (ako su loptice jednoliko raspoređene po presjeku snopa) možemo odrediti dimenzije zapreke. Štoviše, iz kutne raspodjele reflektiranih loptica, za elastične sudare, možemo odrediti i oblik zapreke! Tako metoda raspršivanja snopa na objektima našeg istraživanja postaje najmoćnije istraživačko oruđe u mikrosvijetu. (Tako je i napredak u akceleratorskoj tehnici temelj našeg prodora u mikrosvijet.

Pođimo od opisa objekata našeg istraživanja. Neka je njih N raspoređeno na površini A . Neka je poprečni presjek svakog objekta σ . Tada je omjer površina od kojih jedna predstavlja zapreke (ukupno $N\sigma$) a druga ukupnu površinu jednak: $N\sigma / A$. Taj omjer predstavlja ujedno i vjerojatnost da roj upadnih projektila zanemarivih dimenzija pogodi jednu od čestica zapreka. Stoga će omjer toka raspršenih čestica: dn/dt i toka upadnih čestica dn_{upadno}/dt koji upravo eksperimentalno utvrđuje tu vjerojatnost biti:

$$\frac{dn/dt}{dn_{upadno}/dt} = \frac{N\sigma}{A} \quad (15.52)$$

Napisano zgodnije,

$$dn/dt = \frac{N\sigma}{A} \frac{dn_{upadno}}{dt} \quad (15.53)$$

Ovaj općeniti izraz možemo sada primijeniti na međudjelovanje svjetlosti i elektrona propitujući elektronove efektivne dimenzije! Izraz (15.53) pomnožimo s energijom koju nosi pojedini projektil. S lijeve strane tako dobivene relacije bit će ukupno raspršena snaga na N objekata:

$$P_{raspršeno}(N) = N\sigma \left(\frac{1}{A} \frac{dn_{upadno}}{dt} \text{Energija projektila} \right) \quad (15.54)$$

Izraz u zagradi na desnoj strani predstavlja upadnu snagu u snopu po jedinici površine. Snaga raspršena na jednom projektilu $P_{raspršeno}(1)$ dobije se iz izraza (15.54) dijeljenjem s brojem projektila N .

Tako je iz (15.54) očito:

$$P_{raspršeno}(1) = \sigma S \quad (15.55)$$

Gdje je S Poyntingov vektor upadnog zračenja. Mi međutim znamo raspršenu snagu na elektronu iz (15.51). Vezom Poyntingovog vektora i kvadrata električnog polja imamo konačno:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (15.56)$$

U visokoenergijskom limesu kada možemo zanemariti ω_0 izraz se simplificira na:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (15.57)$$

odakle je značenje r_0 jasno povezano s dimenzijom kojom zračenje „vidi“ elektron!

16. Polarizacija valova

Globalno gledajući valovi mogu biti različito polarizirani. Formalno govoreći pitamo se koje fizikalne karakteristike ima fenomen koji se pronosi prostorom. Zvučni valovi, na primjer u materijalu mogu imati i karakteristike transverzalnog i longitudinalnog. Valna funkcija, znači, može biti vremenski zavisno vektorsko polje u trodimenzionalnom prostoru $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$. Svojstva mehaničkih valova smo, međutim, dovoljno istražili a za svjetlosne valove u slobodnom prostoru smo pokazali da su transverzalni. Stoga ćemo sada posvetiti pažnju transverzalnim valovima, a posebno raznim mogućnostima upravljanja polariziranim snopom.

16.1 Linearna polarizacija

Promatramo titranje samo za određeni z . Pretpostavimo da titranja x i y komponenti imaju istu fazu. Tada je opis linearno polariziranog vala:

$$\vec{\psi}(t) = \hat{x}A_1 \cos \omega t + \hat{y}A_2 \cos \omega t = \frac{\hat{x}A_1 + \hat{y}A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \omega t = \vec{e}A \cos \omega t \quad (16.1)$$

\vec{e} je jedinični vektor u istom smjeru u kojem je vektor čije su komponente A_1 i A_2 . A je modul istog vektora a ostatak je harmoničko titranje u vremenu. Očito titranje je u jednom smjeru određenom jediničnim vektorom, a projekcije titranja na koordinatne osi titraju sinkrono u fazi.

Linearno polarizirani stojni val koji titra u x - y ravnini, a prostire se duž z -osi ima oblik:

$$\vec{\psi}(z, t) = (\hat{x}A_1 + \hat{y}A_2) \sin kz \cos \omega t \quad (16.2)$$

Linearno polarizirani putujući val koji titra u x - y ravnini u smjeru \vec{e} , a putuje duž z -osi:

$$\vec{\psi}(z, t) = \vec{e}A \cos(kz - \omega t) \quad (16.3)$$

16.2 Cirkularna polarizacija

Za početak promatramo ponovno samo titranje u x - y ravnini. Za opis rotiranja vektora modula A imamo dvije mogućnosti:

$$\vec{\psi}(t) = \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \sin \omega t = \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \cos(\omega t - \pi/2) \quad (16.4)$$

$$\vec{\psi}(t) = \hat{x}A \cos \omega t - \hat{y}A \sin \omega t = \hat{x}A \cos \omega t + \hat{y}A \cos(\omega t + \pi/2) \quad (16.5)$$

Vektor rotacije za (16.4) je u smjeru osi $+z$, a u (16.5) u smjeru $-z$. Cirkularno polarizirano označavamo kao CP. Imamo ove mogućnosti:

$$\text{CP stojni val duž } z \text{ osi, rotira u } +z \text{ smjeru } \vec{\psi}(z, t) = (\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t) A \sin kz \quad (16.6)$$

$$\text{CP stojni val duž } z \text{ osi, rotira u } -z \text{ smjeru } \vec{\psi}(z, t) = (\hat{x} \cos \omega t - \hat{y} \sin \omega t) A \sin kz \quad (16.7)$$

$$\text{CP put. duž } z \text{ osi rotira u } +z \text{ smjeru } \vec{\psi}(z, t) = [\hat{x} \cos(\omega t - kz) + \hat{y} \sin(\omega t - kz)] A \quad (16.8)$$

$$\text{CP put. duž } z \text{ osi rotira u } -z \text{ smjeru } \vec{\psi}(z, t) = [\hat{x} \cos(\omega t - kz) - \hat{y} \sin(\omega t - kz)] A \quad (16.9)$$

Oznaka put. u (16.8) i (16.9) označava putujuće valove.

Postoje dvije različite konvencije opisa cirkularne polarizacije. Jednu smo konvenciju već upotrebljavali kod promatranja impulsnog momenta svjetlosti u prošlom odlomku. Tamo je z bio stalan a gledali smo smjer rotacije u odnosu na smjer osi z . To je notacija impulsnog momenta. Optička konvencija promatra smjer vijka za stalno vrijeme t . Student će lako provjeriti: što je pozitivno polarizirano u jednoj je suprotno polarizirano u drugoj.

Cirkularna se polarizacija razlikuje od linearne u slijedećim aspektima. Vektor električkog polja kruži umjesto da titra (promatrano u jednoj točki polja). Vektor električkog polja cirkularno polariziranog vala nigdje i nikad ne iščezava potpuno.

16.3 Prikazivanje cirkularne polarizacije kompleksnim veličinama

U ovom tekstu mi ćemo koristiti konvenciju da je desno CP opisano s (16.8) a lijevo s (16.9) Promotrimo sada kompleksne veličine:

$$\vec{\psi}_+ = \frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} e^{i(kz - \omega t)} \quad (16.10)$$

$$\vec{\psi}_- = \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} e^{i(kz - \omega t)} \quad (16.11)$$

One očitio imaju svojstvo ortonormiranosti jer njihovi skalarni produkti iščezavaju dok se radi o različitim vektorima a skalarni produkt istih veličina daje jedinicu. Skalarni produkt u kompleksnom vektorskom prostoru je naravno definiran kao i običan skalarni produkt, samo se prvom vektoru skalarnog produkta u definiciji uzima kompleksno konjugirana vrijednost:

$$(\vec{\psi}_+, \vec{\psi}_-) \equiv \vec{\psi}_+^* \cdot \vec{\psi}_- = \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} = 0 \quad (16.12)$$

Ovakvim se postupcima mogu provjeriti sve tvrdnje o ortonormiranosti vektora (16.10) i (16.11). Oni čine jednu od mogućih baza dvodimenzionalnog prostora. S druge strane studenti mogu provjeriti da realni dijelovi vektora (16.10) i (16.11) opisuju desno i lijevo cirkularno polarizirane valove. Značaj ovog prikaza jest u činjenici da (16.10) i (16.11) prirodno ulaze u notaciju sferičnih tenzora važnih pri promatranju kompleksnijih vrsta zračenja nego što je zračenje dipola.

16.4 Dobivanje polariziranih valova

Vidljivo svjetlo koje nas okružuje emitira se procesima koji nisu klasični; studenti nisu još spremni za analizu svojstava netom emitiranih kvantata svjetlosti. Nas, međutim, uglavnom okružuje u prosjeku nepolarizirana svjetlost. Prirodno se pitamo kako možemo postići polarizaciju valova klasičnim postupcima. Za elektromagnetsko zračenje koje se stvara titranjem naboja u antenama nema poteškoća. U prošlom poglavlju upoznali smo dipolno zračenje koje je činom stvaranja polarizirano: električno polje u daljini titra u istom smjeru u kojem i izvor ; tako imamo linearno polarizirane valove. Cirkularno polarizirane valove dobivamo samo malom modifikacijom gornjeg postupka. Na dvije okomito položene antene uvodi se sinkronizirano titranje naboja s razlikom u fazi jedne antene prema drugoj za $\pi/2$. Time se titranjem u anteni na načine (16.4) ili (16.5) dobiva putujuće valove u slobodni prostor (u daljini) oblika (16.8) ili (16.9). Postoje uređaji kojima se smjer linearne polarizacije može jednostavno modificirati. Ako na put EM linearno polariziranih valova emitiranih antenama postavimo okomito na smjer širenja sustav paralelnih vodiča, spriječit ćemo prolaz zračenja čija je polarizacija paralelna smjeru vodiča. (elektroni u vodiču titraju tako da ponište dolazeće zračenje). Propušta se samo komponenta okomita na žice vodiča. Uređaj je jedna varijanta linearnih polarizatora/analizatora, koji dakle propuštaju samo komponentu titranja jednog smjera. Ako izaberemo dozvoljeni smjer titranja u polarizatoru kao nulti smjer, titranje koje je za kut \mathcal{G} zakrenuto od nultog smjera u nultom smjeru će imati komponentu koja je faktorom $\cos \mathcal{G}$ oslabljena od ulazne vrijednosti amplitude. To je temelj Malusovog izraza za rad analizatora. Neka je I_{ulaz} intenzitet linearno polariziranog vala, a I_{izlaz} intenzitet vala koji

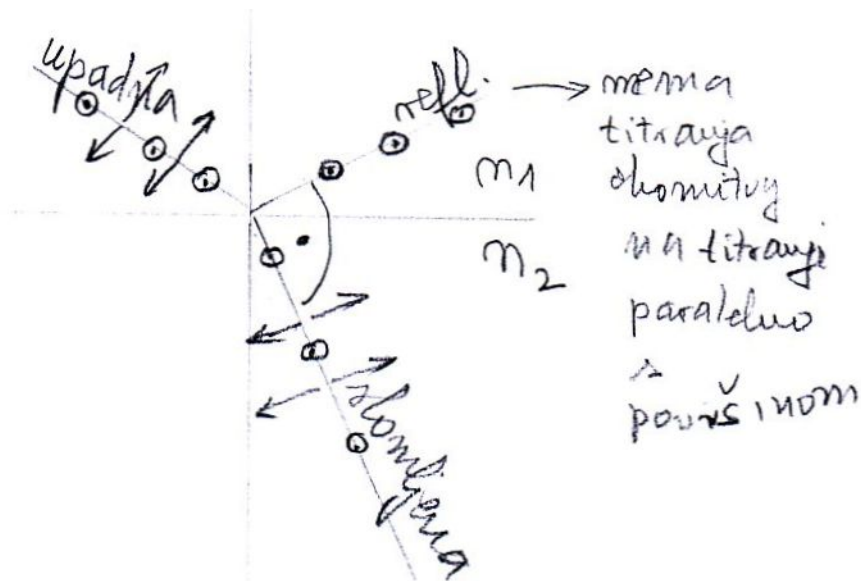
je prošao kroz analizator, kut među polarizacijom ulaza i dozvoljenom osi analizatora je ϑ . Prema gornjem razmatranju Malusova relacija daje:

$$I_{izlaz} = I_{ulaz} \cos^2 \vartheta \quad (16.13)$$

POKUS

Propušta se svjetlo kroz polarizator i analizator neovisno. Potom se polarizator i analizator poklope i rotira se jedan prema drugom pokazujući maksimum i iščezavanje svjetla zavisno o relativnom kutu osi polarizatora i analizatora.

Djelomična, ili potpuna polarizacija svjetlosti može se postići refleksijom na pogodnim površinama. Kada svjetlost pada iz zraka na primjer na vodu, dio zračenja se transmitira poštujući Snellov zakon loma a dio se reflektira. Pod kraj semestra dokazat ćemo da je kut refleksije jednak upadnom kutu. Za tri zrake (upadnu, slomljenu i reflektiranu) postoji takozvana Brewsterova konfiguracija.



U njoj su slomljena i reflektirana zraka pod pravim kutom. Svjetlo reflektirano u Brewsterovoj konfiguraciji je potpuno polarizirano. Ovo se lakše razumije ako tri zrake nacrtamo i analiziramo što se dešava s pojedinim polarizacijama u kontaktnoj točki. Titranje električnog polja u zraku koje je paralelno s površinom vode nema problema potjerati elektrone vode na titranje u istom smjeru. To titranje tjera dalje i podvodni val i reflektirani val da imaju komponentu titranja paralelnu s kontaktnom površinom. Normalna komponenta se temeljem titranja elektrona u vodi nastavlja u slomljenoj zruci, no kako je to titranje (radi okomitosti slomljene i reflektirane zrake) za reflektiranu zraku paralelno smjeru napredovanja reflektirane zrake (radi transverzalnog karaktera svjetla), normalne komponente u reflektiranoj zruci nema.

16.5 Fenomeni u neizotropnim medijima; dvolom i optička aktivnost

Najprije ćemo razmotriti posljedice činjenice da u nekim prozirnim medijima indeks loma svjetlost nije isti u svim smjerovima. Postoji smjer za polarizaciju za koji je brzina svjetla sporija (indeks loma n_s) i smjer polarizacije za koji je brzina svjetlosti brža od spore (indeks loma n_b). Jasno, $n_s > n_b$. Izaberimo koordinatne osi tako da je x os duž smjera za sporu brzinu a y os za duž smjera za brzu os. Neizotropni materijal postavljamo tako da je njegov početak na koordinati $z=0$, a EM val putuje duž z-osi. Neka je titranje duž osi x bez dodatne faze na ulazu u medij. Tako je relativna faza x i y titranja određena posebnom fazom za titranje duž osi y: φ . Sukladno gornjem imamo:

$$\text{Ulazni val: } \vec{E}(z < 0, t) = \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \hat{y} \cos(kz - \omega t + \varphi) \quad (16.14)$$

Ako je k valni broj na početku (vakuum ili zrak) znamo da su valni brojevi za pojedine osi:

$$k_s = kn_s \quad k_b = kn_b \quad (16.15)$$

Označimo slovom d debljinu anizotropnog prozirnog sredstva. Tada je na izlasku iz sredstva odnos faza u titranju x i y komponente promijenjen:

$$\text{Izlazni val: } \vec{E}(z = d, t) = \hat{x} \cos(k_s d - \omega t) + \hat{y} \cos(k_b d - \omega t + \varphi) \quad (16.16)$$

Relativna faza se promijenila za iznos:

$$\Delta\varphi = k_s d - k_b d = (n_s - n_b) \frac{2\pi}{\lambda} d \quad (16.17)$$

gdje je λ valna duljina u vakuumu. U stručnoj terminologiji se koriste izrazi $\lambda/4$ i $\lambda/2$ pločice. Prva mijenja relativnu fazu $\pi/2$, a druga za π . Kombiniranjem linearnih polarizatora i navedenih pločica mogu se izvršiti sve potrebne manipulacije da se proizvede bilo koje stanje čiste polarizacije. Obratno, upotrebom polarizatora i pločica mogu se detektirati sve vrste polarizacija svojstva. Ilustrirat ćemo gornju tvrdnju na pretvorbi linearno polariziranog snopa u cirkularno polarizirano. Postupak je zgodno pratiti serijom crteža.

Ako počinjemo s običnim svjetlom, možemo ga linearno polarizirati. Primitivni način je na primjer istežanje celofana u jednom smjeru: svjetlo koje tada prolazi kroz celofan postaje linearno polarizirano. To se može provjeriti još jednom folijom celofana pripremljenom identično, koju rotiramo u odnosu na prvu verificirajući ujedno Malusov zakon.

Znači pripremili smo linearno polarizirani snop. Ako smjer njegove polarizacije nagnemo pod 45 stupnjeva prema obje osi i svjetlo potom propustimo kroz $\lambda/4$ pločicu, faze titranja u smjeru dviju osi anizotropije (koje su na ulasku bile iste) na izlasku će biti pomaknute za $\pi/2$ jedna u odnosu na drugu. Tako su naime i definirane! Ovaj odnos definira cirkularnu polarizaciju. (jednakost amplituda duž x i y osi smo osigurali postavljanjem ulaznog linearno polariziranog svjetla pod kutom od 45 stupnjeva u odnosu na obje osi. Studenti mogu proći kroz brojne kombinacije polarizatora i pločica i uvjeriti se kako je moguća pretvorba svake polarizacije svjetlosti u bilo koju drugu željenu!

Kako imamo dva indeksa loma, materijali takvih svojstava zovu se dvolomci. Među njima je najpoznatiji islandski dvolomac. Kod islandskog dvolomca su indeksi loma 1.49 i 1.66.

POKUS

Studentima će biti prikazan kristal koji fenomenom dva indeksa loma tvori (dvije lomljenje zrake i prirodno) dvije slike istog objekta.

POKUSI

U zbirci fizičkog zavoda je obilje uzoraka s raznim pločicama. Prema raspoloživom vremenu će se demonstrirati rezultati prolaska svjetla kroz uzorke smještene između polarizatora i analizatora.

Optička aktivnost je ime za pojavu koja ima određene sličnosti s dvolomom, no mehanizam fenomena je različit. Dok se dvolom javlja kao posljedica specifične kristalne anizotropije dajući različiti indeks loma različitim orijentacijama linearno polariziranog titranja, optička aktivnost je na još mikroskopskijem nivou. Optička se aktivnost javlja kod nekih vrsta molekula helikoidalne prostorne strukture koje upravo radi takve strukture brže propuštaju jednu vrstu cirkularno polariziranog svjetla. (Cirkularno polarizirano svjetlo promatrano u jednom vremenskom trenutku ima također spiralni (helikoidalni) oblik.). Optička aktivnost bi se naravno mogla opažati u potpunoj analogiji s dvolomom samo upotrebom cirkularno polariziranih snopova i odgovarajućih debljina slojeva. No mi ćemo načiniti obradu posljedice prolaska linearno polariziranog svjetla kroz optički aktivni medij. Naime lako se pokazuje da se svako linearno polarizirano svjetlo može prikazati kao superpozicija dva suprotno cirkularno polarizirana svjetla. Radi pojednostavljenja izabiremo z os za smjer propagacije a x os za smjer titranja električkog vektora polja.

Upadni val:

$$\hat{x}E_0 \cos(kz - \omega t) = \frac{E_0}{2} [\hat{x} \cos(kz - \omega t) + \hat{y} \sin(kz - \omega t) + \hat{x} \cos(kz - \omega t) - \hat{y} \sin(kz - \omega t)] \quad (16.18)$$

Prva dva sumanda predstavljaju lijevo cirkularno polarizirani val, a druga dva sumanda predstavljaju desno cirkularno polarizirani val. Ako lijevoj polarizaciji dademo oznaku $-$ a desnoj polarizaciji oznaku $+$ i ako (kao i kod dvoloma) s odgovarajućim indeksima loma koji su različiti: n_- i n_+ povežemo i odgovarajuće valne brojeve k_- i k_+ , polje će nakon prolaska optički aktivnog sredstva debljine d imati oblik:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{2} [\hat{x} \cos(k_- d - \omega t) + \hat{y} \sin(k_- d - \omega t) + \hat{x} \cos(k_+ d - \omega t) - \hat{y} \sin(k_+ d - \omega t)] = \\ = \frac{E_0}{2} \{ \hat{x} [\cos(k_- d - \omega t) + \cos(k_+ d - \omega t)] + \hat{y} [\sin(k_- d - \omega t) - \sin(k_+ d - \omega t)] \} = \\ = E_0 \left[\hat{x} \cos \frac{(k_- - k_+)d}{2} \cos \left(\frac{k_- + k_+}{2} d - \omega t \right) + \hat{y} \sin \frac{(k_- - k_+)d}{2} \cos \left(\frac{k_- + k_+}{2} d - \omega t \right) \right] = \\ = E_0 (\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) \cos \left(\frac{k_- + k_+}{2} d - \omega t \right) \end{aligned} \quad (16.19)$$

Smjer linearne polarizacije je zarotiran za kut φ , čiji je iznos jasan iz (16.19):

$$\varphi = \frac{k_- - k_+}{2} d \quad (16.20)$$

Uz ova dva osnovna načina manipulacije s polarizacijama postoje i drugi načini. Poznat je Faradayev efekt. U njemu se pušta linearno polariziranu svjetlost kroz optički gusto sredstvo paralelno magnetskom polju. Efekt zaokreta linearne polarizacije je proporcionalan magnetskom polju, duljini prolaza kroz polje i naravno je jači za veći indeks loma prozirnog sredstva kroz koji svjetlo prolazi dok je u magnetskom polju. Nadalje, postoje i elektrooptički efekti u kojima se optička svojstva medija mijenjaju jačim električkim poljem. Razumijevanje ovih efekata, međutim, prelazi volumen jednosemestralnog kolegija o valovima.

17. Interferencija i difrakcija

Interferencija i difrakcija su dvije pojave utemeljene na principu superponiranja valova. Kako u kvantnoj fizici kvanti manifestiraju i valnu prirodu, jasno je da interferencija i difrakcija postoje i u kvantnom svijetu. U prošlosti je bilo velikog razlikovanja ta dva fenomena među kojima suštinske razlike nema. Naime kod interferencije se naglašava rezultat superpozicije titranja dva vala koji titraju sinkrono uz neku razliku u fazi. Kod difrakcije se gleda rezultat superpozicije i kontinuuma valova i/ili izvora koji su ponovno sinkroni i imaju određene fazne odnose.

17.1 Interferencija valova dvaju koherentnih točkastih izvora

POKUSI

Demonstrirat će se interferencija valova na vodi, akustičkih valova i svjetlosnih valova nastala sinkronim titranja dva izvora.

Polazimo od rada dva izvora titranja koji imaju iste frekvencije i identične faze:

$$\omega_1 = \omega_2 \quad i \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (17.1)$$

Općenito točka promatranja je različito udaljena od ta dva izvora, a i postoje razlike u fazi s kojom titranje iz ta dva izvora dolazi do točke promatranja. Valovi se u točki promatranja superponiraju. Kod konstruktivne interferencije dva vala imaju istu fazu pa im se amplitude titranja zbrajaju u resultantnom titranju. Ako su faze suprotne (razlika faza u točki promatranja je π) tada je resultantna amplituda razlika amplituda koje u točki promatranja proizvode izvori. Tada imamo destruktivnu interferenciju. Interferencijski efekti se matematički prate naročito u uvjetima takozvanog dalekog interferencijskog polja. To podrazumijeva da su amplitude titranja koje dolaze od dva izvora jednake (praktički) i da interferencijski efekti potječu isključivo od razlike faza među titranjima prispjelim od dva različita izvora. Ovaj uvjet rada u aproksimaciji dalekog polja se i matematički formulira a uz pomoć trokuta kojeg čine mala udaljenost među izvorima 1 i 2 označena kao d i individualne udaljenosti dvaju izvora od točke promatranja l_1 i l_2 . Nadalje se pretpostavlja da je dužina d okomita na l_1 . Kako ne bi bilo značajne razlike u amplitudi titranja, treba razlika udaljenosti biti do polovice valne duljine titranja:

$$l_2 - l_1 < \frac{\lambda}{2} \quad (17.2)$$

Uz pravokutnost trokuta imamo

$$d^2 = l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = \lambda l \quad (17.3)$$

Gdje je l srednja vrijednost udaljenosti. Izraz (17.3) je formulacija uvjeta dalekog interferencijskog polja.

Grubi rezultat o maksimumima i minimumima zračenja u uvjetima (17.3) dobit ćemo promatranjem slike u kojoj je položaj izvora razmaknut d a mi promatramo fenomene u smjeru okomitom na d , s time da dozvoljavamo mali odmak smjera promatrane točke u kojoj procjenjujemo intenzitet za kut ϑ . Ako je udaljenost okomice iz točke promatranja na nulti smjer od izvora, tada je udaljenost točke promatranja od nultog smjera $l \operatorname{tg} \vartheta$. Razlika optičkih putova za dolazak titranja iz dva izvora je $d \sin \vartheta$. Kad izvori titraju u fazi tada je uvjet maksimuma:

$$d \sin \vartheta = n\lambda \quad \text{ili} \quad kd \sin \vartheta = n2\pi \quad (17.4)$$

Uvjet minimuma je očito kada titranja iz dva izvora dolaze s razlikom od pola valne duljine:

$$d \sin \vartheta = (n + 1/2)\lambda \quad \text{ili} \quad kd \sin \vartheta = (n + 1/2)2\pi \quad (17.5)$$

O potankostima prostorne raspodjele zračenja u uvjetima dalekog polja možemo doznati iz kvantitativnije analize. Pođimo od opisa polja titranja u uvjetima dalekog polja (amplitude titranja koje od dva izvora dolaze su iste) za pojedini izvor:

$$A_i = A \cos(\omega t_i) \quad (17.6)$$

gdje je t_i vrijeme potrebno da signal dođe iz i -tog izvora u točku promatranja. Udaljenosti izvora su r_i . Ukupni opis superponiranih titranja tako postaje :

$$\begin{aligned} A(r, \vartheta, t) &= A \cos(\omega t - kr_1) + A \cos(\omega t - kr_2) = \\ &= 2A(r) \cos\left(\frac{kd \sin \vartheta}{2}\right) \cos(\omega t - kr) \end{aligned} \quad (17.7)$$

U gornjem izrazu je r srednja vrijednost radijusa za dva izvora. Faktor drugog kosinusa opisuje vremensku, titrajuću ovisnost. Cijeli ostali faktor je oblik prostorne modulacije signala i nije vremenski zavisian.

17.2 Svojstva interferentnog uzorka

Iz izraza (17.7) vidimo da se njime ne samo potvrđuju relacije za minimume i maksimume (17.4) i ((17.5) nego sada imamo izraz za amplitudu svjetla za bilo koji smjer. Dok vrijedi aproksimacija malih kutova, razmaci među smjerovima s istom rezultantom su ekvidistantni. Nadalje, ako su izvori pukotine, imamo u toj situaciji poznate ekvidistantne interferencijske pruge. Taj rezultatni uzorak uzimao se kao „potpis“ fenomena interferencije. Pri pisanju (17.6) nismo spomenuli koje je dinamičko porijeklo izvora vala. Kod EM valova to bi na primjer bio Poytingov vektor u točki promatranja. Kod akustičkih valova to bi bio akustički nadtlak a kod dvodimeziionalnih ili vodenih valova to bi bila lokalna amplituda proizvedena jednim od dva sinkrona izvora. No bit fenomena interferencije jest da se rezultatno titranje formira na jedinstven način.

Moguće je da studente zbuni pitanje očuvanja energije. Naime , mi smo pokazali i kod mehaničkih titranja (što uključuje i akustičke) i kod EM valova (preko Poyntingovog vektora) da je tok energije proporcionalan kvadratu amplitude titranja (medija, tlaka ili EM polja). Privid problema nastaju pri pojednostavljenom razmatranju minimuma i maksimuma. Ako uzmemo da je doprinos svakog izvora jedinična amplituda, tada prema (17.7) njihov interferencijski zbroj može biti za maksimum: $(1+1)^2 = 4$ a za minimum: $(1-1)^2 = 0$. Kako to usuglasiti sa zakonom očuvanja energije. Odgovor je jednostavan. Pri interferenciji nastaje reorganizacija distribucije energije. U slučaju (17.7) s istim jediničnim iznosom amplitude, izraz za tok energije postaje:

$$\left[2 \cos\left(\frac{kd \sin \vartheta}{2}\right) \right]^2$$

Ako to usrednjimo po smjerovima dobivamo ispravan rezultat:

$$\langle \text{tok energije} \rangle = \left[2 \cos\left(\frac{kd \sin \vartheta}{2}\right) \right]^2 = 4 \langle \cos^2\left(\frac{kd \sin \vartheta}{2}\right) \rangle = 2 \quad (17.8)$$

To je u potpunom skladu s očekivanjem da dva jedinična toka daju zbroj dvostruki jedinični tok.

17.3 Granice veličine točkastog izvora

U gornjem tekstu smo radi jednostavnosti pretpostavljali apsolutnu koherenciju izvora u smislu da se titrali ne samo istom frekvencijom nego da među njima nije bilo faznih razlika. Međutim interferencijski uzorak će nastati i ako je među njima i neku drugi, ali strogo definirani fazni odnos. Posljedica drugačijeg faznog odnosa će biti translacija rezultantnog interferencijskog uzorka ovisna o njihovoj faznoj relaciji. Postavlja se pitanje pod kojim uvjetima možemo osigurati da dva izvora budu koherentni. Pri upotrebi laserskih snopova koji obasjavaju istovremeno dvije (na smjer laserskog snopa okomito postavljene) pukotine (simetričnih položaja) prividno tog problema nema. Razmotrit ćemo pažljivije uvjete pod kojima neki izvor možemo smatrati podobnim izvorom za proizvodnju dva izvora koherentnog titranja. Naša je namjera na dvije pukotine razmaknute za već definirani razmak izvora d , osigurati da titranja koje dolazi iz izvora I (koji je razmazan u prostoru) svaka njegova točka daje na izvoru otprilike isti fazni odnos kao i centralna točka razmazanog izvor. Radi jednostavnosti postavljamo centralnu točku izvora na okomicu razmaka interferencijskih otvora. Jasno je da centralna točka izvora, koja je na okomici daje identične faze na dvije pukotine. Zapravo isto svojstvo imaju i druge točke izvora smještene na okomici razmaka pukotina. Postavlja se pitanje, za koji kut (pod kojim središte interferencijskih izvora vidi točku II koja leži izvan centralne zrake) ta točka daje na interferencijskim izvorima otprilike isti odnos faza kao i centar izvora? Za izvor koji je mnogo udaljeniji od interferencijskih pukotina nego što je razmak pukotina sve točke izvora vide razmak među pukotinama pod istim kutom. Ako je kut koji karakterizira položaj II ϑ , tada je razlika putove između II i dvaju otvora $d \sin \vartheta$; Interferencijski uzorak se gubi ako ta veličina postane bliska polovici valne duljine titranja. Sinus kuta pod kojim se vidi izvor II iz područja interferencijskih otvora je u aproksimaciji malih kutova odmak o od centralne zrake podijeljen s udaljenošću L izvora od interferencijskih otvora. Tako je konačni uvjet za koherenciju dijelove izvora na otvorima:

$$d \frac{o}{L} \ll \lambda \quad (17.9)$$

17.4 Usnopljavanje valova

Ovdje razmatramo nastojanje da stvorimo snop titranja, na primjer svjetla, no primjenjuje se i na sve druge valove, koji bi se bez povećanja poprečnog presjeka širio medijem. Lako ćemo se uvjeriti da to nije moguće. Prva pomisao nam je da uzmemo daleki izvor i na zastoru koji sprečava širenje titranja načinimo otvor. Što je otvor manji u odnosu na udaljenost izvora, snop koji prolazi iza zastora je sve paralelniji. No u tome postoji granica. Naime krajevi otvora mogu se smatrati izvorima interferencije; jasno je da nastaju interferencijske pruge koje proizvode titranje i izvan željenog smjera. Snop ima prirodnu divergenciju određenu razmakom krajeva otvora. Procjena divergencije može se načiniti upravo obratom (17.9). Kutni otvor snopa je reda veličine

$$\Delta \vartheta = \lambda / d \quad (17.10)$$

Zasada, dakle možemo snop svjetla smatrati interferencijskim maksimumom. Kod razmatranja difrakcije pokazat će se da je preciznije riječ o difrakcijskom maksimumu. No rezultat (17.10) ostaje nepromijenjen.

17.5 Općenito o difrakciji

Kao što smo već spomenuli, kod difrakcije razmatramo rezultat superpozicije kontinuuma različito smještenih izvora identične frekvencije fazno koherentnih izvora. Ponovno ćemo koristiti u proračunu aproksimaciju u kojoj su dimenzije izvora i/ili otvora kroz koje propuštamo zračenje male u odnosu na udaljenost na kojoj razmatramo rezultat fenomena difrakcije. U našim proračunima posebnu intuitivnu pomoć pruža Hygensov princip. Već smo upotrebljavali koncept valne fronte kao područja povezanih mjesta u kojima je stanje titranja identično. Hygensov princip izjavljuje da sve te točke valne fronte možemo smatrati izvorima vala koji koherentno titraju. Na primjer, ako imamo zastor koji je zapreka širenju vala i na njemu načinimo mali otvor, sve točke iste faze između rubova otvora su koherentni izvori novog vala. Prirodno, ako je originalni izvor titranja dovoljno daleko u smislu kriterija točkastog izvor izraza (17.9), tada se točke spojnice krajeva otvora mogu smatrati sinkronim izvorima titranja za fenomen difrakcije. Na ovom mjestu je najzgodnije upozoriti na dvije moguće varijante zastora, čije je razlika u temeljnom fizikalnom funkcioniranju. Zastor kao ideja nema fizikalno utemeljenje dok se ne pruži fizikalni mehanizam funkcioniranja. Mi smo već diskutirali međudjelovanje elektrona u atomu s titrajućim EM poljem. Vidjeli smo dva važna modusa rezultata. U jednom od njih dominira apsorpcijska komponenta za EM val. EM val vrši rad na elektronu; zračenje se apsorbira i promatrajući val u dubinu vidimo njegovo trnjenje u materijalu. Takav zastor je crni zastor; EM val ga grije i iza zastora ga nema. Kod reflektirajućeg zastora elektrona brzina je za 90 stupnjeva različita od amplitude električnog polja u fazi. Stoga se na elektronu ne vrši rad, ali elektron poništava svojim zračenjem EM polje iza zastora.

17.6 Primjena Hygensovog principa na pukotinu u neprolaznom zastoru

Neka je originalni izvor dovoljno daleko u smislu točkastog izvora relacije (17.9) i neka je otvor konačnih dimenzija (više valnih duljina titranja). Promotrimo električno polje koje se stvara postojanjem izvora I zastora Z i otvora u zastoru O. Neka su titranja pojedinih polja označena na slijedeće načine:

Titranje izvora: E_I

Titranje zastora: E_Z

Titranje dijela zastora koji bi zatvorio zastor do kraja: E_O

Tada je rezultatno titranje:

$$E = E_I + E_Z = E_I + E_Z + E_O - E_O = 0 - E_O = -E_O \quad (17.11)$$

Otvor možemo tretirati kao novi izvor zračenja faze suprotne onoj, koja poništava doprinos od izvora. Dakle iste faze kao i izvor! No, što je najvažnije, doprinosi iz izvora su koherentni! Sada možemo ovu pukotinu razdijeliti u N jednakih segmenata. Označit ćemo makroskopsku duljinu pukotine s D. Tada su dimenzije malih segmenata $d=D/N$. Računat ćemo superpozicijsku rezultantu doprinosa svih segmenata u uvjetima dalekog polja. Doprinosi svih izvora imaju istu amplitudu $A(r)$ gdje je r srednja udaljenost pukotine od točke promatranja fenomena difrakcije. Rezultatno polje je:

$$\begin{aligned}
E(r, \vartheta, t) &= A(r) [\cos(kr_1 - \omega t) + \cos(kr_2 - \omega t) + \dots + \cos(kr_N - \omega t)] = \\
&= A(r) \operatorname{Re} \left[e^{-i\omega t} (e^{ikr_1} + e^{ikr_2} + \dots + e^{ikr_N}) \right] = \\
&= A(r) \operatorname{Re} \left[e^{i(kr_1 - \omega t)} \frac{e^{i(Nkd \sin \vartheta)/2} \sin\left(\frac{N}{2} kd \sin \vartheta\right)}{e^{i(kd \sin \vartheta)/2} \sin\left(\frac{kd \sin \vartheta}{2}\right)} \right] = A(r) \frac{\sin\left(\frac{N}{2} kd \sin \vartheta\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \vartheta}{2}\right)} \cos(kr - \omega t)
\end{aligned} \tag{17.12}$$

Ovo je rezultat dobiven dijeljenjem izvora u N segmenata.

POKUS

Demonstrirat će se rezultat obasjavanja optičke rešetke koherentnim laserskim snopom.

Kada želimo rezultat za kontinuiranu pukotinu primjenjujemo proceduru koja je matematički ekvivalentna onoj kojom smo od (12.16) preko (12.19) i (12.20) došli do (12.21). Tako je konačni izraz za difrakcijsku amplitudu na pukotini:

$$E(r, \vartheta, t) = A(r, \vartheta = 0) \frac{\sin\left(\frac{1}{2} kD \sin \vartheta\right)}{\frac{1}{2} kD \sin \vartheta} \cos(kr - \omega t) \tag{17.13}$$

Intenzitet zračenja (kvadrat amplitude usrednjen po periodu) jest:

$$I(r, \vartheta) = I(r, 0) \frac{\sin^2\left(\frac{kD \sin \vartheta}{2}\right)}{\left(\frac{kD \sin \vartheta}{2}\right)^2} \tag{17.14}$$

Iz izraza (17.14) crtanjem ili analizom možemo procijeniti kutnu širinu difrakcijskog snopa. Naime, intenzitet pada na nulu svaki puta kada argument sinusa ima vrijednost π . Također je jasno da i lokalni maksimumi imaju daleko manja vrijednosti od maksimuma u centralnom smjeru. Stoga procjenjujemo (a to ćemo i neposredno verificirati) da se zračenje koncentrira u smjerove u kojima je

$$\frac{1}{2} kD \sin \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \tag{17.15}$$

Neposrednim uvrštavanjem baš graničnog slučaja možemo verificirati da već tamo intenzitet pada na 0.4 dijela glavnog maksimuma. U (17.15) možemo vidjeti još jedno svojstvo koje smo uočili na jednodimenzionalnom valnom paketu. Tamo su dimenzije paketa bile ograničene širinom područja valnog broja; njihov umnožak je bio stalan. Vrijednost $k \sin \vartheta$ možemo interpretirati kao neodređenost transverzalne komponente valnog vektora k_y : Δk_y . S druge strane je D neodređenost položaja u smjeru y: Δy . Tako su dvije neodređenosti povezane potpuno analogno vezi (12.23) :

$$\Delta y \Delta k_y \approx 2\pi \tag{17.16}$$

Štoviše u ovoj konfiguraciji jasno vidimo posljedice „stiskanja“ snopa u y smjeru na njegovo širenje u istom smjeru: što je manji D (uži snop) to je veći kut ϑ do kojeg snop odstupa od originalnog smjera 0.

POKUS

Demonstrirat će se rezultat obasjavanja pukotina raznih širina koherentnom svjetlošću

17.7 Usporedba realnog razlučivanja ljudskog oka i teorijski limit za razlučivanje

Najprije ćemo formulirati primjenu Rayleighevog kriterija za razlučivanje eksperimentalnih vrhova u analizi podataka. Neka u podacima imamo dva vrha u raspodjeli. Njih možemo razlučiti ako su toliko razmaknuti da je vrh drugog efekta bar tako daleko da je pao na minimum raspodjele prvog vrha. Difrakcijski vrh nastao zjenicom oka možemo procijeniti iz (17.15) u aproksimaciji malih kutova:

$$\Delta \vartheta \approx \frac{\lambda}{D} \quad (17.17)$$

Procjenjujemo idealno moguće razlučivanje ljudskog oka na temelju (17.6) u aproksimaciji malih kutova: promjer zjenice: 2mm, valna duljina svjetla $\lambda \approx 0.55 \mu\text{m}$. Tako dobivamo procjenu:

$$\Delta \vartheta_{idealno} \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{1}{4000} \quad (17.18)$$

Dobro oko (mladog čovjeka) može razlučiti dimenziju od 1 mm na udaljenosti od 2m. To znači da je realna rezolucija

$$\Delta \vartheta_{realno} = \frac{1}{2000} \quad (17.19)$$

Očito su dimenzije i raspored senzora (štapića i čunjića) takvi da oko ima praktički optimalnu kutnu rezoluciju.

17.7 Specificiranje uvjeta dalekog polja za koherenciju svih točaka unutar poprečnog presjeka difrakcijske pukotine

Nacrtamo li točkasti izvor I i pukotinu promjera D postavljenu poprečno na spojnicu izvora i položaja pukotine, ovako ćemo procijeniti da li je zračenje koje započinje s otvorom pukotine koherentno. Najugroženiji za zaostajanje u fazi su rubovi pukotine. Ako uzmemo za temeljnu udaljenost razmak ruba pukotine od izvora L, tada je put od izvora do ruba pukotine duži od puta od izvora do centra pukotine za iznos:

$$L - L \cos \alpha = 2L \sin^2 \frac{\alpha}{2} \ll \frac{\lambda}{2} \quad (17.20)$$

α je kut od spojnice izvora i središta pukotine do spojnice izvora i ruba pukotine. Nejednadžba pak ističe da razlika putova mora biti znatno manja od pola valne duljine kada nastupa negativna interferencija. Za male kutove se sinusni član u (17.20) može aproksimirati:

$$\sin^2 \alpha \approx \frac{\alpha^2}{4} \approx \left(\frac{1}{2} \frac{D/2}{L}\right)^2 \quad (17.21)$$

Uvrštavanjem (17.21) u (17.20) i sređivanjem konačno dobivamo

$$\lambda L \gg \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (17.22)$$

Stručna terminologija ovaj uvjet dalekog polja zove uvjetom Fraunhoferove difrakcije.

17.8 Difrakcijska amplituda i Fourierova konstrukcija rezultata iz oblika izvora polja

Usporedbom opisa polja zračenja (pravokutnik s osi y kao varijablom i stalnom amplitudom zračenja duž y dimenzije) i pravokutnom raspodjelom amplituda titranja u vremenu vidimo da su rezultati također u punoj analogiji. Analitički opis frekventnog sastava (13.35) u suštini je identičan analitičkom opisu (17.13) za raspodjelu rezultantnog zračenja po smjerovima. Vremenskoj varijabli odgovara poprečna koordinata, a frekvencijskoj varijabli odgovara u suštini $k \sin \vartheta = k_y$. Zapravo, ako pažljivo pratimo korake u izvodu (17.12) – (17.13) vidimo da je proračun difrakcijskog rezultata u suštini Fourierov transformat polja zračenja! U slijedećem semestru ćemo se susresti s difrakcijom zračenja na kristalnim strukturama; tako je gornja konstatacija i priprema za takve proračune. S druge strane sada je temeljna podloga za analogiju relacija „neodređenosti“ (12.23), (12.36) i (17.16) potpuno jasna. Sve su dobivene preko Fourierove transformacije pridruženih varijabli: vrijeme i frekvencija ili koordinata i valni broj/vektor.

17.9 Istovremena manifestacija interferencije i difrakcije

Površnim pogledom na tipični interferencijski eksperiment lako uviđamo da je naš prvi tretman u stvari nerealna idealizacija. Naime interferencijski izvori moraju imati konačne dimenzije. Stoga se unutar svakog od njih događa difrakcija. Potom dva difraktivna uzorka još interferiraju. Obradit ćemo taj slučaj; generalizacija na rad optičke rešetke, u kojoj također kombiniramo kontinuiranu difrakciju unutar jednog rebra rešetke s diskretnim doprinosima mnogo rebara čini se kasnije u studiju rada optičkog spektroskopa. U ovom kolegiju ćemo naznačiti ipak kakav rezultat i tada očekujemo.

Ako imamo dva konačna otvora kroz koja prolazi koherentno titranje, na svakom od njih nastaje difrakcijski raspored amplituda oblika (17.13), s tim da svaki doprinos u argumentu kosinusa ima drugu vrijednost udaljenosti od točke promatranja. Utjecaj različitih udaljenosti od izvora unutar $A(r,0)$ možemo zanemariti jer su te razlike neznatne u usporedbi s dimenzijom r . Tako je ukupni doprinos dva difraktivna uzorka :

$$A_{\text{rezult}} = A(r,0) \frac{\sin(\frac{1}{2}kD \sin \vartheta)}{\frac{1}{2}kD \sin \vartheta} [\cos(kr_1 - \omega t) + \cos(kr_2 - \omega t)] \quad (17.23)$$

Kako je razlika putova :

$$r_1 - r_2 = d \sin \vartheta \quad (17.24)$$

gdje je d razmak dvije difrakcijske pukotine svake širine D , to se primjenom izraza za sumu kosinusa u (17.23) i upotrebom (17.24) dobiva za resultantnu amplitudu:

$$A_{\text{rezult}} = A(r,0) \frac{\sin(\frac{1}{2}kD \sin \vartheta)}{\frac{1}{2}kD \sin \vartheta} 2 \cos \left[\frac{1}{2}(kd \sin \vartheta) \right] \cos \left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t \right) \quad (17.25)$$

Proračun intenziteta činimo kao i prije kvadriranjem i računanjem prosjeka po periodu titranja:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}kD \sin \vartheta\right)}{\left(\frac{1}{2}kD \sin \vartheta\right)^2} \cos^2\left(\frac{1}{2}kd \sin \vartheta\right) \quad (17.26)$$

Sada možemo uspoređivati rezultat kombiniranja difrakcije i interferencije uspoređujući (17.26) s rezultatom (17.14) za difrakciju i (17.7) za interferenciju (koji još doduše treba kvadrirati i ukloniti mu vremensku zavisnost pravljenjem vremenskog prosjeka). Vidimo da dva efekta ulaze u konačni izraz u obliku produkta. Prvi modulacijski faktor dolazi od difrakcije a faktor kosinusa na kvadrat od interferencije. Pojavno to znači da će se jednako razmknute interferencijske pruge dodatno modulirati ovojnicom difrakcijskog oblika (17.14).

Nadalje, možemo predvidjeti i izgled kombiniranja difrakcijskih elemenata konačno mnogo rebara difrakcijske rešetke. Ako bismo generalizirali proceduru korištenu za dobivanje (17.23) i dodali ne samo dva difrakcijska izvora, trebali bismo sumirati kosinuse u kojima su radiusvektori r_i jedan od drugog veći za uvijek jednako povećanje razmaka (17.24). rezultat tog sumiranja bi bio faktor oblika kakav ima faktor nezavisan o vremenu u (17.12) to jest:

$$I_N(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}kD \sin \vartheta\right) \sin^2\left(\frac{N}{2}kd \sin \vartheta\right)}{\left(\frac{1}{2}kD \sin \vartheta\right)^2 \sin^2\left(\frac{kd \sin \vartheta}{2}\right)} \quad (17.27)$$

gdje je N broj difrakcijskih izvora širine D, a međusobnog razmaka susjednih izvora d. Izraz (17.27) je temelj operiranja optičkih spektroskopa. Naime različiti valni brojevi daju svoje maksimume (osim za nulti smjer) na različitim kutovima. To znači da nam (17.27) pruža mogućnost spektralne analize upadnog zračenja. Doista, diskretne linije atomskih spektara Fraunhofer je otkrio upravo difrakcijskom rešetkom, ključnim instrumentom i današnjih najmodernijih spektroskopa.

17.10 Difrakcija zamučuje sjenu neprozirnih zapreka

Analizom prolaska koherentnog svjetla kroz otvore smo naučili da difrakcija proširuje područje osvjetljenja izvan očekivanih 0° karakterističnim rasporedom intenziteta po kutovima ϑ . Prirodno možemo slutiti da se isti fenomen javlja kod svake zapreke. Upotrijebit ćemo argumentaciju analognu onoj oko izraza (17.11), gdje smo ilustrirali primjenu Hygensovog principa na prolaz svjetla kroz otvor. Naime počinjemo s dolaskom koherentnog ravnog vala na prepreku konačnih dimenzija (i oštih rubova). Opet zatvaramo prolaz svjetla iz izvora I koherentnog vala: E_I , sa zračenjem objekta prepreke: E_o , i zračenjem zastora koji zastire cijelo područje (osim onog koji zastire objekt): E_Z . U konfiguraciji kada postoje svi zastori, iza njih je rezultantno polje jednako nuli.

$$E_I + E_o + E_Z = 0 \quad (17.28)$$

Ako uklonimo zastore, preostalo je superponiranje

$$E_{rezult} = E_I + E_o \quad (17.29)$$

Za E_o znamo brojna svojstva. Analitički opis je sažet u (17.13). Kod EM vala amplituda u (17.13) pada obrnuto proporcionalno udaljenosti. Neposredno iz zastora je faza vala emitiranog zaprekom suprotna onoj ulaznog vala, tako da je iza zapreke, a blizu njoj rezultanata nula i nastupa prava sjena. Međutim u daljini, gledajući poprečno na širenje zračenja, blizu paralele s produžetkom zapreke nastaju negativne i pozitivne superpozicije ulaznog vala i vala emitiranog od zapreke. Tako se u očekivanom području ruba sjene ne

javlja oštra sjene nego naizmjenično pojačavanje i slabljenje rezultante titranja. Međutim, kako se sve više udaljavamo od zapreke, njen doprinos slabi dok je doprinos izvora praktički stalan tako sjena postepeno nestaje. Figurativno se konstatiralo da svjetlost svija putanju iza prepreka. Prestanak sjene možemo i ovako procijeniti. Kutni rasap sjene je procijenjen za male kutove u (17.11). Ako s L označimo udaljenost na kojoj taj rasap dostiže poprečnu dimenziju prepreke D , mora biti ispunjeno:

$$L \frac{\lambda}{D} = D \quad (17.30)$$

Za udaljenosti koje su mnogo veće od udaljenosti L dobivene izrazom (17.30) sjene više nema!

18. Geometrijska optika

U dosadašnjim razmatranjima titranja stalno smo naglašavali i koristili valni aspekt fenomena na primjer svjetlosti. No postoji dio primjene znanja o EM fenomenima u kojima, da bismo došli do praktički iskoristivih rezultata, ne moramo upotrebljavati sve kompleksno znanje o EM fenomenima: Maxwellove jednadžbe, dinamiku kreiranja valova, fenomene difrakcije i interferencije i slične. Da bismo na brzinu proračunali mjesto, na kojem optički instrument stvara sliku ili koje povećanje od njega možemo očekivati, dozvoljeno je sa snopića svjetlosti koji imaju u principu ugrađen mehanizam difrakcije, upotrebljavati samo difrakcijski vrh kao opis glavnine svjetla i aproksimativno govoriti o zrakama svjetlosti (koje u suštini smjerom zapravo slijede Poyntingov vektor) kao o putanjama kojima se širi svjetlost pravocrtno potpuno ispuštajući iz vida njen valni karakter. Najprije ćemo ustanoviti temeljne postulate i provjeriti njihovo njihovu fizikalnu ispravnost i/ili ograničenja, a zatim se posvetiti najjednostavnijim optičkim elementima i instrumentima.

18.1 Svjetlost se širi pravocrtno

Ovaj izričaj smo kritički diskutirali pokazujući da se svjetlo širi i u područje sjene „iza ugla“. U geometrijskoj optici očekujemo da difrakcijske aspekte možemo zanemariti. Tijekom viših godina studija ustanovit ćemo da snažna gravitacija također svija putanju svjetla; i taj aspekt ovdje se zanemaruje.

18.2 Svjetlo se od reflektirajuće površine odbija pod jednakim kutom pod kojim je na površinu upalo

Kako bi studenti stekli pouzdanje u razumijevanje fenomena refleksije ipak ćemo se na trenutak vratiti pravom fizikalnom opisu događanja; t.j. zraci svjetla pripisujemo snopić titranja EM putujućeg vala. Valna fronta (koja opisuje mjesta s istim stanjem titranja-istom fazom) je okomica na smjer širenja svjetla. Pri padu svjetla na reflektirajuću površinu pod nekim kutom, ne aktiviraju se svi elektroni površinskog sloja sinkrono. Među elektronima u njihovom titranju nastaju razlike u fazi koje odgovaraju razlikama u fazi koje su unijele pojedine komponente ulaznog snopa zavisno o lokaciji elektrona. Kako se radi o nepropusnom zastoru, ovo titranje elektrona je u protufazi s titranjem EM vala u području iza zastora. (U pravoj mikroskopskoj slici pojam automatske zapreke ne postoji; ovdje se vidi kako svjetla iza zastora nema jer elektroni materijala svojim titranjem poništavaju EM val koji bi se inače iza zastora realizirao). No ovo poništavanje ima i za početnike neočekivanu posljedicu. Titranje elektrona koje poništava val iza zastora stvara EM vala ispred zastora, čija valna fronta (radi faznih odnosa elektrona površine) je potpuno simetrična valnoj fronti koji bi imao val bez zastora uzimajući refleksijsku površinu za os simetrije. Tako smo istovremeno opravdali početnu pravilnost naslova 18.2 i stekli razumijevanje o tome što se desilo s valom iza zastora.

Kao malu primjenu 18.2 možemo razmotriti nastanak virtualne slike predmeta postavljenog pred zrcalo. Izvor I šalje razne zrake svjetla I_k na reflektirajuću površinu. One se sve reflektiraju svaka pod svojim kutom refleksije \mathcal{G}_k simetrično svom upadnom kutu. Oko koje stvara sliku (mehanizmom koji ćemo diskutirati) prima te zrake i rekonstruira sliku kao da su zrake izišle iz predmeta smještenog iza zastora na lokaciji koja je simetrična položaju izvora uzimajući reflektirajuću plohu kao temelj simetrije.

Na ovom mjestu ćemo pokazati alternativni izvod zakona refleksije svjetlosti koji se doduše ne oslanja na mikroskopski opis prirode svjetla nego ilustrira mogućnost opisa fenomena principom ekstrema koji je naš česti vodič u najapstraktnijim razmatranjima na primjer teorije polja. Ovdje je to Fermatov princip. Fermatov princip konstatira da svjetlost putuje stazom duž koje je za putovanje potrebno najmanje vremena. Jasno je da i zakonitost o pravocrtnom širenju svjetlosti jest u skladu s Fermatovim principom. Promotrimo dvije točke s iste strane refleksijske površine udaljene od površine za udaljenostima h_1 i h_2 . Neka je udaljenost među njima D . Označimo položaj točke na površini u kojoj bi se svjetlo trebalo reflektirati s x u odnosu na nožište okomice na površinu iz točke 1. tada je duljina staze od točke 1 do točke na površini:

$$l_1 = \sqrt{h_1^2 + x^2} \quad (18.1)$$

Udaljenost druge točke od reflektirajuće točke jest

$$l_2 = \sqrt{h_2^2 + (D - x)^2} \quad (18.2)$$

Vrijeme potrebno da svjetlost brzinom v prijeđe zbroj dvije udaljenosti jest:

$$t = \frac{1}{v} (\sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (D - x)^2}) \quad (18.3)$$

Stazu svjetlosti variramo mijenjanjem položaja x . Prema Fermatovom principu vrijeme treba biti minimalno za putanju kojom svjetlost doista putuje. To znači u prvom koraku da prva derivacija izraza (18.3) po položaju točke refleksije x mora biti jednaka nuli. Izračunavanjem prve derivacije i izjednačavanjem s nulom dobivamo:

$$\frac{x}{l_1} = \frac{D - x}{l_2} \quad (18.4)$$

Ta relacija jest odraz jednakosti upadnog i reflektirano kuta svjetlosti!

18.3 Snellov zakon loma svjetlosti

Iako smo ga već izveli u prijašnjim razmatranjima, pokazat ćemo da ga je moguće izvesti i iz Fermatovog principa. To je spoznajno važno jer pokazuje kako se cijela geometrijska optika može na njemu utemeljiti. Stoga nam ideja da se najtemeljnije zakonitosti mogu formulirati principom određivanja ekstrema postaje bliskija. Polazimo od crteža s analognim oznakama kao i kod izvoda zakona refleksije s tim da se točke 1 i 2 nalaze sa suprotnih strana kontaktne površine dva medija indeksa loma n_1 i n_2 . U notaciji jednadžbi (18.1) do (18.3) proteklo vrijeme za kontaktnu točku x jest:

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{n_1 l_1}{c} + \frac{n_2 l_2}{c} \quad (18.5)$$

Izjednačavanjem derivacije proteklog vremena po položaju točke x sada se dobiva:

$$n_1 \frac{x_1}{l_1} = n_2 \frac{D - x}{l_2} \quad \langle \implies \rangle \quad n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2 \quad (18.6)$$

18.4 Snop svjetlosti koji je jednom stazom došao od točke A do točke B može pod istim uvjetima istom stazom doći iz B u A.

Ova izjava se mora uzeti s oprezom. Naime, tu se mogu uplesti problemi s polarizacijom i obratom vremena za nju. U optički aktivnim medijima mora se obratiti pažnja da obrat putovanja bude u svakom smislu potpun, naročito u smislu rotacije električnog vektora kod cirkularno polariziranog svjetla.

18.5 Zrcala

Površine zrcala po pretpostavci potpuno reflektiraju svjetlo sukladno zakonu refleksije 18.2. Mi smo već obradili ravno zrcalo i tvorbu slike ravnim zrcalom u istom odsječku. Eliptičko zrcalo je vrlo lako za razumjeti temeljem Fermatovog principa. Definicija je elipse da je zbroj dva radijusa vektora od fokusa do bilo koje točke elipse isti. To pak znači da sve trajektorije od fokusa do fokusa s jednom refleksijom imaju isto vrijeme trajanja. Sve zrake iz jednog fokusa sreću se istovremeno u drugom fokusu. Kako nam geometrijska analiza pruža rezultat da je parabola limitirajući slučaj elipse čiji je drugi fokus u beskonačnosti, neposredno slijedi da se sve zrake koje duž osi parabole stižu iz beskonačnosti sijeku u preostalom fokusu! S druge strane, idealno izvor svjetla u fokusu paraboličnog zrcala tvori snop svjetla paralelan osi parabole (ili u prostoru paraboloida). Ipak prema našem znanju o difrakciji (17.17) postoji divergencija snopa iznosa:

$$\Delta\vartheta = \frac{\lambda}{D}$$

gdje je D poprečna dimenzija snopa. Očito snop ima to manju divergenciju, što su veće dimenzije paraboličnog reflektora!

18.6 Uvodni komentari o pojednostavljenjima koje se koristi u ovom opisu leća, a primjenljivi su i na optička zrcala

Često korišten pojam u geometrijskoj optici je fokus; idealna točka u kojoj bi se trebale ukrštati zrake svjetla koje paralelno osi leće dolaze iz beskonačnosti. Ispostavlja se da iz cijelog niza razloga koji se nazivaju aberacijama to u realnosti nije jednostavno ispuniti. Neke aberacije imaju porijeklo i u različitoj disperziji za razne valne duljine svjetla. Mi ćemo raditi u aproksimaciji dolaska zraka na optičke elemente pod malim kutom u odnosu na njihove optičke osi (osi simetrije). Ova se aproksimacija u literaturi susreće pod raznim imenima: Gaussova aproksimacija, paraksijalna aproksimacija i slično. Pokazat ćemo sada kako plankonveksna leća ima u gornjoj aproksimaciji važna svojstva fokusa: a) sve se zrake koje dolaze iz beskonačnosti sijeku u jednoj točki na osi b) sve te zrake iz beskonačnosti dolaze u fokus s istim brojem valnih duljina, to jest leća ih u fokusu ima sve u istoj fazi.

Da bismo dokazali ove tvrdnje početi ćemo od kuta za koji se zraka zakreće u kutu pri dolasku na tanku prizmu. Neka prizma ima bazu l i visinu w ; neka je stranica prizme na koju dolazi svjetlo okomita na bazu. Kutni otvor prizme je u aproksimaciji malih kutova:

$$\alpha = \frac{l}{w} \quad (18.7)$$

U vrhu prizme zraka i ne putuje prizmom; brzina njene fronte tamo je c . U dnu prizme svjetlo prolazi sredstvom prizme indeksa loma n . Stoga je brzina svjetla tamo reducirana na c/n . Dok je svjetlo donjim dijelom prizme prevalilo put l , gore je prevalilo put nl . Razlika prevaljenih putova je stoga je $(n-1)l$. Radi toga se svjetlosna fronta (identično stanje titranja) zaokrenula za kut:

$$\vartheta = \frac{n-1}{w}l = (n-1)\alpha \quad (18.8)$$

S druge strane se $w\mathcal{G}$ može interpretirati kao ono produljenje puta svjetlosti zrakom koje osigurava da slomljena zraka s vrha prizme nakon loma u nožištu okomice povučene iz donje izlazne točke prizme ima isti broj prijeđenih valnih duljina kao i donja zraka pri izlasku iz prizme!

Nacrtajmo sada konfiguraciju plankonveksne leće na koju s lijeve strane nailazi snop svjetla paralelan njenoj osi simetrije. neka je prva površina leće ravna a druga ima radijus zakrivljenosti R_D . Leću sada možemo smatrati kontinuumom tankih prizmi s kutom prizme

$$\alpha = h / R_D \quad (18.9)$$

Da bi leća lomila sve zrake u istu točku fokusa fokalne daljine f temeljni je uvjet da kut loma pojedine zrake u odnosu na originalni smjer paralelan osi leće δ :

$$\delta = \frac{h}{f} \quad (18.10)$$

gdje je h vertikalno odstupanje te zrake pri ulasku u leću. Prema izrazu za zaokret zrake pri prolazu kroz prizmu (18.8) i kutu prizme (18.9), kut zaokreta zrake koja je došla s vertikalnim odstupanjem h jest

$$\delta = (n-1) \frac{h}{R_D} \quad (18.11)$$

Izraz (18.11) dokazuje i naše tvrdnje a) i b) i daje izraz za proračun fokalne udaljenosti plankonveksne leće opisanih svojstava:

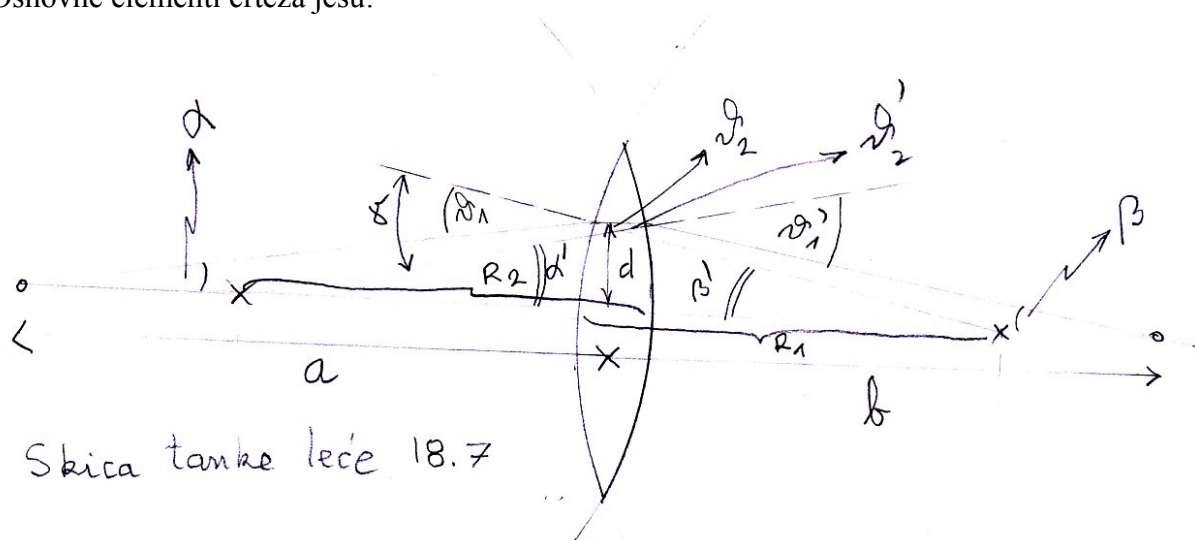
$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_D} \quad (18.12)$$

Razmatranje je lako generalizirati na slučaj da je i druga strana leće izbočena i da je radijus zakrivljenosti lijeve strane R_L . Tada bi za fokalnu udaljenost vrijedilo:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_L} \right) \quad (18.13)$$

18.7 Konjugacijska jednadžba za tanku leću

Osnovne elementi crteža jesu:



Položaj predmeta na osi udaljen a od leće iz kojeg izlazi zraka pod kutom α prema osi leće i pada na leću pod upadnim kutom \mathcal{G}_1 . Ta se zraka lomi na kut \mathcal{G}_2 unutar leće i putuje visinom

d kroz leću. Na izlaznu površinu leće dolazi pod upadnim kutom ϑ_2' , da bi iz leće izašla pod izlaznim kutom ϑ_1' i konačno presjekla os leće na mjestu slike predmeta na udaljenosti b od leće. Kut pod kojim ta zraka siječe os leće je β .

Desna ploha leće ima radijus zakrivljenosti R_2 i centar zakrivljenosti smješten na osi leće. Linija koja iz tog centra zakrivljenosti ide u točku izlaza zrake iz leće tvori s osi leće kut α' . Ta ista linija je ujedno okomica od koje se računaju kutovi u zakonu loma: ϑ_2' i ϑ_1' .

Lijeva ploha leće ima radijus zakrivljenosti R_1 i centar zakrivljenosti smješten na osi leće. Linija koja iz tog centra zakrivljenosti ide u točku ulaska zrake u leću tvori s osi leće kut β' .

Ta ista linija je ujedno okomica od koje se računaju kutovi u zakonu loma: ϑ_1 i ϑ_2 .

Kut γ je vanjski kut za kutove ϑ_2 i ϑ_2' , a i za kutove α' i β' . Iz Snellovog zakona za male kutove vrijedi:

$$\vartheta_1 = n\vartheta_2 \quad (18.14)$$

$$\vartheta_1' = n\vartheta_2' \quad (18.15)$$

Kombiniranjem najprije svojstva vanjskih kutova a potom relacija (18.14) i (18.15) slijedi:

$$\vartheta_1 = \alpha + \alpha' = n\vartheta_2 \quad (18.16)$$

$$\vartheta_1' = \beta + \beta' = n\vartheta_2' \quad (18.17)$$

Zbrajanjem desnih jednakosti iz (18.16) i (18.17) dobivamo:

$$n(\vartheta_2 + \vartheta_2') = \alpha + \alpha' + \beta + \beta' \quad (18.18)$$

No temeljem svojstva vanjskog kuta γ koje je prije izvoda već istaknuto slijedi:

$$\vartheta_2 + \vartheta_2' = \gamma = \alpha' + \beta' \quad (18.19)$$

Uvrštavanjem (18.19) u (18.18) dobivamo:

$$(n-1)(\alpha' + \beta') = \alpha + \beta \quad (18.20)$$

U aproksimaciji malih kutova sve veličine gore, osim indeksa loma leće n , mogu se iščitati kao sinusi kutova odnosno omjeri iste veličine d i raznih položaja na osi leće, pa imamo:

$$(n-1)\left(\frac{d}{R_1} + \frac{d}{R_2}\right) = \frac{d}{a} + \frac{d}{b} \quad (18.21)$$

Gornji izraz nakon kraćenja i korištenja već poznate veze fokusa i svojstva zakrivljenosti i indeksa loma leće (18.13) postaje znamenita konjugacijska jednadžba:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f} \quad (18.22)$$

KOMENTAR:

Kako je cilj kolegija utemeljenje razumijevanja najvažnijih fenomena oko nas ovdje ne ćemo razmatrati posljedice gornjeg izraza kojeg se u američkim udžbenicima s očitim razlogom naziva i „lensmakers“ formula (formula izrađivača leća). Obrađena je jedino (bi)konveksna tanka leća. Analogan izraz vrijedi i za druge geometrije. Dok ova leća fokusira zrake koje dolaze paralelno s osi leće u žarište (fokus), divergentne leće ih čine divergentnim snopom koji kao da je izašao iz jedne točke ispred leće; to je ponovno žarište. Kada se zrake emitirane u raznim smjerovima iz jedne točke predmeta sijeku ponovno u jednoj točki, na tom se mjestu formira realna slika predmeta (nju se može vidjeti da se formira na zastoru postavljenom na mjestu formiranja slike). Ako zrake emitirane iz točke predmeta divergiraju tako da se njihovim produživanjem unatrag ipak dobije zajedničko presjecište, tamo postoji virtualna slika predmeta; ako naše oko postavimo tako da mu takve divergentne zrake dolaze u susret, oko će registrirati kao da je predmet doista na lokaciji virtualne slike. Na hrvatskom jeziku postoji djelo akademika Paića (Osnove fizike iv) u kojem su na otprilike 800 strana dominantno izloženi aspekti geometrijske optike.

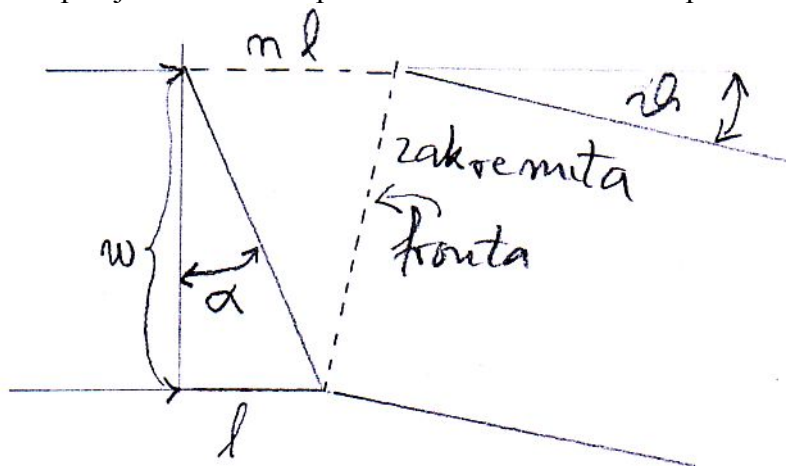
18.8 Globalna svojstva leća

Leće dijelimo na konvergentne ($f > 0$). Ima ih raznih vrsta: bikonveksna, plan konveksna i konkavno konveksna; svima im je srednji dio deblji od rubnog.

Divergentne leće ($f < 0$) imaju analogne podvrste s time da im je središnji dio tanji od rubnog. Važan parametar leće je njen dioptar.

$$\text{dioptar leće} = \frac{1}{f(\text{u metrima})} \quad (18.23)$$

Ljudsko oko ima u prosjeku oko 33 dioptra. Za bliske tanke leće dioptri se mogu zbrajati.



18.9 Osnovne činjenice o ljudskom oku

Savršenost ljudskog oka, tog najkvalitetnijeg senzora u našem tijelu ne će se posebno naglašavati, niti će se opisivati sve njegove važne potankosti kao na primjer automatska i ponekad psihološki kontrolirana otvorenost zjenice. U oku iza otvora-zjenice slijedi drugi bitni element: očna leća promjenljive fokalne duljine. Slika predmeta se formira na plohi mrežnice. Temeljni senzori pri površini oka su štapići i čunjići. Pikseli CCD kamere su njihovi primitivni analogoni. Čunjići dimenzije 4 mikrona su najosjetljiviji element senzorskog sustava i imaju najveću gustoću oko područja žute pjege, najosjetljivijeg dijela oka. Elementarni senzori završavaju s nitima živaca. No prije transfera žičanog impulsa u mozak postoji više lokalnih čvorova živčanih niti tako da možemo očekivati da se u njima dešava analogon „preprocessingu“ složenog informatičkog sustava. To jest, ne ide nit svakog elementa u mozak nego izgleda da se dio obrade signala dešava već prije u slojevima mrežnice. Samo za orijentaciju osjetljivosti oka u uvjetima zamračenja okoline: oko dvadesetak fotona je potrebno da bismo u mozgu imali dojam lokaliziranog bljeska. (Foton je osnovni paketić svjetlosne energije kako ćemo spoznati u slijedećem semestru).

18.10 Temelji za konstrukciju slike crtežom u okviru aproksimacije malih kutova.

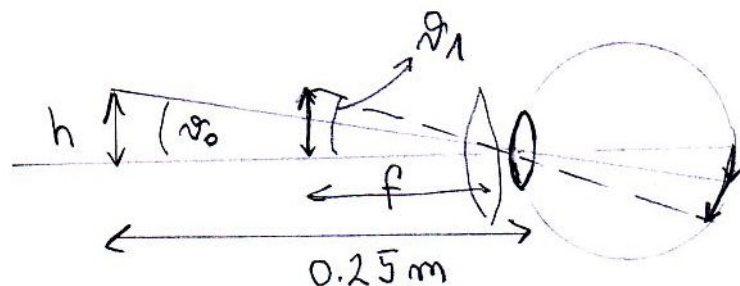
Zrake koje dolaze iz beskonačnosti paralelno osi leće sijeku se u realnom ili virtualnom fokusu.

Zrake koje izlaze iz realnog ili ulaze u virtualni fokus postaju paralelne.
 Zrake koje ulaze u središte leće prolaze kroz nju nepromijenjenim smjerom
 Zrake koje dolaze paralelno iz beskonačnosti pod malim kutom sijeku se u fokalnoj ravnini.
 Njihovo sjecište određujemo kao presjek zrake paralelnog snopa koja ide središtem leće i okomice na os leće povučene iz fokusa leće.

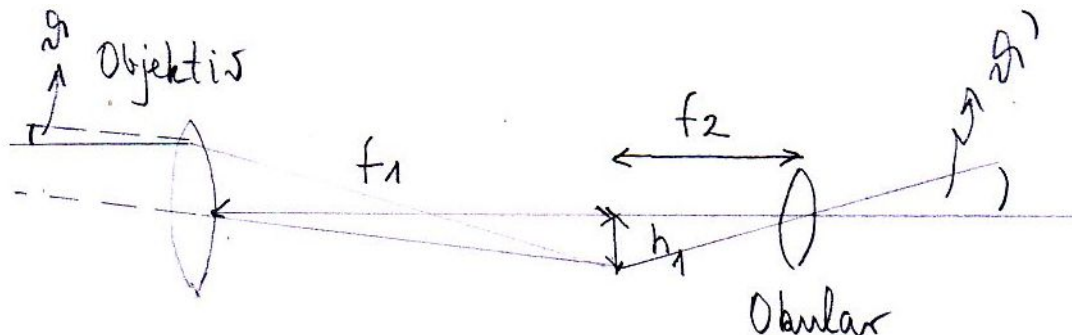
18.11 Povećalo

Ljudsko oko u prosjeku vidi optimalno kada je predmet smješten oko 25 cm od oka. Dimenziju slike predmeta na mrežnici možemo procijeniti povlačenjem zrake od ruba predmeta čija je baza na pravcu osi očne leće kroz centar leće do mrežnice. Vertikalno odstupanje te točke od osi leće je veličina optimalne slike predmeta za normalno oko. Ta se slika može na mrežnici povećati konvergentnom lećom koju stavljamo neposredno pred oko a predmet u fokus te dodatne leće. Bez leće smo predmet vidjeli pod kutnim otvorom:

$$\vartheta_0 = \frac{h}{0.25} \quad \text{novi aranžman} \quad \vartheta_1 = \frac{h}{f} \quad \text{linearno povećanje} \quad \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0} = \frac{0.25}{f} \quad (18.24)$$



18.12 Teleskop



U teleskopu imamo minimalno dvije leće objektiv i okular. Kako se predmet nalazi u beskonačnosti najprije moramo načiniti njegovu realnu sliku da bismo je okularom mogli povećavati. Ponovno jedna dimenzija predmeta leži na osi teleskopskog sustava. Druga se dimenzija vidi pod ulaznim kutom ϑ . Tada je visina realne slike u fokalnoj ravnini h_1 , a u našoj aproksimaciji je s fokalnom duljinom objektiva povezana relacijom:

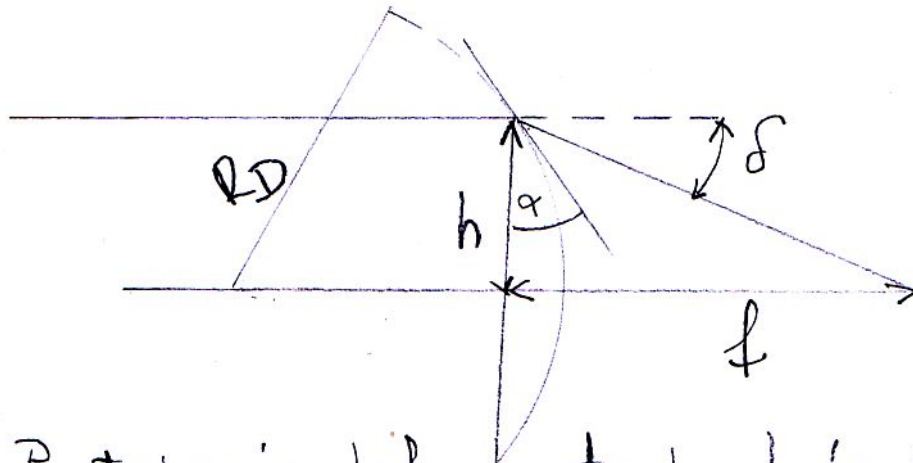
$$h_1 = \vartheta f_1 \quad (18.25)$$

Kao i kod povećala tu realnu sliku koja sada predstavlja predmet postavlja se u žarišnu ravninu okulara čija je fokalna karakteristika f_2 . Novi kut pod kojim se vidi predmet iz beskonačnosti je:

$$\vartheta' = \frac{h_1}{f_2} \quad (18.26)$$

Iz dviju gornjih relacija uvrštavanjem slijedi kutno povećanje:

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{f_1}{f_2} \quad (18.28)$$



Postojanje fokusa tanke leće (18.12)

18.13 Mikroskop

Kod mikroskopa predmet je blizu žarišne ravnine tako da se njegova realna slika stvara dosta daleko na udaljenosti L . Stoga je fokalna duljina okulara f_2 mnogo veća od fokalne duljine objektivu f_1 . Ako je poprečna dimenzija objekta promatranja y , tada je visina realne slike iza objektivu, a ispred okulara:

$$h_1 = \frac{L}{f_1} y \quad (18.29)$$

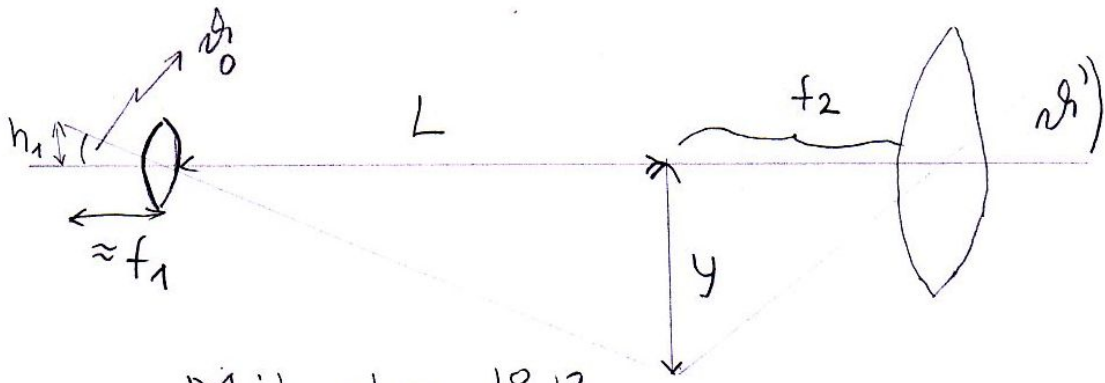
Okular dalje postupa s tom realnom slikom tehnikom povećala. Stoga se objekt promatranja vidi pod kutom :

$$\vartheta' = \frac{(L/f_1)y}{f_2} \quad (18.30)$$

Normalno bi ljudsko oko vidjelo predmet pod kutom ϑ_0 opisanim u (18.24). Time je kutno povećanje:

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta_0} = \frac{0.25L}{f_1 f_2} \quad (18.31)$$

Možemo spomenuti da je ovo pojednostavljena analiza. Pri nastojanjima da dobijemo što veća povećanja nailazimo na prirodnu granicu jer zrake zapravo predstavljaju difrakcijske maksimume. Difrakcija postaje preprekom kada se povećanje nastoji podići iznad faktora reda veličine 5000. Za veća povećanja upotrebljavaju se zrake kraćih valnih duljina; elektronski mikroskop.



Mikroskop 18.13