

3. Slobodno i prigušeno titranje

1. Ključni pojmovi

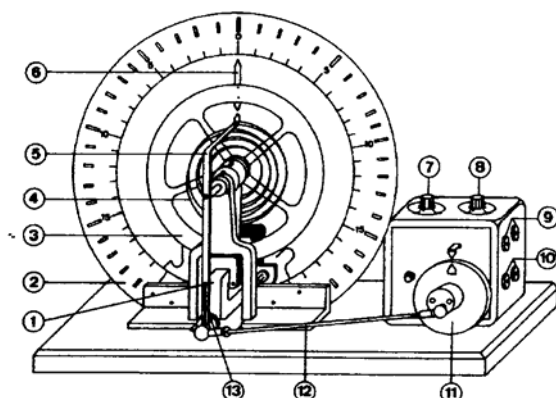
Slobodno i prigušeno titranje. Linearna diferencijalna jednačba. Logaritamski dekrement. Kružno njihalo. Moment tromosti. Faktor dobrote.

2. Teorijski uvod

Kružno njihalo (slika 1) je tijelo učvršćeno tako da može rotirati oko jedne osi i oko te osi ima moment tromosti I (bakreni kotač (3)). Spiralna opruga učvršćena je jednim krajem na osovinu koja nosi tijelo, a drugim krajem na čvrstu podlogu. Na taj način njihalo ima točno određen ravnotežni položaj, a spiralna opruga protivi se odstupanju od ravnoteže zakretnim momentom $T(\varphi)$ koji je proporcionalan kutu otklona φ :

$$T(\varphi) = -D\varphi, \quad (1)$$

gdje je D konstanta spiralne opruge.



- 1- elektromagnet
- 2- skala
- 3- bakreni kotač
- 4- spiralna opruga
- 5- poluga za prijenos
- 6- kazaljka njihala
- 7- fino namještanje broja okretaja
- 8- grubo namještanje broja okretaja
- 9- utičnice za napajanje motora
- 10- mjerne utičnice
- 11- radilica i ekscentar
- 12- pobudna šipka
- 13- utor za namještanje amplitude

Slika 1. Kružno njihalo

Slobodne oscilacije. Pusti li se kružno njihalo da slobodno titra, diferencijalna jednačba njegova gibanja glasi:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D\varphi = 0. \quad (2)$$

Ova jednačba formalno je identična jednačbi za harmonijske oscilacije tijela na opruzi i ima općenito rješenje:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t - \psi), \quad (3)$$

gdje je φ_0 amplituda titranja, ψ početna faza, a ω_0 je vlastita kružna frekvencija njihala, određena relacijom:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{D}{I}}. \quad (4)$$

Ovdje T_0 predstavlja period neprigušenog titranja.

U danom eksperimentalnom slučaju, konstante φ_0 i ψ utvrđuju se postavljanjem početnih uvjeta, tj. odklonom i brzinom u $t = 0$.

Prigušene oscilacije. Ako uvedemo prigušivanje proporcionalno kutnoj brzini, diferencijalna jednačina gibanja glasi:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = 0, \quad (5)$$

gdje je C koeficijent gušenja, u našem slučaju uzrokovan vrtložnim strujama u bakrenom kotaču, te razmjernan struji koja teče kroz elektromagnet (1). Opće rješenje ove jednačine jest

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t - \psi), \quad (6)$$

gdje je δ faktor gušenja

$$\delta = \frac{C}{2I}, \quad (7)$$

a kružna frekvencija ω_1 prigušenih oscilacija dana je relacijom:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (8)$$

Uočavamo da je frekvencija ω_1 realna za potkritična prigušenja ($C^2 < 4DI$). Amplituda se eksponencijalno smanjuje s vremenom, a omjer uzastopnih amplituda je konstantan:

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \frac{\varphi_0 e^{-\delta t_n} \cos(\omega_1 t_n - \psi)}{\varphi_0 e^{-\delta(t_n+T)} \cos(\omega_1 t_n + \omega_1 T - \psi)} = e^{\delta T}, \quad (9)$$

jer je $\omega_1 T = 2\pi$.

Definiramo logaritamski dekrement gušenja Λ :

$$\Lambda = \delta T = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}. \quad (10)$$

Faktor dobrote. Energija pohranjena u oscilatoru smanjuje se u vremenu prema zakonu:

$$\langle E(t) \rangle = \langle E_0(t) \rangle e^{-t/\tau}, \quad (11)$$

gdje je $\tau = 1/2\delta$. Faktor dobrote definira se kao:

$$Q = 2\pi \frac{\text{pohranjena energija}}{\langle \text{gubitak energije u jednom periodu} \rangle}, \quad (12)$$

što za slabo gušeni oscilator iznosi (vidi "Udžbenik fizike Sveučilišta u Berkeleyu" - Svezak I, str. 128):

$$Q \approx \frac{2\pi E}{(E/\tau)T} \approx \omega_1 \tau = \frac{\omega_1}{2\delta}. \quad (13)$$

3. Mjerni uređaj i mjerenje

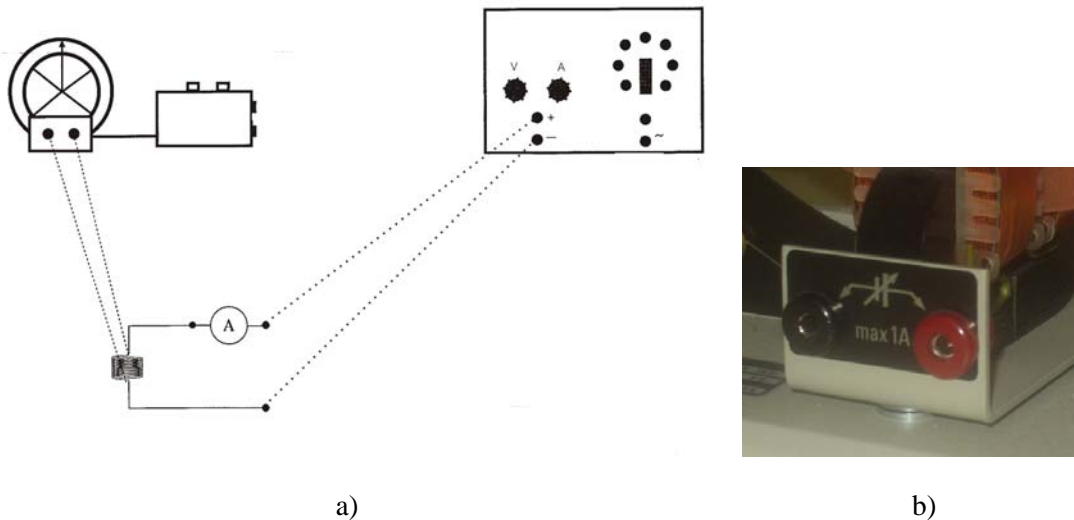
Elementi mjernog postava prikazani su na slici 2. Kružno njihalo (slika 1) sastoji se od bakrena kotača (3) čija je osovina kugličnim ležajevima učvršćena na postolje. Kotač je pričvršćen na jedan kraj spiralne opruge (4). Drugi kraj spiralne opruge nepomičan je prilikom proučavanja slobodnih i prigušenih oscilacija (tj. ne uključujemo motor). Prigušivanje titranja postiže se vrtložnim strujama koje elektromagnet (1) izaziva u bakrenom kotaču. Struja se u elektromagnet dovodi preko utičnica sa stražnje strane kružnog njihala (slika 3b). Jačina prigušenja može se kontinuirano regulirati pomoću jakosti struje koju mjerimo ampermetrom.

Prilikom proučavanja slobodnih i prigušenih oscilacija, najprije je potrebno kazaljku poluge za prijenos (5) namjestiti u nulti položaj. Zatim se kazaljka njihala (6) rukom pomakne iz ravnotežnog položaja do neke amplitude te pusti da bi se promatralo titranje. Amplituda titranja očitava se na skali (2), a period titranja određuje se zapornom urom. Za preciznije određivanje perioda titranja mjeri se vrijeme potrebno za npr. 10 titraja (kada je to moguće) pa se izmjereno vrijeme podijeli s brojem titraja. Za proučavanje prigušenih oscilacija u potkritičnom režimu koristi se izvor istosmjerne struje (slika 3a).¹ Struja I_B jakosti manje od $I_{krit} \approx 1\text{ A}$ (vidi ograničenje za elektromagnet) mjeri se ampermetrom spojenim u seriju. Izborom napona mijenja se struja I_B , a time i prigušenje. Da bi se izbjeglo pregrijavanje u nadkritičnom režimu duljina mjerenja se reducira na par minuta.



Slika 2. Elementi mjernog postava

¹ Lijevim potenciometrom (V) određuje se napon izvora, a desni potenciometar (A) služi kao graničnik za maksimalnu jakost struje. Ako je napon takav da bi struja premašila zadanu maksimalnu vrijednost, upali se crvena lampica iznad graničnika.



Slika 3. a) Shema spajanja; b) Priključnice za struju gušenja sa stražnje strane kružnog njihala

4. Zadaci

1. Odredite period titranja i karakterističnu kružnu frekvenciju za neprigušeno titranje. Učinite po 3 mjerenja deseterostrukih perioda za 2 različite početne amplitude i provjerite ovisi li rezultat o početnoj amplitudi
2. Uključite prigušenje! Odredite period i frekvenciju prigušenog titranja za 2 različite struje prigušenja.
3. Izmjerite amplitude φ_n za desetak uzastopnih titraja (uvijek s iste strane skale). Ponovite postupak za 3 različite struje prigušenja manje od 1 A, razmaknute za 0.2–0.3 A. Iz jednadžbe (10) prikažite φ_n kao funkciju od φ_0 . Transformirajte dobivenu ovisnost tako da bude pogodna za crtanje linearnog grafa. Iz nagiba pravca odredite logaritamski dekrement Λ za 3 različite struje prigušenja. Sve pravce prikažite na istom grafu!
4. Odredite faktor dobrote za ta 3 prigušenja.
5. Mijenjajući kratkotrajno struje prigušenja iznad 1 A provjerite je li moguće postići režim nadkritičnog gušenja s aparaturom na slici 2. Pazite da struje jakosti preko 1 A ne teku dulje od 2–3 minute!