

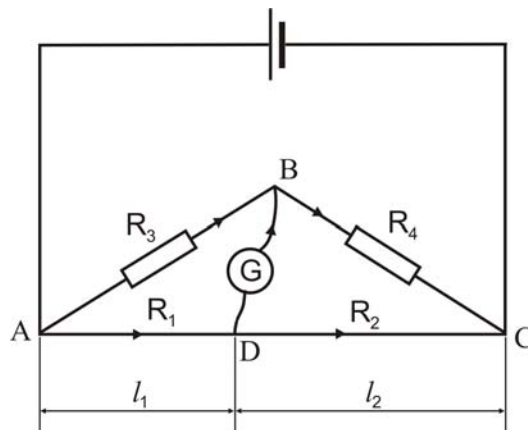
6. Mjerni most za induktivitet i kapacitet

1. Ključni pojmovi

Kirchoffovi zakoni, otpor, napon, Wheatstoneov most, induktivni i kapacitivni otpor, impedancija

2. Teorijski uvod

Wheatstoneov most



Slika 1. Shema Wheatstoneova mosta

Za precizno mjerenje nepoznata otpora ponekad rabimo Wheatstoneov most – električni sklop prikazan na slici 1. Otpor $R = R_1 + R_2$ na toj slici predstavlja otpor jedne otporne žice duljine $l = l_1 + l_2$, homogena poprečna presjeka. Pomicanjem kliznog kontakta (točka D na slici), moguće je kontinuirano mijenjati omjer l_1/l_2 , a time i omjer R_1/R_2 . Kliznim kontaktom uravnotežujemo Wheatstoneov most tako da galvanometrom ne teče struja, tj. $I_G = 0$.

Pri razmatranju Wheatstoneova mosta služimo se Kirchoffovim zakonima. (Ponovite gradivo OF2 o Kirchoffovim zakonima).¹

U uravnoteženome mostu vrijedi

$$R_3 = R_4 \frac{R_1}{R_2} = R_4 \frac{l_1}{l_2}. \quad (1)$$

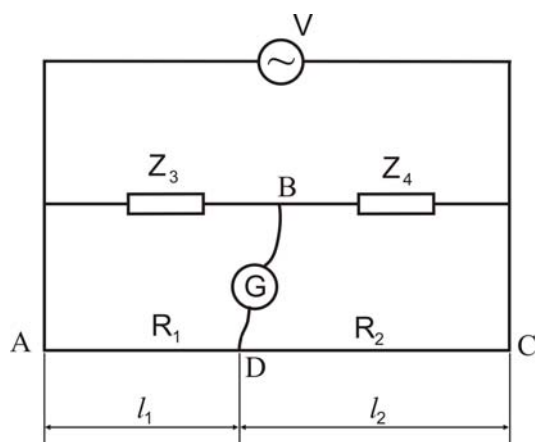
Ovdje smo uzeli u obzir da je omjer otpora R_1 i R_2 jednak omjeru duljina otporne žice s lijeve i desne strane kliznog kontakta (l_1 i l_2), jer je poprečni presjek te otporne žice konstantan.

Ovakav Wheatstoneov most u prošlosti je bio najprecizniji način mjerenja nepoznatih otpora. Danas je, razvojem vrlo preciznih digitalnih voltmetara s velikim unutarnjim otporom i preciznih ampermetara, uobičajeno otpore mjeriti metodom četiri kontakta. Međutim, mjerni mostovi i dalje se upotrebljavaju za mjerenje kompleksnih impedancija.

¹ Ravnoteža Wheatstoneova most izvedena je na predavanjima iz Opće fizike 2, a izvod se može naći i u priručniku M. Požek i A. Dulčić: Fizički praktikum I i II, Sunnypress, Zagreb, 1999., vježba E4.

Kompleksni otpori

Za mjerenje samoindukcije neke zavojnice (L) ili kapaciteta nekog kondenzatora (C) često upotrebljavamo mjerni most koji je modifikacija Wheatstoneova mosta (slika 2).



Slika 2. Mjerni most za kompleksne impedancije

Za razliku od mjerenja omskog otpora, nepoznata impedancija Z_3 i poznata Z_4 mogu se sastojati od otpornika, zavojnice i kondenzatora, a ako su ti elementi serijski spojeni, impedancija takvoga serijskog spoja dana je relacijom (ponovite gradivo o mrežama izmjenične struje i kompleksnim impedancijama iz OF2²)

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \quad (2)$$

gdje je ω kružna frekvencija ($\omega = 2\pi\nu$). Budući da mjerimo kompleksne impedancije, kao izvor elektromotorne sile moramo upotrijebiti generator izmjeničnog napona.

Mjerni most uravnotežen je kada je struja I_G kroz galvanometar jednaka nuli. To se postiže za

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_3}{Z_4}. \quad (3)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u jednadžbu (3), slijedi

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3 + i \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right)}{R_4 + i \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4} \right)}. \quad (4)$$

Ova jednadžba mora biti istodobno zadovoljena i za realni i za imaginarni dio, što nam daje izraze:

² vidi "Udžbenik fizike Sveučilišta u Berkeleyu" - Svezak II, str. 182-186. Opširnije razmatranje kompleksnog prikaza izmjeničnih veličina možete pronaći u priručniku M. Požek i A. Dulčić: Fizički praktikum I i II, str. 71-73.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3 R_4 + \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right) \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4} \right)}{R_4^2 + \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4} \right)^2} \quad (5)$$

i

$$R_4 \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right) = R_3 \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4} \right). \quad (6)$$

Jednadžba (6) kaže da impedancije Z_3 i Z_4 moraju imati istu fazu.

Mjerenje samoindukcije zavojnica

Svaka realna zavojnica ima omski otpor koji je nemoguće izbjeći zbog duljine žice od koje je zavojnica namotana. Tako nepoznata zavojnica L_3 ima i neki omski otpor R_3' , a poznata zavojnica L_4 ima omski otpor R_4' . Stoga pri mjerenju samoindukcije zavojnice L_3 , moramo imati na umu da je njezina impedancija $Z_3' = R_3' + i\omega L_3$, ali i da je impedancija zavojnice poznate samoindukcije L_4 dana relacijom $Z_4' = R_4' + i\omega L_4$. Nužan uvjet uravnoteženosti mosta jest valjanost relacije (6) uz $1/C_3 = 1/C_4 = 0$, odnosno

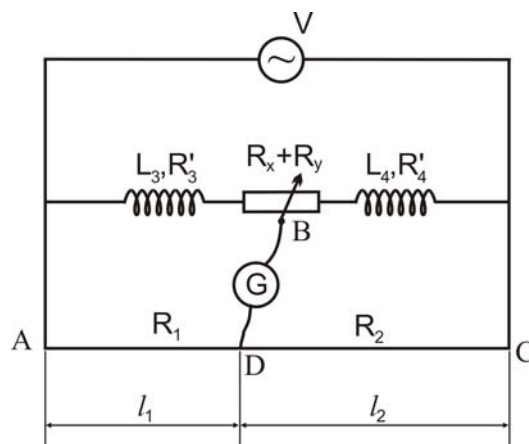
$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{L_4}{L_3}. \quad (7)$$

Malo je vjerojatno da će se upravo otpori R_3' i R_4' odnositi jednako kao L_3 i L_4 (to bi vrijedilo samo za slične zavojnice), pa je za uravnoteženje mosta potrebno ugraditi dodatni potencijometar kako je to prikazano na slici 3. Impedancija u lijevoj grani postaje

$$Z_3 = R_x + R_3' + i\omega L_3 = R_3 + i\omega L_3 \quad (8)$$

dok impedancija u desnoj grani iznosi

$$Z_4 = R_y + R_4' + i\omega L_4 = R_4 + i\omega L_4. \quad (9)$$



Slika 3. Most za mjerenje samoindukcije zavojnica

Potenciometrom možemo mijenjati R_x i R_y te namjestiti tako da ukupni otpori R_3 i R_4 zadovolje jednadžbu (7). Kada je taj (nužan, ali ne i dovoljan) uvjet ispunjen, moramo još zadovoljiti i jednadžbu (5) koja za zavojnicu glasi

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3 R_4 + \omega^2 L_3 L_4}{R_4^2 + \omega^2 L_4^2} \quad (10)$$

što s pomoću jednadžbe (7) možemo svesti na oblik

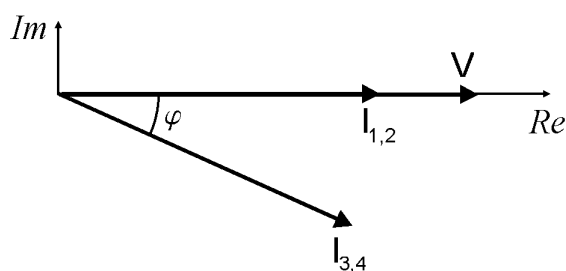
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_3}{L_4}. \quad (11)$$

Nepoznata samoindukcija L_3 tada je:

$$L_3 = \frac{R_1}{R_2} L_4 = \frac{l_1}{l_2} L_4, \quad (12)$$

gdje je L_4 poznata samoindukcija, a omjer l_1/l_2 određen je položajem kliznoga kontakta na otpornoj žici kad je most uravnotežen, tj, kad nema razlike potencijala između točaka B i D.

Bolje razumijevanje uvjeta (7) i (11) možemo postići prikazom napona i struja u kompleksnoj ravnini. Pretpostavimo za početak da galvanometar ima beskonačan unutarnji otpor, tj. da tom granom ne teče struja. Tada je naš sklop paralelan spoj dviju impedancija, jedne realne ($R = R_1 + R_2$) i jedne kompleksne ($Z = Z_3 + Z_4$). U paralelnom spoju dvije grane imaju zajednički napon na krajevima pa je uobičajeno taj napon prikazati na realnoj osi kao referentan.³ Ukupna struja iz izvora dijeli se tada na struju kroz dvije grane, tj. $I_{1,2}$ i $I_{3,4}$.



Slika 4. Kompleksni prikaz struja u mjernome mostu

U prvoj je grani struja u fazi s naponom V (tj. realna), a u drugoj kasni za naponom za fazni kut φ koji je određen impedancijom druge grane $Z = Z_3 + Z_4$ (slika 4). Imamo $V = Z \cdot I_{3,4}$, a kut φ određen je omjerom imaginarnog i realnog dijela impedancije

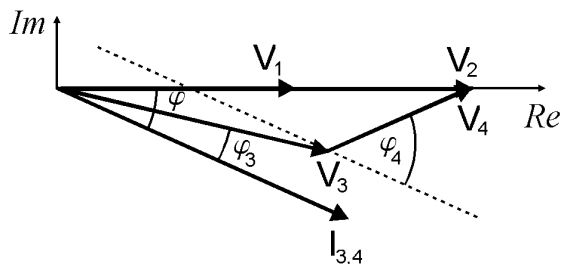
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega(L_3 + L_4)}{R_3 + R_4}. \quad (13)$$

³ Kad proučavamo serijski spoj, svim elementima protječe ista struja pa je tada uobičajeno struju stavljati na realnu os kao referentnu.

Ukupni pad napona jednak je u objema granama pa vrijedi

$$V_1 + V_2 = V_3 + V_4, \quad (14)$$

ali pojedinačni naponi nisu nužno kolinearni. Dok su naponi V_1 i V_2 realni, naponi V_3 i V_4 određeni su strujom $I_{3,4}$ i impedancijama Z_3 i Z_4 . Položaj svih napona u kompleksnoj ravnini prikazan je na slici 5.



Slika 5. Kompleksni prikaz napona u neuravnoteženome mostu

Naponi V_3 i V_4 imaju komponente u fazi sa strujom $I_{3,4}$ i komponente koje brzaju u fazi za $\pi/2$ ispred struje. Kut φ_3 određen je omjerom imaginarnog i realnog dijela impedancije Z_3 :

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\omega L_3}{R_3}, \quad (15)$$

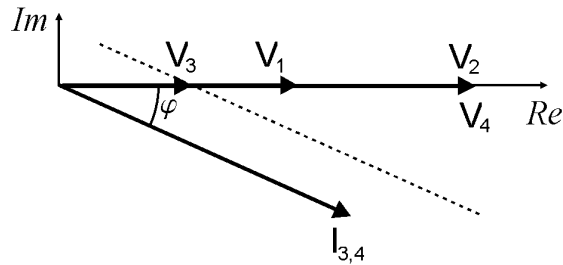
a kut φ_4 , analogno,

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{\omega L_4}{R_4}, \quad (16)$$

Vrh vektora V_1 na slici 5 predstavlja potencijal točke D u odnosu prema točki A u shemi na slici 3, a potencijal točke B predstavljen je vrhom vektora V_3 . Prema tomu, most nije uravnotežen tako dugo dok se vrh vektora koji predstavlja napon V_3 ne poklopi s vrhom V_1 . Da bismo postigli to poklapanje, moramo najprije napone V_3 i V_4 dovesti na realnu os (tj. postići da imaju jednaku fazu). To ćemo učiniti namještanjem potenciometra, tj. mijenjanjem otpora R_x i R_y , čime u stvari namještamo otpore R_3 i R_4 . Mijenjanje tih otpora predstavljeno je na slici 5 pomicanjem vrška vektora koji predstavlja napon V_3 (a time i početka vektora V_4) po isprekidanoj crti. Time, zapravo, mijenjamo komponente napona koje su u fazi sa strujom $I_{3,4}$. Naponi će biti na realnoj osi kad bude vrijedilo $\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi$, tj.

$$\frac{L_3}{R_3} = \frac{L_4}{R_4} = \frac{L_3 + L_4}{R_3 + R_4} \quad (17)$$

što je ekvivalentno uvjetu (7). Kad su otpori R_3 i R_4 tako namješteni, svi su naponi na realnoj osi, ali iznosi napona V_1 i V_3 još ne moraju biti isti (slika 6).



Slika 6. Naponi u neuravnoteženome mostu u kojemu vrijedi $L_3/R_3 = L_4/R_4$

U sljedećem koraku moramo pomicati klizni kontakt u točki D na slici 3. Time se mijenja napon V_1 dok se ne izjednači s V_3 , a istodobno se izjednačava V_2 s V_4 . Induktivne komponente napona V_3 i V_4 jesu $\omega L_3 I_{3,4} = V_3 \sin \varphi$ i $\omega L_4 I_{3,4} = V_4 \sin \varphi$ (slika 6). Prema tomu, kada je most uravnotežen, imamo

$$V_3 = \frac{\omega L_3}{\sin \varphi} I_{3,4} = V_1 = R_1 I_{1,2} \quad (18)$$

i

$$V_4 = \frac{\omega L_4}{\sin \varphi} I_{3,4} = V_2 = R_2 I_{1,2}. \quad (19)$$

Iz tih jednadžbi slijedi:

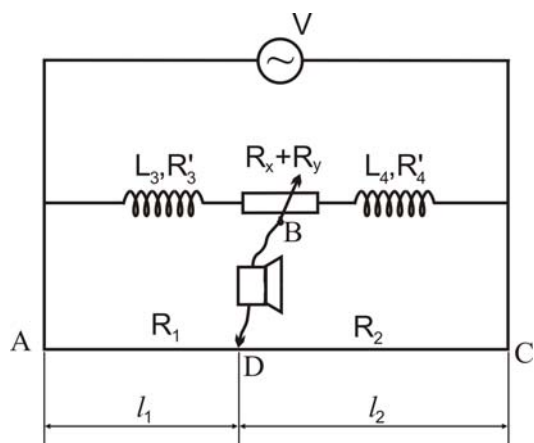
$$\frac{L_3}{L_4} = \frac{R_1}{R_2} \quad (20)$$

što je upravo uvjet (11).

Cijeli ovaj postupak možemo promatrati pomoću osciloskopa tako da na prvi kanal osciloskopa priključimo napon V_1 , a na drugi kanal napon V_3 . (Galvanometar ne priključujemo.) Istodobnim prikazom dva kanala na osciloskopu možemo promatrati njihove međusobne amplitude i faze. Kada potenciometrom i kliznim kontaktom namjestimo da se dva napona naizgled podudaraju, možemo poboljšati preciznost tako da promatramo njihovu razliku. To ćemo učiniti tako da invertiramo kanal 2 i da promatramo u modu zbrajanja signala (ADD). Povećanjem osjetljivosti osciloskopa istodobno na oba kanala možemo povećati preciznost mjerenja.

Drugi način uravnotežavanja mosta pomoću osciloskopa jest promatranje dvaju napona V_1 i V_3 u x-y prikazu. Kad su naponi izvan faze vidjet ćemo elipsu. Naponi u fazi prikazani su ravnom crtom. Međutim, ta ravna crta mora biti pod kutom od 45° da bi most bio uravnotežen.

Umjesto osciloskopom, most možemo uravnotežiti i tako da između točaka B i D priključimo slušalice (slika 7). U tu svrhu odaberemo takvu frekvenciju signala da bude u području u kojem je ljudski sluh najosjetljiviji (500 Hz - 5 kHz) i namještamo potenciometar i klizni kontakt sve dok više ne čujemo signal. Da bi most bio uravnotežen, zvuk mora u potpunosti iščeznuti (nije dovoljno postići minimum samo jednim potenciometrom). Ovaj način uravnoteženja mosta precizniji je od osciloskopa za ljude s dobrim sluhom.



Slika 7. Most za mjerenje samoindukcije pomoću slušalica.

Mjerenje kapaciteta

Pri mjerenju kapaciteta možemo zanemariti omske otpore u dovodnim žicama ($R_3 = R_4 = 0$) pa su impedancije Z_3 i Z_4 čisto imaginarne

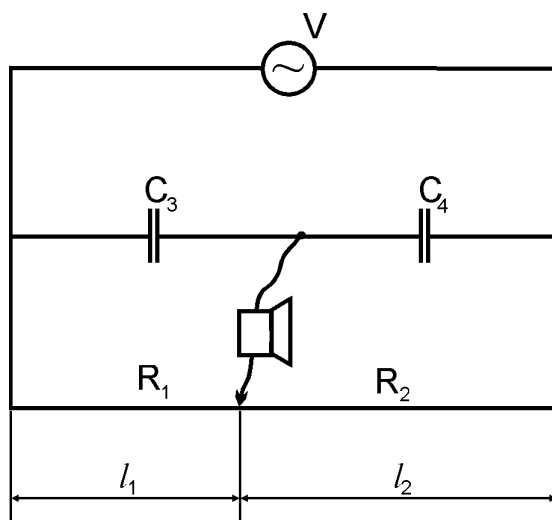
$$Z_3 = -i \frac{1}{\omega C_3} \quad ; \quad Z_4 = -i \frac{1}{\omega C_4}. \quad (21)$$

Stoga jednačba (6) iščezava (za kondenzatore je također $L_3 = L_4 = 0$) pa nam više nije potreban potencijometar u strujnome krugu. Mjerni sklop zato izgleda kao na slici 8. Jednačba (5) ili jednačba (3) daje nam tada

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_4}{C_3}, \quad (22)$$

odnosno

$$C_3 = \frac{R_2}{R_1} C_4 = \frac{l_2}{l_1} C_4. \quad (23)$$



Slika 8. Most za mjerenje kapaciteta.

3. Mjerni uređaj i mjerenje

Obavezno se podsjetite rada s osciloskopom iz praktičnog dijela kolegija "Statistika i osnovna mjerenja".

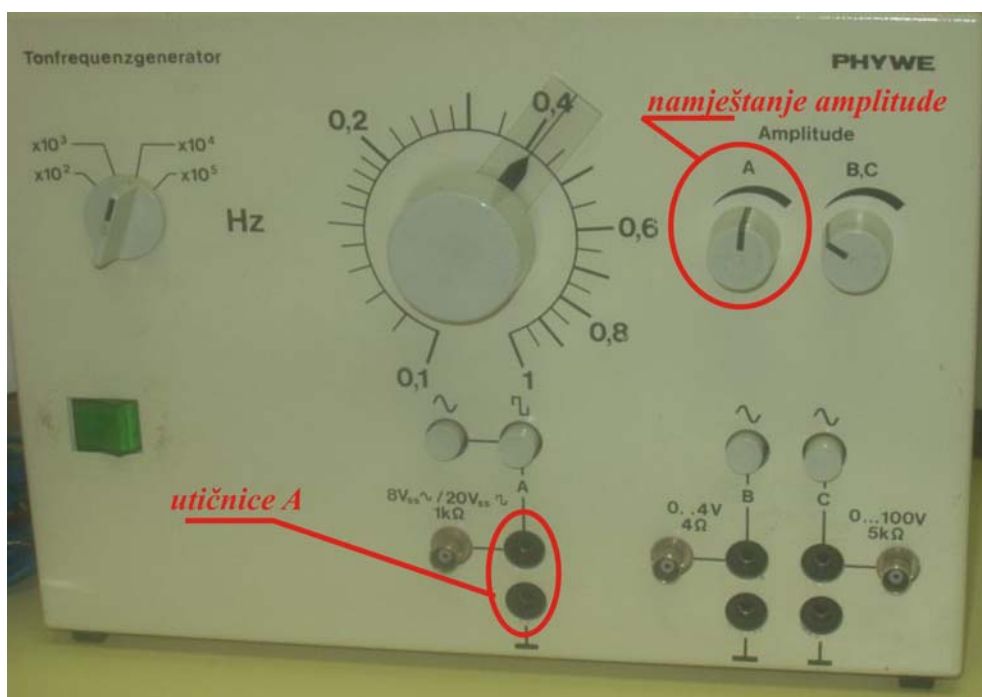
Mjerni sklop sastoji se od audiofrekventnoga generatora, otporne žice duljine $l = 1\text{ m}$ s kliznim kontaktom, potenciometra, osciloskopa, slušalica te nekoliko zavojnica i kondenzatora (slika 9). Kao izvor izmjeničnog napona treba upotrebljavati izlaz iz audiofrekventnog generatora izlazne impedancije $1\text{ k}\Omega$ (utičnice A, vidi sliku 10).

Uočite da je jedan kraj izvora uzemljen, a budući da su i kanali osciloskopa uzemljeni na kućište, potrebno je paziti da **sva uzemljenja budu u jednoj točki** strujnog kruga. (U ovom slučaju točka A na slici 7).

Referentnoj zavojnici L_4 poznata je samoindukcija $L_4 = 9\text{ mH}$, a referentni kapacitet iznosi $C_4 = 100\text{ nF}$. Pri uravnotežavanju mosta treba paziti da klizni kontakt uvijek dobro prijanja uz otpornu žicu. Kad je most uravnotežen očitamo položaj kliznoga kontakta l_1 .



Slika 9. Elementi mjernog postava za LC most



Slika 10. Audiofrekventni generator s označenim priključcima izlazne impedancije $1\text{ k}\Omega$

4. Zadaci

1. Složite most za mjerenje samoindukcija zavojnica pomoću osciloskopa. Odaberite jednu nepoznatu zavojnicu. Promatrajte napone V_1 i V_3 u vremenskom prikazu. Promatrajte kako se mijenjaju odnosi amplituda i faza s pomicanjem kliznog kontakta i potenciometra. Uravnotežite most. Kad više ne uočavate razliku među naponima, promatrajte njihovu razliku i povećajte osjetljivost. Očitajte položaj kad je most uravnotežen i procijenite pogrešku l_1 .
2. Ponovo razgodite most. Promatrajte napone V_1 i V_3 u x-y prikazu i uočite kako se mijenja oblik slike s pomicanjem kliznog kontakta i potenciometra. Uravnotežite most i ponovno procijenite pogrešku l_1 .
3. Priključite slušalice umjesto osciloskopa. Uravnotežite most za istu zavojnicu. Procijenite pogrešku l_1 . Koji način određivanja samoindukcije je precizniji?
4. Odredite s pomoću slušalica samoindukcije preostalih nepoznatih zavojnica. Odredite pogreške mjerenja iz procijenjene pogreške l_1 .
5. Složite sklop za mjerenje kapaciteta s pomoću slušalica. Odredite nepoznate kapacitete i provedite račun pogrešaka. Procijenite pogrešku mjerenja l_1 .