Rješenje 4: Chaplyginov plin

I. Picek, Fizikalna kozmologija

14. ožujka 2011.

Za rješavanje ovog zadatka potrebne su nam Friedmanove jednadžbe. Prva glasi

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \rho - \frac{K}{a^2}. \tag{1}$$

Ovdje napisana forma jednadžbe je ekvivalentna jednadžbi (4.16) u Bergstrom-Goobar uz identifikaciju $8\pi G/3 = 1$. Također će se koristiti zakon očuvanja energije

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3), \tag{2}$$

koji slijedi iz druge Friedmanove jednadžbe uz dodatni uvjet $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$. (vidi B-G, jednadžba (4.21)) Prvo se zapiše zahtjev očuvanja energije u obliku

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -p\frac{da^3}{da}. \tag{3}$$

Zatim se primijeni specifična jednadžba stanja za ovaj model, zadana u zadatku sa

$$p = -\frac{A}{\rho}. \tag{4}$$

Kada se iskombiniraju posljednje dvije jednadžbe slijedi

$$\rho' a^3 + 3\rho a^2 = 3\frac{A}{\rho}a^3, \tag{5}$$

gdje je $'$ oznaka za $\frac{d}{da}$.

1) Najopćenitije rješenje jednadžbe (5) je dano sa

$$\rho = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}. \tag{6}$$

Potrvdimo tu tvrdnju. Derivacija gustoće je dana sa

$$\rho' = \frac{1}{2\sqrt{A + \frac{B}{a^6}}} \cdot \frac{-6B}{a^7} = -\frac{3B}{a^7}\frac{1}{\rho}. \tag{7}$$

Time jednadžba (5) postaje

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{-3B}{a^7} - \frac{3A}{a}\right) + \frac{3\rho}{a} = -3\frac{\rho^2}{\rho a} + 3\frac{\rho}{a} = 0. \tag{8}$$

čime je tvrdnja potvrđena.

2) Promotrimo asimptotska ponašanja funkcije dane u (6). Kada je a malen, drugi član očigledno dominira te

$$\rho \sim \frac{\sqrt{B}}{a^3}. \tag{9}$$

U slučaju kada je a velik, tj. $a \gg \frac{B}{A}$, može se napisati gustoća kao

$$\rho = \sqrt{A}\sqrt{1 + \frac{B}{Aa^6}} \approx \sqrt{A} + \frac{B}{\sqrt{4A}}a^{-6}, \tag{10}$$

što ako se uzme samo prvi red vodi na

$$\rho \sim \sqrt{A}. \tag{11}$$

Vidi se, iz relacija (9) i (11) da su dobivene ovisnosti identične kao što je traženo u zadatku.