# Rješenje 6: Einsteinov statični svemir

I. Picek, Fizikalna kozmologija

Promatra se svemir u kojem je

$$\begin{aligned} \rho_r &= 0 \\ \rho_m &\neq 0 \\ \rho_\Lambda &= \frac{\Lambda}{8\pi G} \end{aligned} \tag{1}$$

Slijedi da je ukupna gustoća u tom svemiru dana s

$$\rho = \rho_m + \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{2}$$

dok je tlak dan s

$$p = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{3}$$

gdje je uzeto u obzir da materija ne doprinosi tlačnom članu, dok vakuumska energija doprinosi kao $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Kombiniranjem Friedmannovih jednadžbi slijedi relacija

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{4}$$

Uvrštavanjem specifičnih relacija za gustoću i tlak u ovom problemu slijedi

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda}{3} \tag{5}$$

Uvjet $\ddot{a} = 0$ je ispunjen kada $\rho_m = \Lambda/4\pi G$ (tj. $\frac{\rho_m}{\rho_\Lambda} = 2$). S ovim znanjem možemo se vratiti u prvu Friedmannovu jednadžbu, s uvjetom $\dot{a} = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 0 &\Rightarrow \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\Lambda}{4\pi G} + \frac{8\pi G}{3}\frac{\Lambda}{8\pi G} - \frac{k}{a^2} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Iz gornje jednadžbe slijedi uvjet $\Lambda = \frac{k}{a^2}$. Dakle, dobije se

$$\Lambda = \frac{k}{a^2} = 4\pi G\rho_m \tag{7}$$

Općenito, $k$ može poprimiti vrijednosti $(-1, 0, 1)$, no vidi se da je gornji uvjet moguće zadovoljiti samo sa $k = 1$, budući da su $\rho_m$ i $a^2$ pozitivne veličine. Uz taj izbor, slijedi također $a = \Lambda^{-1/2}$.

Promotrimo sada stabilnost rješenja. Pretpostavimo da su u početnom trenutku perturbacije dane sa

$$a = \Lambda^{-1/2} + \delta a\ , \qquad \rho_m = \frac{\Lambda}{4\pi G} + \delta\rho_m \tag{8}$$

Raspiše se jednadžba

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m a + \frac{\Lambda}{3}a \tag{9}$$

uzimajući perturbacijske članove

$$\ddot{\delta a} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\frac{\Lambda}{4\pi G} + \delta\rho_m\right)\left(\Lambda^{-1/2} + \delta a\right) + \frac{\Lambda}{3}\left(\Lambda^{-1/2} + \delta a\right) \tag{10}$$

Uzimajući samo prvi član u perturbacijskom redu

$$\ddot{\delta a} = -\frac{\Lambda^{-1/2}}{3} - \frac{\Lambda}{3}\delta a - \frac{4\pi G}{3}\Lambda^{-1/2}\delta\rho_m + \frac{\Lambda^{-1/2}}{3} + \frac{\Lambda}{3}\delta a \tag{11}$$

slijedi

$$\Lambda^{1/2}\ddot{\delta a} = -\frac{4\pi G}{3}\delta\rho_m \tag{12}$$

U zakonu očuvanja energije

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = -p\frac{d}{dt}a^3 \tag{13}$$

desna strana iščezava u slučaju $\dot{a} = 0$, što vodi na jednadžbu

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -3\frac{\delta a}{a} \tag{14}$$

iz koje se dobije

$$\delta\rho_m = \delta\rho = -3\frac{\rho_m}{a}\delta a = -\frac{3}{4\pi G}\Lambda^{3/2}\delta a \tag{15}$$

Gornja jednadžba u kombinaciji s jednadžbom (12) vodi na

$$\delta\ddot{a} - \Lambda\delta a = 0 \tag{16}$$

Opće rješenje ove jednadžbe je

$$\delta a(t) = A\mathrm{ch}\,\sqrt{\Lambda}t + B\mathrm{sh}\,\sqrt{\Lambda}t \tag{17}$$

Uvjet male početne perturbacije $\delta a(0) = \epsilon$ zajedno s uvjetom $\delta\dot{a}(0) = 0$ određuje konačni oblik rješenja

$$\delta a(t) = \epsilon \cdot \mathrm{ch}\,\sqrt{\Lambda}t \tag{18}$$

Dakle, pokazali smo da mala perturbacija $\delta a(t)$ rješenja (7) raste eksponencijalno u vremenu. To znači da je rješenje (7) nestabilno.