Rješenje 7: Horizont

I. Picek, Fizikalna kozmologija

- Pogledajmo omjer dvaju tvari u svemiru, obične materije i kvintesencije, u ovisnosti o faktoru skale

$$\frac{\epsilon_m}{\epsilon_Q} = \frac{\epsilon_{m,0} a^{-3}}{\epsilon_{Q,0} a^{-3/2}} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1-\Omega_{m,0}}\right) a^{-3/2}. \tag{1}$$

Faktor skale, kada je ϵ_m/ϵ_Q=1, je dan sa

$$1 = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1-\Omega_{m,0}}\right) a_{mQ}^{-3/2} \Rightarrow a_{mQ} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1-\Omega_{m,0}}\right)^{2/3}. \tag{2}$$

Forma Friedman jednadžbe koja će se koristiti dobivena je stavljanjem $\Omega_\Lambda \to \Omega_Q/a^{3/2}$

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1-\Omega_{m,0}}{a^{3/2}}, \tag{3}$$

u standardnoj jednadžbi danaoj u literaturi sa (4.74) u Bergström Goobar, te (6.6) u Ryden. Uzimajući u obzir definiciju Hubblovog parametra, $H \equiv \dot{a}/a$, pa množeći gornju jednadžbu sa a^2, te nakon premještanja članova i integriranja slijedi

$$\int_0^t H_0 dt = \int_0^a \frac{da}{(\Omega_{m,0} a^{-1} + (1-\Omega_{m,0}) a^{1/2})^{1/2}}. \tag{4}$$

Iz gornje jednadžbe slijedi, nakon nešto ne prekompliciranog računa,

$$H_0 t = \frac{4\sqrt{\Omega_{m,0}}}{3(1-\Omega_{m,0})} \left[\sqrt{\left(\frac{a}{a_{mQ}}\right)^{3/2} + 1} - 1\right]. \tag{5}$$

Invertiranjem gornjeg izraza dobiva se $a(t)$,

$$a(t) = a_{mQ} \left[\left(\left(\frac{3(1-\Omega_{m,0})}{4\sqrt{\Omega_{m,0}}}\right) H_0 t + 1\right)^2 - 1\right]^{2/3}. \tag{6}$$

Limes gornjeg rješenja za mali a je nešto lakše naći iz jednadžbe (5). Kada $a \ll a_{mQ}$,

$$H_0 t \approx \frac{4\sqrt{\Omega_{m,0}}}{3(1-\Omega_{m,0})} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_{mQ}}\right)^{3/2} - 1\right] = \frac{2\sqrt{\Omega_{m,0}}}{3(1-\Omega_{m,0})} \left(\frac{a}{a_{mQ}}\right)^{2/3}, \tag{7}$$

pa slijedi

$$a \approx \left(\frac{3\sqrt{\Omega_{m,0}}}{2} H_0 t\right)^{2/3}. \tag{8}$$

- Izraz za horizont je dan sa (npr. Bergström Goobar (4.56)), u sustavu sa $c = 1$,

$$d_h(t_0) = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \tag{9}$$

Uvrštavajući izraz (8) slijedi

$$d_h(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{2dt}{3\sqrt{\Omega_{m,0}} H_0^{2/3} t^{2/3}}. \tag{10}$$

što nakon integracije vodi na

$$d_h(t_0) = 3t_0. \tag{11}$$

Rezulat je ekvivalentan onome koji bi se dobio za svemir dominiran samo materijom. To je zbog toga jer je ovisnost $a(t) \sim t^{2/3}$ upravo vremenska ovisnost koju poprima i $a(t)$ u svemiru ispunjenog materijom.