

## Rješenje 9: Neiščezavajući kemijski potencijal

I. Picek, Fizikalna kozmologija

Gustoća broja čestica je dana izrazom

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int f_i(\mathbf{p}) d^3p, \quad (1)$$

gdje je

$$f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\epsilon_i(\mathbf{p}) - \xi_i} \pm 1}. \quad (2)$$

Ovdje je  $\epsilon = E(\mathbf{p})/T$ ,  $\xi = \mu/T$ , a predznak  $\pm$  se odnosi na bozonsku ili fermionsku prirodu čestica (pozitivni predznak odnosi se na fermione, a negativni na bozone). U ultrarelativističkoj aproksimaciji, pogodnoj za ovaj problem, sva je energija sadržana u impulsu,  $|\mathbf{p}| = E$ , tako da jednadžba (1) prikladna za ovaj problem glasi

$$n_i = T_i^3 \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon_i^2 d\epsilon_i}{e^{\epsilon_i - \xi_i} \pm 1}. \quad (3)$$

Izračunajmo prvo  $n_\gamma$ . Koristeći jednu od integralnih reprezentacija Riemannove zeta funkcije

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} dx = \zeta(n)\Gamma(n), \quad (4)$$

slijedi jednostavan zapis

$$n_\gamma = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) T_\gamma^3, \quad (5)$$

gdje je uzeto u obzir da fotoni imaju dvije polarizacije, to jest  $g_\gamma = 2$ , te  $\Gamma(3) = 2$ . Razlika između neutrina i antineutrina je u predznaku pripadnog kemijskog potencijala tako da

$$\xi_\nu = -\xi_{\bar{\nu}}. \quad (6)$$

Integrali za neutrine nisu jednostavni kada kemijski potencijal nije zanemariv. No uz pomoć relacije (1) iz zadatka slijedi

$$\begin{aligned} n_\nu - n_{\bar{\nu}} &= T_\nu^3 \frac{g_\nu}{2\pi^2} \int_0^\infty \left( \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\epsilon - \xi_\nu} + 1} - \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\epsilon + \xi_\nu} + 1} \right) \\ &= T_\nu^3 \frac{\xi_\nu}{6} + O(\xi_\nu^2), \end{aligned} \quad (7)$$

gdje je uračunato  $g_\nu = 1$ . Sveukupno, iz (5) i (7),

$$\frac{n_\nu - n_{\bar{\nu}}}{n_\gamma} = \left( \frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^3 \frac{\pi^2 \xi_\nu}{12\zeta(3)} + O(\xi_\nu^2). \quad (8)$$

Napomenimo da je egzaktan rezultat:

$$\frac{n_\nu - n_{\bar{\nu}}}{n_\gamma} = \left( \frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^3 \frac{\pi^2 \xi_\nu + \xi_\nu^3}{12\zeta(3)}. \quad (9)$$