Rješenje 10: Problem ravnosti

I. Picek, Fizikalna kozmologija

Zanima nas kako napisati drugu Friedmannovu jednadžbu

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho, \tag{1}$$

kao diferencijalnu jednadžbu za temperaturu $T(t)$ umjesto za faktor skale $a(t)$. Znamo ovisnost gustoće entropije o temperaturi, te da je sugibajuća entropija očuvana. Očuvanje entropije vodi na

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} S = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(sa^3\right) = 0 \\ &\Rightarrow \dot{s}a^3 + 3sa^2\dot{a} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{3}\frac{\dot{s}}{s} \end{aligned} \tag{2}$$

Upotreba donje relacije iz (1) iz teksta zadatka vodi na

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\dot{g}_{eff}}{g_{eff}} + 3\frac{\dot{T}}{T}\right). \tag{3}$$

No kako je pretpostavka zadatka da radimo u području temperatura gdje $\dot{g}_{eff} = 0$, slijedi

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2. \tag{4}$$

Drugi član iz Friedmannove jednadžbe (1), k/a^2, se prvo proširi na kT^2/a^2T^2, a zatim se nazivnik zapiše kao

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2T^2} &= \left(\frac{s}{ST^3}\right)^{2/3} \\ &= \left(\frac{2\pi^2}{45}\frac{g_{eff}}{S}\right)^{2/3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Iz (4), (5) te relacija iz zadatka dobijemo traženi zapis Friedmannove jednadžbe (1)

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 + \epsilon(T)T^2 = \frac{4\pi^3}{45} G g_{eff} T^4, \tag{6}$$

gdje je

$$\epsilon(T) = \frac{k}{a^2T^2} = k\left(\frac{2\pi^2}{45}\frac{g_{eff}}{S}\right)^{2/3}. \tag{7}$$

Uzimajući da je gustoća energije u fotonima danas manja od $10\rho_{\mathrm{cr}}$, iz Friedmannove jednadžbe dobijemo donju granicu za a

$$\left|\frac{k}{a^2}\right| < 9H^2 \quad \Rightarrow \quad a > \frac{1}{3}H^{-1} \sim 3 \cdot 10^9 \text{godina} \tag{8}$$

a iz toga, uvrštavajući $g_{eff} = 2$ u relaciju za s iz teksta zadatka, donju granicu za entropiju $S_\gamma = s_\gamma a^3$ fotona sugibajućeg volumena a^3

$$S_\gamma \gtrsim 10^{85}, \tag{9}$$

Kako je entropija S konstatna, njenu vrijednost možemo uvrštavati u izraze koje ćemo izvrijedniti u ranom svemiru. Tako izvrijednimo relaciju (7)

$$\epsilon(T) < 10^{-58} g_{eff}^{2/3}. \tag{10}$$

Traženu veličinu $\left|\frac{\rho-\rho_{cr}}{\rho}\right|$ dobijemo iz (1), (6) i (7):

$$\begin{aligned} \left|\frac{\rho-\rho_{cr}}{\rho}\right| &= \left|\frac{k}{\frac{8\pi}{3}G\rho a^2}\right| \\ &= \left|\frac{1}{\frac{8\pi}{3}G\rho}T^2\frac{k}{a^2T^2}\right| \\ &= \left(\frac{4\pi^3}{45}M_{Pl}^{-2}g_{eff}T^4\right)^{-1} T^2\,|\epsilon| \\ &= \frac{45}{4\pi^3}\frac{M_{Pl}^2}{g_{eff}T^2}\,|\epsilon|\,. \end{aligned} \tag{11}$$

gdje je stavljeno $G = M_{Pl}^{-2}$, gdje je M_{Pl} Planckova masa $M_{Pl} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV. Također je upotrijebljeno $k = \pm 1$. Uvrštavajući izraz za ϵ, te podatke za rani svemir: $T = 10^{17}$ GeV i $g_{eff} \sim 100$, slijedi

$$\left|\frac{\rho-\rho_{cr}}{\rho}\right| < 10^{-55}. \tag{12}$$

Činjenica da je izraz u (12) tako vrlo malen zovemo problem ravnosti. Ogleda se u činjenici da je potrebno vrlo fino namještanje početnih parametara kako bismo danas opažali energijsku gustoću ρ svemira blizu kritične (u smislu $0 < \rho < 10\rho_{\rm cr}$).