Poglavlje 2

Načelo simetrije u FEČ

Kratak pogled na tablicu elementarnih čestica bit će dostatan da se odgonetne kako su čestice klasificirane prema *očuvanim veličinama*, masi i spinu. Prema *masi* (energiji u sustavu mirovanja) razlikujemo lake čestice (leptone) i teške čestice (hadrone, koji obuhvaćaju mezone i barione). Prema *spinu* (unutrašnjem impulsu vrtnje), koji može biti — cijeli (polucijeli) *razlikujemo* — bozone (fermione) s ponašanjem na zamjenu čestica koje je simetrično (antisimetrično) i *statistikom* — Bose-Einsteinovom (Fermi-Diracovom). Ovaj utjecaj spina na statistiku ustanovljen je u kvantnoj teoriji polja u formi "teorema spina-statistike". Tako među fermionima nalazimo leptone ($e^{\pm}, \mu^{\pm}, \tau^{\pm}$ i njima pridružene neutrine ν_e, ν_μ, ν_τ), barione ($p, n, \Sigma, \Lambda \ldots$), a među bozonima nalazimo mezone ($\pi, K, \eta, \rho, \omega \ldots$) te medijatore sila ($\gamma, W^{\pm}, Z$, gluoni, graviton). Na taj način očuvane veličine postaju uporištima na kojima gradimo fizikalnu sliku svijeta. Pokazat ćemo da iza očuvanih veličina stoje *simetrije*, kao najmoćnije oruđe pri otkrivanju zakona prirode. Nakon kvantnog i relativističkog načela koja nas vode do relativističkih jednadžbi slobodnih čestica, dolazimo i do moćnog *baždarnog principa*, koji će nam omogućiti opis čestica u interakciji.

2.1 Načelo simetrije u kvantnoj fizici

□ ULOGA SIMETRIJA U FIZICI

O simetriji ili simetričnoj situaciji u fizici govorimo kada, usprkos tome što na fizikalnom sustavu učinimo neki zahvat (transformaciju), nema nikakve promjene u odvijanju fizikalnih procesa. Tako se uz navedene koncepte

materije *prostora* *vremena*

zahtijeva da zakoni za

izolirane sustave	*posvuda*	*u sva vremena*

ostanu nepromijenjeni. Transformacije koje činimo na fizikalnom sustavu u ovom su slučaju tzv. neprekidne (kontinuirane) prostorno-vremenske transformacije

prostornih pomaka	*prostornih rotacija*	*pomaka u vremenu,*

pri čemu simetrija reflektira činjenicu da ne možemo utvrditi

apsolutni prostorni položaj	*apsolutni smjer u prostoru*	*apsolutno vrijeme.*

Pridružene očuvane veličine klasične mehanike

linearni impuls $\vec{p}$	*impuls vrtnje* $\vec{L}$	*energija* E

izlaze kao posljedica zahtjeva invarijantnosti *Lagrangeove funkcije* na gore navedene pridružene transformacije. Pokazat ćemo da se ti rezultati mogu poopćiti i na slučaj kvantne mehanike i teorije polja.

□ LAGRANGEOVA FORMULACIJA

Klasična mehanika se može formulirati na višem stupnju teorije na elegantan Lagrangeov način, tako da se za dani zatvoreni dinamički sustav jednadžbe gibanja mogu izvesti iz Lagrangeove funkcije $L(q_i, \dot{q}_i)$, skalarne funkcije poopćenih koordinata q_i i poopćenih brzina $\dot{q}_i = dq/dt$.

Lagrangeova funkcija se može izraziti kinetičkom (T) i potencijalnom energijom (V)

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - V(q_i) \ , \tag{2.1}$$

a pomoću nje se uvodi *funkcija djelovanja (S)*, koja prati gibanje sustava od početne konfiguracije u trenutku t_1, do konačne u trenutku t_2

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \ . \tag{2.2}$$

Stvarno gibanje je dano *principom najmanjeg djelovanja*, varijacijskim principom $\delta S = 0$: Stvarna staza gibanja minimizira djelovanje, a taj uvjet je ispunjen ako L zadovoljava Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ . \tag{2.3}$$

Lagrangeov opis proširit ćemo i na polja kojima ćemo opisivati čestice. Na kraju ovog poglavlja vidjet ćemo da varijacijski princip ima dvije posljedice — očuvane veličine i jednadžbe gibanja.

Za slobodnu česticu kinetičke energije $T = 1/2\ m\dot{\vec{x}}^2$, Euler-Lagrangeova jednadžba daje drugi Newtonov zakon

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla V(\vec{x}) \equiv \vec{F}(\vec{x}) \ . \tag{2.4}$$

Na ovom primjeru vidi se da je gibanje čestica opisano različito od gibanja valova (opisanih valnom jednadžbom). Korak prema zbliženju čestica i valova postiže se Hamiltonovim opisom. Hamiltonova funkcija $H(q_i, p_i)$, skalarna funkcija koordinata i impulsa, prikazuje ukupnu energiju sustava $H = T + V$. Za n nezavisnih čestica, $3n$ koordinata položaja i $3n$ koordinata impulsa zadovoljavaju jednadžbe

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad , \tag{2.5}$$

koje omogućavaju opis evolucije čitavog fizikalnog sustava. Koordinate $q_1, q_2, \ldots$, $p_1, p_2, \ldots$ prikazuju jednu točku – kako sustav evoluira u vremenu tako ta točka putuje ("briše") po $6n$ - dimenzionalnom *faznom prostoru*. Hamiltonova formulacija prikazuje pogodno polazište za *Schrödingerovu* jednadžbu kvantne mehanike.

□ OSNOVNI KONCEPTI KVANTNE MEHANIKE

Podsjetit ćemo se osnovnih koncepata kvantne mehanike *koji će* nam dati odgovor na pitanje: "Kada je fizikalna veličina očuvana?"

Fizikalni sustav S (primjerice H-atom, elektron u polju protona) opisujemo vektorom stanja $|\psi\rangle$ (ili adjungiranim vektorom ($\langle\psi|$). Za dva vektora stanja, $|\psi_1\rangle$ i $|\psi_2\rangle$, uvodimo skalarni produkt, kompleksnu veličinu

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle \equiv \int \psi_2^*\psi_1 d\xi \in \mathcal{C} \ , \tag{2.6}$$

koja zadovoljava relaciju $\langle\,\psi_2|\,\psi_1\rangle^* = \langle\,\psi_1|\,\psi_2\rangle$. Pritom veličina $P_{21} = |\langle\,\psi_2|\,\psi_1\rangle|^2$ prikazuje *vjerojatnost* da sustav S opazimo u stanju $|\psi_2\rangle$ ako je pripremljen u stanju $|\psi_1\rangle$. Gornji skalarni produkt naziva se *amplitudom vjerojatnosti*.

Opservabilnim veličinama pridružujemo operator F koji djelovanjem na stanje $|\psi_1\rangle$ proizvodi novi vektor stanja $F|\psi_1\rangle$ (adjungirani je vektor $\langle\psi_1|F^\dagger\rangle$).

Skalarni produkt

$$\langle\psi_2|F|\psi_1\rangle \equiv \int \psi_2^* F\psi_1 d\xi \tag{2.7}$$

prikazuje matrični element operatora F koji je dijagonalni, ako je $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$ ili prijelazni, ako je $|\psi_1\rangle \neq |\psi_2\rangle$. Primjerice, zahtjev realnosti fizikalne veličine, uz hermitski adjungiran operator, definiran s $\langle\psi_2|F|\psi_1\rangle^* = \langle\psi_1|F^\dagger|\psi_2\rangle$, povlači $F^\dagger = F$. Opservabla je hermitski operator ! Istaknuta opservabla, hamiltonian H sustava, diktira vremensku evoluciju kvantnomehaničkog sustava

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{2.8}$$

za vektore stanja, ili

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{2.9}$$

za valnu funkciju (vektor stanja u koordinatnoj reprezentaciji, $\psi = \langle r|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{x},t)$).

Da bi dali odgovor na početno pitanje, "*kada su fizikalne veličine očuvane?*", promotrimo promjenu očekivane vrijednosti opservable F u stanju koje zadovoljava vremenski ovisnu Schrödingerovu jednadžbu

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}H\psi, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}H^*\psi^* = -\frac{1}{i\hbar}\psi^*H\ , \tag{2.10}$$

gdje je zadnji korak dobiven uz $H = H^\dagger$. Srednja vrijednost operatora F omogućava da preko izraza

$$\langle F\rangle = \int \psi^* F\psi d\xi \equiv \langle\psi|F|\psi\rangle \tag{2.11}$$

$$\frac{d}{dt}\langle F\rangle = \int\left[\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)F\psi + \psi^*F\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \psi^*\frac{\partial F}{\partial t}\psi\right]d\xi \tag{2.12}$$

$$= \int\psi^*\left\{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[F,H]\right\}\psi d\xi \tag{2.13}$$

$$\tag{2.14}$$

nađemo izraz za totalnu derivaciju operatora,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[F,H]\ . \tag{2.15}$$

Dakle, za operator koji ne ovisi eksplicitno o vremenu ($\partial F/\partial t = 0$) i koji komutira s hamiltonianom ($[F,H] = 0$), njegova očekivana (srednja) vrijednost je konstanta u vremenu, u svakom stanju!

Sada ćemo se pozabaviti operatorima transformiranja stanja, U ($U : \psi \to U\psi$), za koje zahtijevamo da su unitarni ($U^{-1} = U^\dagger$), kako bi čuvali normu stanja. Središnje je pitanje: kada je operator transformacije U operator simetrije?

Iz uvjeta da transformirano stanje $U\psi$ zadovoljava istu Schrödingerovu jednadžbu kao i originalno stanje ψ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(U\psi) = H(U\psi) \tag{2.16}$$

uz vremenski neovisni operator transformacije U dobivamo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = U^{-1}HU\psi \Rightarrow H = U^{-1}HU \ , \tag{2.17}$$

ili

$$HU - UH \equiv [H, U] = 0 \qquad . \tag{2.18}$$

Operator simetrije komutira s hamiltonianom!

2.1.1 Kontinuirane transformacije

Nakon što smo precizirali značenje očuvane veličine u kvantnoj mehanici, možemo se usredotočiti na apsolutno očuvane veličine u fizici. Prva grupa povezana je s uobičajenim prostorno-vremenskim simetrijama.

□ PROSTORNO-VREMENSKE SIMETRIJE

a) Homogenost vremena (simetrija na translacije u vremenu)

Fizikalni sustav podliježe simetriji na pomake u vremenu ako Hamiltonov operator *zatvorenog sustava* ne zavisi eksplicitno o vremenu, $\partial H/\partial t = 0$. Tada iz

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H, H] = 0 \tag{2.19}$$

slijedi očuvanje energije u kvantnoj mehanici

$$\frac{d\langle E\rangle}{dt} = 0 \ . \tag{2.20}$$

b) Homogenost prostora (simetrija na translacije u prostoru)

Translacijama u koordinatnom prostoru pridruženi su operatori transformacija u apstraktnom prostoru stanja:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r'} = \vec{r} + \vec{a} \longrightarrow U_{\vec{a}} = e^{-\vec{a}\cdot\nabla} \ . \tag{2.21}$$

Iz zahtjeva invarijantnosti na translacije

$$[U_{\vec{a}}, H] = 0 \Rightarrow [\nabla, H] = 0 \ , \tag{2.22}$$

te zbog prikaza $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, komutator $[\vec{p}, H] = 0$ vodi na

$$\frac{d\langle\vec{p}\rangle}{dt} = 0 \ , \tag{2.23}$$

što prikazuje očuvanje impulsa zatvorenog sustava ($\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$).

c) Izotropnost prostora (ekvivalentnost smjerova)

Izotropnost prostora je simetrija zatvorenih sustava i sustava u centralno simetričnim poljima. Rotacijama u koordinatnom prostoru pridružene su transformacije u prostoru stanja:

$$\vec{r} \to \vec{r}' = R_{(\hat{n},\phi)}\vec{r} \longrightarrow U_{(\hat{n},\phi)} = e^{-(i/\hbar)\phi\hat{n}\cdot\vec{L}} \tag{2.24}$$

gdje je $\hat{n}$ os, a ϕ kut rotacije i $\vec{L} = -i\hbar(\vec{r} \times \nabla)$ orbitalni impuls vrtnje. Zahtjev rotacijske simetrije,

$$[U_{(\hat{n},\phi)}, H] = 0 \Rightarrow [\hat{n} \cdot \vec{L}, H] = 0 \ , \tag{2.25}$$

vodi na očuvanje projekcije impulsa vrtnje na os rotacije,

$$\frac{d\left\langle \hat{n} \cdot \vec{L} \right\rangle}{dt} = 0 \ . \tag{2.26}$$

□ OČUVANI NABOJI I GLOBALNE BAŽDARNE SIMETRIJE

Gornju listu aditivnih zakona očuvanja dopunit ćemo očuvanim nabojima koje ne možemo povezati s kontinuiranim prostorno-vremenskim simetrijama. Neopažanje procesa

$$e^- \longrightarrow \nu_e\,\gamma \qquad p^+ \longrightarrow e^+\,\gamma \qquad \mu^- \longrightarrow e^-\,\gamma$$

tumači se očuvanjem električnog naboja (Q), barionskog broja (B) i zasebnih leptonskih brojeva elektrona (L_e) i miona (L_μ). Opišemo li, primjerice, stanje s nabojem q valnom funkcijom ψ_q koja zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu

$$i\hbar\frac{\partial\psi_q}{\partial t} = H\psi_q \ , \tag{2.27}$$

srednja vrijednost operatora naboja Q bit će očuvana, $d\langle Q\rangle/dt = 0$, ako vrijedi

$$[Q, H] = 0 \ . \tag{2.28}$$

Pitamo se koja simetrija osigurava iščezavanje tog komutatora te omogućava da ψ_q bude svojstvena funkcija operatora Q ? Odgovor na to pitanje dao je Weyl 1950. godine: sloboda fazne transformacije (baždarne transformacije 1. vrste)

$$\psi_q \longrightarrow \psi_q' = e^{i\varepsilon Q}\psi_q \tag{2.29}$$

zahtijeva da transformirana valna funkcija ψ_q' zadovoljava istu Schrödingerovu jednadžbu, a tada

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\varepsilon Q}\psi_q\right) = H\left(e^{i\varepsilon Q}\psi_q\right) \tag{2.30}$$

uz globalni (prostorno-vremenski neovisan) infinitezimalni parametar ϵ povlači traženo iščezavanje komutatora. Očuvani naboj je posljedica neobičnog zahtjeva da, primjerice, svi elektroni u svemiru pretrpe istu promjenu faze koju učinimo na nekom odabranom elektronu u našem laboratoriju!

2.1.2 Diskretne transformacije

Osim simetrija na neprekidne prostorno-vremenske transformacije postoje i diskretne inačice vezane uz gore uvedene koncepte prostora, vremena i materije. Te *diskretne simetrije*, manifestiraju se na slijedeći način:

simetrija	**transformacija**	**neopažanje apsolutnog**
prostornog pariteta	$P : r \to -r$	*lijevog (desnog)*
vremenskog obrata	$T : t \to -t$	*smjera vremena*
nabojne konjugacije	$C : e \to -e$	*predznaka naboja*

Sve do druge polovine ovog stoljeća vladalo je uvjerenje da se svi procesi moraju odvijati jednako u originalnom (našem) svijetu i u svijetu koji bi se dobio nekom od gornjih diskretnih transformacija.

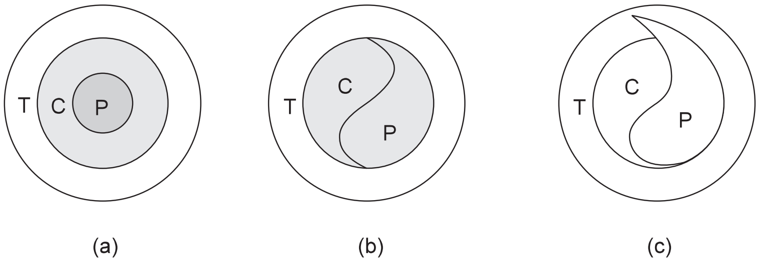
Prvi šok nastupio je 1957. otkrićem narušenja simetrije prostornog pariteta u tzv. slabim nuklearnim procesima (nuklearnom beta raspadu). Senzacija je zabilježena na naslovnoj stranici New York Timesa, od 16. siječnja 1957. :

> *"Basic concepts in physics is reported upset in tests / conservation of parity in nuclear theory challenged by scientists at Columbia and Princeton Institute."*
>
> *("Izviješćeno je da pokusi dovode u pitanje temeljne fizikalne koncepte / znanstvenici s Columbije i Princetona bacili sumnju na očuvanje pariteta u nuklearnoj fizici.")*

U univerzalnom se zrcalu pojavila prva pukotina!

Uslijedila je sugestija da će kombinirana CP transformacija, *vremenska mikroobrativost*, kompozicija prostornog zrcaljenja i transformacije čestica u antičestice, prikazivati konačnu simetriju. No već 1964. godine uslijedio je slijedeći šok, narušenje CP simetrije u slabim raspadima K mezona. Do dana današnjeg taj mali kutak svijeta ostao je jedino mjesto gdje su pokusi utvrdili narušenje CP simetrije.

Od tog otkrića prošlo je više od tri desetljeća, dovoljno vremena da samo CP narušenje prestane biti misterija. Ono što je nekad bilo šokantno otkriće danas izgleda sasvim normalno. Dapače, znanje akumulirano u tzv. standardnom modelu pokazuje da bi neotkrivanje CP narušenja bilo iznenađenje. Uz to, mi samim svojim postojanjem svjedočimo CP narušenje: u završnom poglavlju knjige ćemo



Slika 2.1: *(a) prikazuje kako se na C, P i T gledalo prije 1957: simetrična, C, P i T polja grade CPT krug; (b) prikazuje kako su fizičari očuvali CP simetriju nakon otkrića narušenja pariteta: deformirana linija izmedju C i P slagalice indicira da i C simetrija mora biti narušena, što su pokusi stvarno i potvrdili; (c) prikazuje situaciju nakon 1964. Otkriće (male) asimetrije CP dijela povlači asimetriju T-dijela, da bi ukupno imali CPT simetriju*

vidjeti da je jedan od uvjeta za stvaranje opaženog viška čestica nad antičesticama u svemiru (barionske asimetrije svemira) postojanje sila koje narušavaju CP simetriju.

Na kraju, možemo se upitati što je s kombiniranom CPT transfomacijom, dobivenom istovremenim zrcaljenjem prostora, okretanjem smjera vremena i zamjenom materije antimaterijom. Teorijsko je očekivanje da je takav svijet identičan polaznom,

$$CPT = I \,. \tag{2.31}$$

Taj "CPT teorem" utvrđuje da kompozicija zasebnih C, P i T transformacija pri djelovanju na opservabilne veličine daje identičnu transformaciju (I). On na taj način izmedju ostalog predviđa jednakost masa čestica i antičestica. Najpreciznija eksperimentalna provjera tog predviđanja učinjena je za neutralne K mezone. Rezultat,

$$\frac{m_{\bar{K}^0} - m_{K^0}}{m_{K^0}} \; < \; 0.9 \times 10^{-18} \,, \tag{2.32}$$

potvrđuje CPT teorem na veliku točnost. Uz postuliran CPT teorem, svako mjerenje narušenja CP simetrije ujedno je i mjerenje neinvarijantnosti na vremenski obrat (T). Ovaj uvjet može se lijepo ilustrirati na modelu dječje slagalice, slika 2.1, gdje nedeformirani krug prikazuje savršeno simetričnu situaciju. Prema tome, pokusi s neutralnim K mezonima razotkrili su čudesan svijet sila koje znaju za smjer vremena.

Pogledajmo sada podrobnije kako u kvantnomehanički opis fizikalnog sustava ulaze gore spomenute diskretne P,C,T transformacije.

a) PROSTORNI PARITET

Prostorni paritet će se pokazivati kao simetrija hamiltoniana zatvorenog sustava bez slabih nuklearnih sila. Za sustave čiji hamiltonian komutira s operatorom prostornog pariteta, $[P, H] = 0$, valna funkcija $\psi(\vec{r})$ se može odabrati kao svojstvena funkcija operatora P. Iz jednostruke ili dvostruke primjene operatora P

$$P\psi(\vec{r}) = \begin{cases} \psi(-\vec{r}) \\ \eta_P \psi(\vec{r}) \end{cases} \to P^2\psi(\vec{r}) = \begin{cases} \psi(\vec{r}) \\ \eta_P^2 \psi(\vec{r}) \end{cases} \Longrightarrow \eta_P = \pm 1 \ , \tag{2.33}$$

zaključujemo na postojanje dvije klase stanja

$$\begin{array}{rl} P\psi_{(+)} = \psi_{(+)} & \text{parna} \ , \\ P\psi_{(-)} = -\psi_{(-)} & \text{neparna} \ . \end{array} \tag{2.34}$$

Za kvantnomehaničke operatore vrijedi

$$\begin{aligned} P\mathbf{r}_{op}P^{-1} &= -\mathbf{r}_{op} \\ P\mathbf{p}_{op}P^{-1} &= -\mathbf{p}_{op} \\ P\mathbf{L}P^{-1} &= \mathbf{L} \qquad \Longrightarrow [P, \mathbf{L}] = 0 \ . \end{aligned}$$

Jednočestična stanja u impulsnoj reprezentaciji promijene predznak impulsa i pribave fazu $\eta = \pm 1$:

$$P|\phi(k, s)\rangle = \eta_p |\phi(-k, s)\rangle \ . \tag{2.35}$$

Dok je ta faza ista za skalarne čestice i antičestice, za antifermione je suprotna u odnosu na fermione. Vlastita stanja operatora orbitalnog impulsa vrtnje, $\mathbf{L}$, $|lm\rangle$ su kugline funkcije $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Budući da u prostornim polarnim koordinatama prostorno zrcaljenje implicira

$$r \to r \qquad \theta \to \pi - \theta \qquad \varphi \to \pi + \varphi \ , \tag{2.36}$$

u prostoru stanja

$$Y_l^m(\theta, \varphi) \to PY_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-)^l Y_l^m \ , \tag{2.37}$$

odnosno

$$P|lm\rangle = (-)^l |lm\rangle \ . \tag{2.38}$$

Očekivane vrijednosti operatora heliciteta $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ za stanja dobro definiranog prostornog pariteta ($|\alpha\rangle$) iščezavaju. Naime, umetanjem jedinice $P^{-1}P$ u dijagonalni matrični element izlazi $\langle\alpha|\vec{\sigma} \cdot \vec{p}|\alpha\rangle = -\langle\alpha|\vec{\sigma} \cdot \vec{p}|\alpha\rangle$.

□ ULOGA P-SIMETRIJE U MEĐUDJELOVANJIMA ČESTICA

Očuvanje prostornog pariteta vodi na *multiplikativni* zakon očuvanja. Pokažimo to na primjeru procesa $|i\rangle \to |f\rangle$,

$$a + b \to c + d.$$

Budući da je početno stanje opisano produktom internih valnih funkcija čestica a, b i valne funkcije njihovog relativnog gibanja

$$|i\rangle = |a\rangle|b\rangle|\text{relativnog gibanja}\rangle \ , \tag{2.39}$$

zrcaljenjem prostora dobivamo

$$P|i\rangle = P|a\rangle P|b\rangle P|\text{relativnog gibanja}\rangle \ . \tag{2.40}$$

Za hadronska (jaka) i elektromagnetska međudjelovanja koja su odlučujuća za strukturu čestica, vrijedi

$$[H_{hadr} + H_{em}, P] = 0 \ . \tag{2.41}$$

Stoga ćemo česticama pridijeliti unutrašnje paritete, npr. $P|a\rangle = \Pi_a|a\rangle$. U skladu s time pariteti početnog i konačnog stanja će biti

$$\Pi_i = \Pi_a \Pi_b (-)^l, \qquad \Pi_f = \Pi_c \Pi_d (-)^{l'} \ , \tag{2.42}$$

gdje su l i l' relativni orbitalni impulsi vrtnje čestica u početnom i konačnom stanju. U usporedbi s aditivnim zakonima očuvanja (gdje se hermitski operator pojavljuje u eksponentu, te se zbraja pri umnošku eksponenata), P je sam po sebi hermitski operator i vodi na multiplikativni zakon očuvanja. Primjerice, nisko-energijska s-valna ($l = 0$) raspršenja na deuteronu,

$$\begin{array}{lll} (a) & \qquad & d\,\pi^- \to n\,n \\ (b) & \qquad & d\,\pi^- \to n\,n\pi^0, \end{array} \tag{2.43}$$

su procesi iz kojih se određuje paritet nabijenog i neutralnog piona. Pri tome se pariteti bariona određuju prema paritetima p, n i Λ čestice (konvencionalno $\Pi_p = \Pi_n = \Pi_\Lambda = 1$). Slično, deuteron kao dominantno $l = 0$ vezano stanje protona i neutrona ima $\Pi_d = +1$. S druge strane, deuteron ima spin $J = 1$, pa iz procesa (a) izlazi da je 2-neutronsko stanje također $J = 1$, što je po Paulijevom principu izvedivo kao $S = 1$ (simetrično) i l neparno (antisimetrično) ili $S = 0$ (antisimetrično) i l parno (simetrično) stanje. Našoj situaciji odgovara samo prvi slučaj (koji može dati $J = 1$, preko $S = 1$ i $l = 1$) , dakle ,

$$\Pi_{\pi^-} = \Pi_{(2n)} = (\Pi_n)^2(-)^l = -1 \ . \tag{2.44}$$

Budući da je pion bozon, pozitivno nabijeni π^+ mora imati isti paritet kao π^-, $\Pi_{\pi^+} = -1$. Paritet neutralnog π^0 može se odrediti iz neopažanja reakcije 2.43(b), jako potisnute u odnosu na 2.43(a). To potisnuće se može razumjeti iz nužnosti emisije π^0 u procesu 2.43(b) u stanju $l = 1$ dva neutrona, ako neutralni i nabijeni pioni imaju isti paritet. Tada raspad $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ potvrđuje očuvanje prostornog pariteta u elektromagnetskom međudjelovanju.

b) NABOJNA KONJUGACIJA

Transformacija nabojne konjugacije C je definirana tako da izmijeni predznak svim *nabojima*, aditivnim kvantnim brojevima poput barionskog (B), leptonskog (L) i hipernaboja (Y). To odgovara zamjeni čestica antičesticama

$$C|B(L), Y, q; \vec{p}, s\rangle = \eta_c| - B(-L), -Y, -q; \vec{p}, s\rangle \ . \tag{2.45}$$

Primjenom operacija Q i C (gdje $Q|q\rangle = q|q\rangle$ i $C\,|q\rangle = |-q\rangle$)

$$\{C, Q\} = 0 \ , \tag{2.46}$$

$$[C, Q] = 2CQ \neq 0 \ . \tag{2.47}$$

Budući da Q i C ne komutiraju, stanja općenito neće biti svojstvena stanja za oba ta operatora. Budući da je priroda odabrala stanja koja su vlastita stanja Q, B ili L, nabojni paritet će biti dobar kvantni broj samo na stanjima koja imaju sve aditivne kvantne brojeve nula. Dakle nabojni paritet ima svojstvenu vrijednost samo na potpuno neutralnim stanjima kao što su foton, π^0, η^0 ili sustavi čestice i antičestice (kao pozitronij). Iz C transformacije klasične struje nalazimo

$$\begin{aligned} \vec{J} = q\vec{v} \quad &\rightarrow \quad (-q)\vec{v} = -\vec{J} \qquad \Longrightarrow \\ \mathbf{J}^{em}_{op} \quad &\rightarrow \quad C\mathbf{J}^{em}_{op}C^{-1} = -\mathbf{J}^{em}_{op} , \end{aligned}$$

pridruženu transformaciju kvantnomehaničkog operatora. Za skalare i fermione unutrašnja faza antičestice je kompleksno konjugirana fazi pridružene čestice. Sama faza čestice je nefizikalna i stvar je konvencije.

□ PROVJERE C SIMETRIJE

Budući da je vektorski potencijal $\vec{A}$ (koji prikazuje foton) stvoren nabojima i strujama, za očekivati je da se na C transformaciju ponaša na način

$$\vec{A} \rightarrow -\vec{A} \ , \tag{2.48}$$

odnosno da ima svojstvenu vrijednost $\eta_c(\gamma) = -1$. Ako je nabojni paritet očuvan u elektromagnetskim raspadima $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ i $\eta^0 \rightarrow 2\gamma$, tada je

$$\eta_c(\pi^0) = 1, \qquad \eta_c(\eta^0) = 1 \ . \tag{2.49}$$

Nabojna konjugacija u elektromagnetskom međudjelovanju provjerava se putem neopažanja procesa

$$\pi^0 \to 3\gamma \text{ (na razini } 10^{-8}\text{)},$$

te

$$\eta^0 \to 3\gamma \text{ (na razini } 10^{-4}\text{)}.$$

Očuvanje C operacije u hadronskim (jakim) interakcijama provjerava se usporedbom raspodjele π^+ i π^- čestica iz proton-antiproton anihilacije

$$p\bar{p} \to \pi^+\pi^-\pi^0 \ ,$$

identične C-konjugiranoj reakciji $\bar{p}p \to \pi^-\pi^+\pi^0$ i slično u raspadu $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$.

c) VREMENSKI OBRAT

Okretanje smjera vremena vodi na novu valnu funkciju:

$$\begin{aligned} T : t &\to -t, \\ \psi(\vec{x}, t) &\to T\psi(\vec{x}, t). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Iz zahtjeva da $T\psi(\vec{x}, t)$ zadovoljava istu (odnosno kompleksno konjugiranu) Schrödingerovu jednadžbu, slijedi relacija :

$$T\psi(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t) \ . \tag{2.51}$$

Uočimo pojavljivanje kompleksne konjugacije, koja čini T antiunitarnim operatorom

$$T[a|\varphi\rangle + b|\psi\rangle] = a^* T|\varphi\rangle + b^* T|\psi\rangle \ . \tag{2.52}$$

Pojavljivanje kompleksne konjugacije pri vremenskom obratu označava da stanje ne može biti svojstveno stanje operatora T pa onda ne postoji ni pridruženi kvantni broj za T. Vremenskim obratom ravni val doživljava preobrazbu

$$\psi = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \to \psi^*(\vec{x}, -t) = e^{i(-\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \ , \tag{2.53}$$

kojoj odgovara promjena smjera gibanja

$$|\vec{p}\rangle \to |-\vec{p}\rangle \ . \tag{2.54}$$

Vremenskim obratom stanja orbitalnog impulsa vrtnje $|l, m\rangle$ (prisjetimo se relacije $\langle rlm|k\rangle = 4\pi i^l j_l(kr) Y_l^{m*}(\hat{k})$) doživljavaju preobrazbu

$$Y_l^m(\Theta, \varphi) \to Y_l^{m*}(\Theta, \varphi) = (-)^m Y_l^{-m}(\Theta, \varphi) \ . \tag{2.55}$$

Električni dipolni moment neutrona $\vec{d}_n$ označavao bi narušenje T-invarijantnosti. Budući da je jedini raspoloživi vektor kod neutrona njegov spin $\vec{\sigma}$, dipolni moment $\vec{d}$ (koji mjeri dislokaciju pozitivnog prema negativnom naboju u neutronu) bit će paralelan spinu. Tada se električni dipolni moment u odnosu na T transformira kao spin

$$T : d_n \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \to -d_n \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \ . \tag{2.56}$$

Budući da $\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$ ima isto ponašanje i na prostorno zrcaljenje (koje je simetrija elektromagnetskog međudjelovanja), za očekivati je da eventualno postojanje električnog dipolnog momenta elementarne čestice ide na račun slabog međudjelovanja.

□ PROVJERE SMJERA VREMENA

Smjer vremena u klasičnoj fizici

Tijek vremena evidentan je, kako na evoluciji svemira, tako i na sudbinama živih bića. Usprkos takvom svakodnevnom iskustvu, Newtonova mehanika nema ugrađen smjer vremena. Za sile $F(x)$ koje su nedispativne i vremenski (t-) neovisne, staze x(t) i x(-t) su ravnopravne trajektorije, kao rješenja zajedničke, Newtonove jednadže gibanja. Zadržimo se na trenutak na svojstvima simetrije Newtonove mehanike. Za izolirani sustav točkastih čestica Newtonov zakon $\vec{F} = m\vec{a}$ ima zapis:

$$m_\alpha \frac{d^2 \vec{x}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N) \tag{2.57}$$

gdje $\vec{x}_\alpha$ opisuje položaj točkaste čestice mase m_α. Ovakav zakon gibanja sadrži simetrije koje se odražavaju na dinamici. Uz neovisnost sile $\vec{F}$ na relativne položaje i na apsolutni izbor vremena, opažamo i simetriju na diskretne transformacije prostornog zrcaljenja (P) i vremenskog obrata (T):

$$P: \ \vec{x} \to \vec{x'} = -\vec{x} \ ; \qquad T: \ t \to t' = -t \ . \tag{2.58}$$

No već i za elastične sudare kugli (biljarskih lopti) možemo zamisliti situaciju koja je nevjerojatna pri puštanju filma unatraške — primjerice da se kugle poredaju u neki pravilni geometrijski lik (trokut, četverokut, . . . krug). To traži fino podešavanje *početnih uvjeta*, kotrljanje kugli strogo određenih brzina i smjerova. Na taj način početni uvjeti daju nam osjećaj strelice vremena, no sam zakon koji vlada sudarima čestica vrijedi jednako unaprijed i unazad.

Pustimo li unatraške film na kome su snimljeni pojedinačni sudari čestica, nećemo opaziti ništa neobično. No snimimo li kaplju u padu, okretanje filma vodi na vrlo nevjerojatnu situaciju: molekule pojure prema jednom središtu, oforme kaplju i polete u vis. Očigledno je fizikalni zakon koji opisuje pad kaplje ili gibanje metalne kuglice u viskoznom fluidu, kompleksniji od onog u gornjem Newtonovom izrazu. Ta kompleksnost odražava se putem narušenja simetrija, primjerice da sila ovisi o fiksiranom vektoru $\vec{R}$, ovisi eksplicitno o vremenu ili ovisi o brzini $\vec{v}$, kao što je to slučaj za gibanje u viskoznom fluidu,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \beta\frac{dx}{dt} + F \ . \tag{2.59}$$

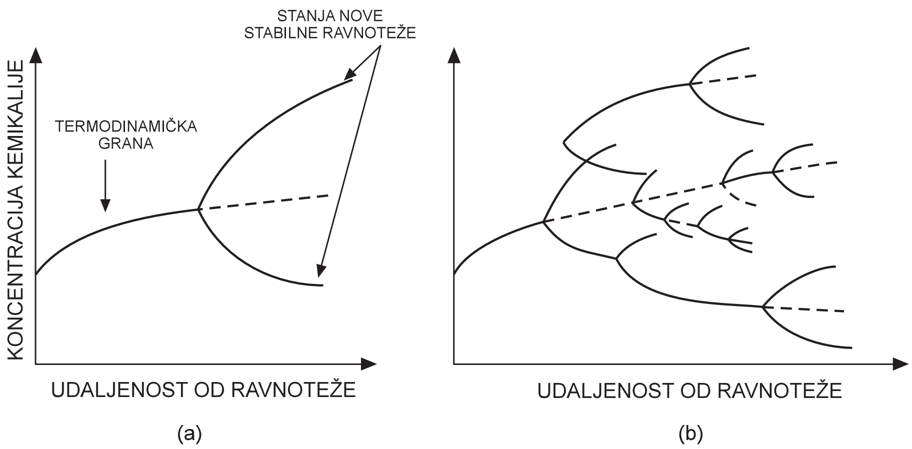
Vanjska sila može biti sila teže, a član trenja βv nije simetričan na vremenski obrat. Na makroskopskoj razini βv prikazuje *ad hoc* opis trenja, koje se mikroskopski odvija prijenosom energije molekulama u području kontakta. Spomenuta vremenska neobratljivost označava da je taj prijenos energije "jednosmjeran". Zakon u kome je ugrađena zabrana ovakvog vremenski obratnog procesa poznat je kao *drugi zakon termodinamike*. Matematički on je formuliran pomoću *entropije* S, koncepta koji je uveo Clausius oko 1850. Entropija, kao funkcija stanja danog sustava, određena je temperaturom T, volumenom V i brojem čestica N. U modernom probabilističkom jeziku, entropija je u relaciji s ukupnom termodinamičkom vjerojatnošću sustava, W

$$S \ = \ k \ln W \ , \tag{2.60}$$

gdje je k Boltzmannova konstanta. Za danu energiju, volumen i broj čestica postoji najvjerojatnije stanje kome sustav teži, termodinamička ravnoteža, u kojoj se postiže maksimalna entropija. U jeziku vjerojatnosti, entropija je mjera nereda sustava. Za sustave velikog broja čestica na raspolaganju je uvijek puno više neuređenih nego uređenih stanja. Za takve sustave zakon vjerojatnosti (porast entropije) određuje strelicu vremena, toliko evidentnu u gore spomenutim primjerima kaplje ili kuglice u padu.

No, očigledno je termodinamička ravnoteža idealizacija, stanje koje se u praksi može doseći samo nizom ireverzibilnih, neravnotežnih procesa. Primjer za to je i sam život, neravnotežni proces, za koji ravnoteža znači kraj — "pretvorbu u prah". Stoga, da bi bili u mogućnosti opisivati promjene (bez kojih nema svijesti o vremenu), moramo se odmaknuti od ravnotežne termodinamike. To je učinio Onsager tridesetih godina, razmatranjem *sustava blizu ravnoteže*. Primjer može biti metalni štap kojeg grijemo na jednom kraju. Stvoreni temperaturni gradijent djeluje kao "termodinamička sila" duž štapa. Ta sila u produktu s toplinskim fluksom daje produkciju entropije u procesu zagrijavanja štapa. Pri tome sustav blizu ravnoteže podliježe "linearnoj termodinamici": podvostručenjem termodinamičke sile udvostručuje se fluks. Stacionarno stanje prema kome takav sustav evoluira određeno je "zahtjevom minimuma entropije": stvaranje minimalne entropije — minimalne disipacije.

Nasuprot tome, u prirodi su realizirana i stanja koja očigledno ne odgovaraju zahtjevu produkcije minimalne entropije. Primjer su neravnotežne kemijske reak-



Slika 2.2: *Sustav daleko od ravnoteže može se rascijepiti na dva stabilna stanja (a), a najmanji potres može pokrenuti čitavu lavinu cijepanja (b)*

cije u kojima se pravilno izmijenjuje boja otopine — tzv. kemijski satovi. Radi se o sustavima *daleko od ravnoteže*, kod kojih nakon neke "kritične točke" dolazi do pojave visoko uređenih struktura. Za takve sustave koji su daleko od ravnoteže ne vrijedi prijašnje određenje strelice vremena, kao razvoja prema neredu. U uvjetima protoka materije i energije, osiguran je transport entropije u vanjsku okolinu i lokalno postojanje visoko uređenih struktura, kao što je to i sam život. Vremenska evolucija takvih sustava ovisit će osim o parametrima "velike skale" (temperaturi i tlaku) i o "mikroskopskim svojstvima" (gibanju konstituenata, atoma i molekula). Same jednadžbe koje opisuju evoluciju opservabilnih svojstava (npr. koncentraciju kemikalije) općenito su nelinearne (prisutnost kemikalije pojačava ili potiskuje svoju vlastitu produkciju). Ta nelinearnost odražava se u nestabilnosti sustava daleko od ravnoteže — daljnjem udaljavanju kroz tzv. bifurkacije (vidi sl. 2.2)

Kroz bezbroj bifurkacija sustav može na slučajni način dospjeti i do novog stabilnog stanja. Nelinearnost je nužna, ali ne i dovoljna za stvaranje takvih disipativnih struktura — za "samoorganizaciju". Općenito lanac bifurkacija vodi na potpuno slučajne, kaotične strukture. Jedan tip takve kaotične strukture su tzv. K-tokovi (po Kolmogorovu), za koje ni beskonačan broj prethodnih mjerenja nije dovoljan za predviđanje rezultata slijedećeg mjerenja. Za K-tokove uvedena je nova definicija vremena (Coubarge, Misra i Prigogine), konzistentna s ireverzibilnosti. Naime, definira se *interno vrijeme*, kao vijek života dinamičkog sustava, čime je uzet u obzir termodinamički aspekt ireverzibilnosti. Nasuprot tome, Newtonove jednadžbe obuhvatit će pri opisu istog sustava samo čisto reverzibilna dinamička svojstva. Ovakva relacija između mehanike i termodinamike može se shvatiti kao princip neodređenosti za klasične sustave s dinamičkim kaosom, po analogiji s principom neodređenosti u kvantnoj mehanici: kao što posljednji ne dozvoljava istovremeno poznavanje položaja i impulsa, tako se ovdje isključuju izvjesnost u termodinamičkim svojstvima (kroz poznavanje ireverzibilnog vijeka života) i izvjesnost u reverzibilnom dinamičkom opisu. Za nestabilne dinamičke sustave determinizam se i u klasičnoj fizici zamjenjuje konceptom vjerojatnosti i igrom slučaja.

Smjer vremena u kvantnoj fizici

Očekujemo da bi i u kvantnoj fizici test vremenskog obrata išao putem verifikacije dinamičke jednadžbe gibanja kojoj podliježu kvantnomehanički sustavi. Riječ je o Schrödingerovoj jednadžbi

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \;=\; H|\psi(t)\rangle \tag{2.61}$$

koja nadomješćuje Newtonovu jednadžbu. Ovdje H prikazuje hamiltonov operator (operator energije), $\hbar$ je Planckova konstanta, a $|\psi(t)\rangle$ je vektor stanja, koji je vremenski ovisan u Schrödingerovoj slici. Uz ispunjenu simetriju na vremenski obrat, vremenski invertirana stanja ($T|\psi\rangle$) moraju zadovoljavati istu jednadžbu,

$$-i\hbar\frac{d}{dt}(T|\psi(t)\rangle) \;=\; H(T|\psi(t)\rangle)\;. \tag{2.62}$$

Nakon što smo utvrdili uvjete pod kojima vremenski invertirano stanje zadovoljava originalnu Schrödingerovu jednadžbu, pitamo se kako testirati vremenski obrat u tipičnom kvantnomehaničkom procesu raspršenja.

Odgovor je u tzv. principu "iscrpne ravnoteže": budući da T povezuje valnu funkciju $\psi_\alpha(t)$ s kompleksno konjugiranom $\psi^*_\alpha(-t)$, povezani su matrični elementi $\psi^*_\alpha M\psi_\beta$ i $\psi^*_\beta M\psi_\alpha$ (amplitude reakcija $\alpha\rightarrow\beta$ i $\beta\rightarrow\alpha$).

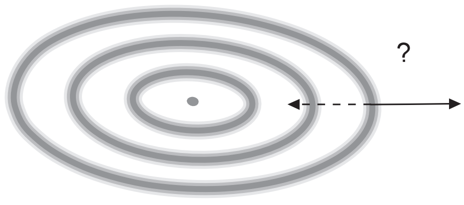
Općenito, testiranje T narušenja pri sudarima čestica nailazi na nepremostive teškoće. Pogledajmo npr. proces u kome se sudaraju dvije čestice, da bi stvorile tri čestice u konačnom stanju. Njemu recipročni proces u praksi je vrlo nevjerojatan. Tu se pojavljuje problem analogan onome u klasičnoj fizici. Naime, već za sustav malog broja čestica, je vrlo teško u eksperimentu namjestiti odnose faza, koji bi od vremenski obrnutog vodili na originalni proces (ilustrirano na slici 2.3).

Iako "iscrpna ravnoteža" zahtijeva jednakost matričnih elemenata $|M_{\alpha\beta}| = |M_{\beta\alpha}|$, brzine reakcija se mogu razlikovati: $W_{\alpha\rightarrow\beta}\neq W_{\beta\rightarrow\alpha}$, na račun različitih faktora faznih prostora ($\rho_\beta\neq\rho_\alpha$) koji ulaze u Fermijevo zlatno pravilo

$$W_{\alpha\rightarrow\beta} = \frac{2\pi}{\hbar}|M_{\alpha\beta}|^2\rho_\beta\;. \tag{2.63}$$

Primjeri nuklearnih procesa u kojima je testirana T invariantnost su

$$\gamma + d \;\;\leftrightarrow\;\; n + p$$



Slika 2.3: *Usporedba nevjerojatnosti pojavljivanja T-obrnutog kvantnomehaničkog procesa s koncentričnim krugovima vala koji se pojavi kad bacimo kamenčić u vodu. No jeste li ikad u prirodi opazili obrnutu pojavu, da se kružni valovi skupe i nestanu u središtu?*

$$
\begin{aligned}
p + H^3 &\leftrightarrow d + d \\
p + Al^{27} &\leftrightarrow \alpha + Mg^{24}
\end{aligned}
$$

U nuklearnim reakcijama (gdje je α jezgra helija, a d je deuterij), dobivene su granice na T narušenje, koje su tipično reda 1%, dok je u (prvoj) elektromagnetskoj reakciji postignuta točnost od samo 20%.

Negativni rezultati provjere vremenskog obrata u jakim i elektromagnetskim međudjelovanjima ne iznenađuju nas. Iskustvo s P i C simetrijama uči nas da, ako negdje možemo očekivati T narušenje, bit će to u slabim međudjelovanjima. Međutim, pomoću njih je vrlo teško izvesti obrnuti proces. Za slabi raspad $\Lambda \to p^+ + \pi^-$, recipročna reakcija, $p^+ + \pi^- \to \Lambda$, zasjenjena je jakim međudjelovanjem protona i piona. Takvo jako ili elektromagnetsko zasjenjenje moglo bi se izbjeći pokusima s neutrinima, no oni su teško izvedivi iz drugih razloga. Stoga se testiranje vremenskog obrata svodi na mjerenje statičkog električnog dipolnog momenta elementarne čestice, ili na neizravno testiranje putem CPT teorema. Pokazano je da je uz opće zahtjeve koji vode na kvantnu teoriju polja produkt $CPT = I$ (identitet). U tim uvjetima, mjerenje CP narušenja kakvo je po prvi put izvedeno u pokusima Fitcha i Cronina, istovremeno je i signal T narušenja.

2.1.3 Približne unutrašnje simetrije

U prethodnim smo odjeljcima jasno vidjeli da fizikalni sustav posjeduje više simetrija ukoliko zanemarimo postojanje slabih (sub)nuklearnih međudjelovanja. Ovdje ćemo otići korak dalje: u odsutnosti elektromagnetskog međudjelovanja jaka nuklearna sila posjeduje dodatnu simetriju, *izospin*. Budući da je riječ o simetriji vezanoj za specifično međudjelovanje, takva se simetrija naziva *dinamičkom*. Istovremeno, budući de se ova simetrija hamiltoniana očituje degeneracijom razina, kažemo da se ona pojavljuje na Wigner-Weylov način (kao simetrija spektra stanja).

□ NABOJNA NEOVISNOST NUKLEARNIH SILA I IZOSPIN

Odmah po otkriću neutrona 1932. godine, Heisenberg je opazio da se proton i neutron mogu shvatiti kao dva stanja iste čestice, nukleona. Mala razlika u masi[1] dolazila bi od toga što je proton nabijen (jedino što bi naivno očekivanje bilo da energija uskladištena u električnom polju čini proton težim za iznos $E = mc^2$).

Studij sudjelovanja hadrona u jakom međudjelovanju započeo je proučavanjem raspršenja pp (protona na protonu) i pn (protona na neutronu), kao i proučavanjem energija vezanja zrcalnih jezgri ${}^3H$ i ${}^3He$, ${}^7Li$ i ${}^7Be$ itd. Kao rezultat, hadronska sila između parova

$$n-n, \;\; n-p, \;\; i \;\; p-p.$$

pokazuje istu jakost i doseg, ukoliko odračunamo utjecaj kulonske sile. Ta nabojna neovisnost jake nuklearne sile svodit će se, u jeziku Heisenbergova izospina, na simetrije pri rotacijama u apstraktnom izospinskom prostoru. Za nukleon N, izospina $I = 1/2$, stanja projekcije na treću os I_3 su

$$\begin{aligned} |p\rangle &= |1/2, 1/2\rangle \\ |n\rangle &= |1/2, -1/2\rangle . \end{aligned} \tag{2.64}$$

Uočimo odmah i vezu naboja tih stanja s trećom komponentom izospina

$$eQ = e\left(I_3 + \frac{1}{2}\right) . \tag{2.65}$$

U potpunoj analogiji s impulsom vrtnje, izospin je vektor u apstraktnom trodimenzionalnom prostoru, $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$. Budući da rotacija za 180^o oko druge osi u tom prostoru pretvara protone u neutrone, gornje nerazlikovanje protona i neutrona od strane hadronske sile izriče se iščezavanjem komutatora:

$$[H_{hadr}, \vec{I}] = 0 \; . \tag{2.66}$$

Kao i kod očuvanja impulsa vrtnje, to onda znači da je $2I + 1$ stanja, različitih projekcija I_3, degenerirano. Elektromagnetsko međudjelovanje će narušiti izotropnost izospinskog prostora 100 puta slabijim doprinosima pa će to narušenje biti malo. Pritom, budući da je električni naboj Q svetinja (očuvan i u prisutnosti elektromagnetskog međudjelovanja),

$$[H_{hadr} + H_{em}, Q] = 0 \; , \tag{2.67}$$

to uz vezu naboja s I_3 govori da je treća komponenta izospina dobar kvantni broj i u prisutnosti elektromagnetizma. Na izospin kao $SU(2)$ simetriju vratit ćemo se na samom kraju ovog poglavlja te u odjeljku **??**

[1] $(m_n - m_p)/m_N \simeq 1.4 \times 10^{-3}$

□ G **PARITET**

Uvođenjem izospina dolazimo do mogućnosti da poopćimo operator nabojne konjugacije C (koji ima svojstvene vrijednosti samo na potpuno neutralnim stanjima), na operator G konjugacije, koji će imati i nabijena stanja kao svojstvena stanja. Vlastite vrijednosti tog operatora zvat će se G paritet. Sam operator G konjugacije definira se kao kompozicija C konjugacije i rotacije u izospinskom prostoru za $180°$ oko druge isospinske osi:

$$G = \exp(i\pi I_2)C \; . \tag{2.68}$$

U uobičajenoj konvenciji za pionsko polje, $C\pi^{\pm} = \pi^{\mp}$, $C\pi^0 = \pi^0$, pa ako ta stanja izrazimo komponentama π_1, π_2 i π_3 na način

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2), \qquad \pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2), \qquad \pi^0 = \pi_3 \; , \tag{2.69}$$

tada:

$$C \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ -\pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \; . \tag{2.70}$$

U kompoziciji s izospinskom rotacijom

$$e^{i\pi I_2} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi_1 \\ \pi_2 \\ -\pi_3 \end{pmatrix} \; , \tag{2.71}$$

to daje:

$$G \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi_1 \\ -\pi_2 \\ -\pi_3 \end{pmatrix} \; . \tag{2.72}$$

Dakle, pion je vlastito stanje, negativnog G pariteta

$$G\pi^+ = -\pi^+, \qquad G\pi^- = -\pi^-, \qquad G\pi^0 = -\pi^0 \; , \tag{2.73}$$

a isto će vrijediti i za sustav neparnog broja piona. Budući da će parni broj piona imati pozitivni G paritet, jakim međudjelovanjem koje čuva G konjugaciju neće se moći prijeći s parnog na neparni broj piona.

Određeni G paritet može se pridjeliti samo onim hadronima koji ne posjeduju daljnje atribute od izospina. Naime, aditivni kvantni brojevi poput barionskog broja ili stranosti zrcale se pod djelovanjem C, tako da, primjerice, izoskalarni barion Λ^0, G operacijom prelazi u antibarion, $G|\Lambda^0\rangle = |\bar{\Lambda}^0\rangle$.

Razmatranja izospina i G pariteta su od interesa u procesima višečestične produkcije, bilo na ubrzivačima čestica, bilo u događajima koje u atmosferi proizvode kozmičke zrake visokih energija. Pri zadnjem treba spomenuti tzv. Centauro događaje pri kojima se bilježi zagonetno produciranje samo jedne vrste čestica, nabijenih ili neutralnih, dok bi na temelju C simetričnog međudjelovanja očekivali njihovu ravnopravnu i ujednačenu produkciju.

2.2 Načelo simetrije u relativističkoj fizici

Einsteinom postulirano simetrično (ravnopravno) pojavljivanje prostora i vremena, odudara od iskustva iz svakodnevnog života, ali čini temelj specijalne teorije relativnosti, potvrđene brojnim pokusima. Posebice su elementarne čestice sa svim svojim zbivanjima uronjene u četverodimenzionalni prostor-vrijeme, u kome se prostor i vrijeme mjere "istim metrom".

2.2.1 Relativistička invarijantnost i četverovektori

Pokusi Michelsona i Morleya pokazali su nemogućnost da se elektromagnetskim pokusima utvrdi apsolutni sustav mirovanja. Neobično zbrajanje brzina, koje postaje očigledno tek na velikim brzinama karakterističnim za elementarne čestice, posljedica je ravnopravnog pojavljivanja prostora i vremena, dizajniranog tako da se *slobodne čestice* ponašaju jednako u svim inercijalnim Lorentzovim sustavima. Proširenje tog zahtjeva na *sve* fizikalne sustave (dakle i na sustave s česticamna u međudjelovanju) rezultira *principom relativnosti*: zakoni fizike su invarijantni na Lorentzove transformacije (očuvan je matematički oblik zakona, a konstante zadržavaju istu numeričku vrijednost). Temeljna premisa specijalne relativnosti je konstantnost brzine svjetlosti c, koja ima istu vrijednost u svim Lorentzovim sustavima.

Lorentzova transformacija povezuje prostorno-vremenske koordinate u dva Lorentzova sustava. Primjerice, za dva sustava koja su u relativnom gibanju duž x osi, prijelaz sa sustava S na sustav $S'(v)$ opisan je na način

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - xv/c^2) \ , \end{aligned} \tag{2.74}$$

gdje je relativistički faktor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Gornji zakoni transformacije imat će puno elegantniji zapis ako od prostorno-vremenskih koordinata oformimo četverovektor s komponentama $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$, i $ct = x^0$:

$$\text{kontravarijantni vektor: } x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) \tag{2.75}$$
$$\text{kovarijantni vektor: } x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\vec{x}) \; . \tag{2.76}$$

Indeksi četverovektora označeni su grčkim slovom koje poprima četiri vrijednosti ($\mu = 0, 1, 2, 3$), gdje je nulta komponenta vremenska, a tri prostorne komponente označene su latinskim indeksima ($i = 1, 2, 3$). Danim četverovektorom prostorno-vremenske točke prikazujemo "događaj", primjerice položaj čestice u nekom trenutku. Kontravarijantni i kovarijantni vektori povezani su tenzorom dizanja i spuštanja indeksa, tenzorom Minkowskog ili *metričkim tenzorom* $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \; . \tag{2.77}$$

Metrički tenzor omogućit će kontrahiranje indeksa $\mu = 0, 1, 2, 3$, tj. skalarni produkt dva četverovektora

$$x^2 = x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 \; . \tag{2.78}$$

Takvim skalarom, invarijantnom veličinom, moći ćemo opisivati udaljenost dva događaja. Ta udaljenost, prostorno-vremenski interval $s^2 = x^2$, prikazuje očuvanu veličinu pridruženu simetriji na Lorentzove transformacije Λ :

simetrija	*transformacija*	*neopažanje apsolutne*
Lorentzova	$x \to \Lambda x$	*brzine sustava*

Za razliku od Newtonovog prostora-vremena u kome postoje dvije udaljenosti

$$\begin{aligned} \textit{prostorna udaljenost} &\implies l^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \textit{vremenska udaljenost} &\implies \text{t}, \end{aligned}$$

u geometriji Minkowkog postoji jedinstvena udaljenost

$$\textit{prostorno-vremenski interval}: \quad s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t^2 - l^2,$$

pri čemu interval nije nužno pozitivno definitan. Tako razlikujemo intervale koji su:

$$\begin{aligned} s^2 &> 0 \; vremenski \\ s^2 &= 0 \; svjetlosni \\ s^2 &< 0 \; prostorni \; , \end{aligned} \tag{2.79}$$

a ovisno o položaju neke točke u odnosu na *svjetlosni stožac* opisan svjetlosnim intervalima, ta točka će se moći dosegnuti svjetlošću, kao najbržim signalom, ili će biti čak izvan njenog domašaja za prostorni interval. Ovakva geometrija kojom se opisuje specijalna teorija relativnosti vrijedi u odsutnosti gravitacijskih polja. U prisutnosti gravitacijskog polja javilo bi se odstupanje od *ravnog* prostora Minkowskog — udaljenosti bi se trebale mjeriti duž zakrivljenih svjetskih linija. U svijetu sićušnih elementarnih čestica te su zakrivljenosti potpuno zanemarive.

Poput prostorno-vremenskih točaka i ostale veličine bit će prikazane četverovektorima, odnosno tenzorima. Tako će diferencijali:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right), \tag{2.80}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), \tag{2.81}$$

voditi na D'Alambertov operator

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^2 \ . \tag{2.82}$$

Uočimo da gornje derivacije pružaju koordinatni prikaz kvantnomehaničkog operatora:

$$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\nabla\right) \ . \tag{2.83}$$

U specijalnoj teoriji relativnosti, energija E i impuls $\vec{p}$ izoliranog sustava (očuvane veličine pridružene zasebnim vremenskim i prostornim simetrijama), komponente su četverovektora energije impulsa

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \ . \tag{2.84}$$

Za najjednostavniji fizikalni sustav, slobodnu česticu mase m, kvadrat četveroimpulsa prikazuje jednoznačnu relativističku invarijantu:

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2 \ . \tag{2.85}$$

U prirodnom sustavu jedinica koji ćemo nadalje rabiti

$$p^2 = m^2 \tag{2.86}$$

prikazuje *1. Casmirovu invarijantu* — operator koji komutira sa svim generatorima Poincaréove algebre. Slijedeća invarijanta koja bi nam pomogla u daljnjoj klasifikaciji elementarnih čestica povezana je sa spinom čestica. Prije nego što nas taj program odvede na prikaz čestica *tenzorskim poljima*, zadržimo se još na trenutak na samoj Lorentzovoj i Poincaréovoj grupi.

2.2.2 Lorentzova grupa

Po uvođenju četverovektora prostorno-vremenskog položaja Lorentzova transformacija (2.74) (uz pokratu $\beta = v/c$) poprima oblik

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \, . \end{aligned} \tag{2.87}$$

Sada je moguće Lorentzove transformacije prikazati u kompaktnoj formi, kao linearne transformacije na četverovektorima

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu_\nu x^\nu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu \ , \tag{2.88}$$

gdje zadnji korak podrazumjeva "Einsteinovu sumaciju" po ponovljenom indeksu. Za gornji specijalni slučaj, transformacija je prikazana matricom

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.89}$$

Iz zahtjeva očuvanja kvadratične forme

$$x^2 = x'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \tag{2.90}$$

izlazi uvjet:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \ . \tag{2.91}$$

Uočimo sličnost Lorentzovih rotacija (Λ) četverodimenzionalnog prostora

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \tag{2.92}$$

s običnim rotacijama (R) trodimenzionalnog prostora

$$R^T I R = I \ . \tag{2.93}$$

Relacija (2.91) omogućuje nam da izdvojimo dva uvjeta na Lorentzove transformacije

$$\det \Lambda = \pm 1 \qquad \text{i} \qquad |\Lambda^0_0| \geq +1 \ . \tag{2.94}$$

Prvi se dobiva uzimanjem determinante od (2.91), drugi uzimanjem (0,0) komponente od (2.91). Time su određena četiri nepovezana područja parametarskog prostora Lorentzovih transformacija *homogene Lorentzove grupe* (HLG), odnosno klasifikacija na *vlastite* $L_{(+)}(\det \Lambda = +1)$ i *nevlastite* $L_{(-)}(\det \Lambda = -1)$, odnosno *ortokrone* $L^\uparrow$ ($\Lambda^0_0 \geq 1$) i *neortokrone* $L^\downarrow(\Lambda^0_0 \leq -1)$. Navedimo tipične transformacije:

◇ *rotacije*

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in L_+^\uparrow \ , \tag{2.95}$$

gdje obične rotacije u trodimenzionalnom prostoru zadovoljavaju relaciju $R^T R = I$;

◇ *prostorna refleksija* $\Lambda_P = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \in L_-^\uparrow$;

◇ *vremenski obrat* $\Lambda_T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \in L_-^\downarrow$;

◇ Lorentzovi potisci čine grupu Lorentzovih *transformacija brzina*, gdje u *pasivnom* shvaćanju koordintnom sustavu damo potisak $-\vec{v}$, dok u *aktivnom* shvaćanju čestica dobije potisak $\vec{v}$.

Prije navedeni primjer (2.87) potiska duž x_j-osi uz $\beta_j = v_j/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta_j^2}$, postaje u aktivnom shvaćanju:

$$\begin{aligned} x'_j &= \gamma(x_j + \beta_j t), \\ x'_k &= x_k \qquad\qquad (k \neq j) \\ t' &= \gamma(t + \beta_j x_j). \end{aligned} \tag{2.96}$$

Primjerice za j=1

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & 0 & 0 \\ \gamma\beta_1 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{2.97}$$

dok za j=3

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta_3 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \tag{2.98}$$

Uzastopni potisci čine grupu preko relativističkog zbrajanja brzina: ako potisak β'_j slijedi nakon β_j, ekvivalentan će potisak biti

$$\beta''_j = \frac{\beta'_j + \beta_j}{1 + \beta'_j \beta_j} \ . \tag{2.99}$$

Jednostavnu aditivnost (kao kod rotacija oko iste osi) dobit ćemo uvođenjem parametra potiska — *rapideta* ζ_j ("Varićakovog parametra")

$$\beta_j = \text{th}\,\zeta_j \qquad (\text{tada } \gamma = \text{ch}\,\zeta_j) \ . \tag{2.100}$$

Uz relaciju $\text{Arth}\,(z'+z)/(1+z'z) = \text{Arth}\,z' + \text{Arth}\,z$ dobivamo

$$\zeta_j'' = \text{Arth}\,\beta_j'' = \text{Arth}\,\beta_j' + \text{Arth}\,\beta_j = \zeta_j' + \zeta_j \ . \tag{2.101}$$

Tada je

$$\begin{aligned} x_j' &= x_j\,\text{ch}\,\zeta_j + t\,\text{sh}\,\zeta_j, \\ x_k' &= x_k \qquad\qquad\qquad \text{za } k \neq j \\ t' &= x_j\,\text{sh}\,\zeta_j + t\,\text{ch}\,\zeta_j \ . \end{aligned} \tag{2.102}$$

Primjerice, za potisak u z-smjeru izražen parametrom rapiditeta ζ

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} \text{ch}\,\zeta & 0 & 0 & \text{sh}\,\zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh}\,\zeta & 0 & 0 & \text{ch}\,\zeta \end{pmatrix} , \tag{2.103}$$

x- i y-smjerovi su invarijantni. Uočimo da je $\Lambda_3^T = \Lambda_3$, a ne Λ_3^{-1}.

Rotacije i potisci HLG odražavaju se u vektorskom prostoru stanja (valnih funkcija). Za rotacije u koordinatnom prostoru

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = R_{(\hat{n},\varphi)}\vec{r} \tag{2.104}$$

valna funkcija se transformira na način

$$\psi(\vec{r}) \to \psi'(\vec{r}) \ = \ U_{(\hat{n}\varphi)}\psi(\vec{r}) = \psi\left(R^{-1}\vec{r}\right), \tag{2.105}$$

gdje je operator transformacije

$$U_{(\hat{n}\varphi)} = e^{-i\varphi\hat{n}\cdot\vec{L}} \ . \tag{2.106}$$

Pritom u koordinatnoj reprezentaciji imamo za čestice bez spina prikaz

$$J_z \to L_z = i(x\partial/\partial y - y\partial/\partial x) \qquad \text{i ciklički.} \tag{2.107}$$

Stoga vrijede poznate komutacijske relacije:

$$[J_i, J_j] \ = \ i\epsilon_{ijk}J_k \ ; \tag{2.108}$$

$$[P_i, J_j] \ = \ i\epsilon_{ijk}P_k \ ; \tag{2.109}$$

$$[P_0, J_j] \ = \ 0 \ . \tag{2.110}$$

Potisci u koordinatnom prostoru

$$x^\mu \to x'^\mu = \left[\Lambda_{(\zeta,\hat{n})}\right]^\mu_{\ \nu} x^\nu \tag{2.111}$$

praćeni su transformacijom u vektorskom prostoru stanja

$$\psi'(x^\mu) = U_{(\zeta,\hat{\eta})}\psi(x^\mu) = \psi\left\{\left[\Lambda^{-1}_{(\zeta,\hat{n})}\right]^\mu_{\ \nu} x^\nu\right\}, \tag{2.112}$$

gdje je unitarna transformacija U izražena generatorom potiska $\vec{K}$,

$$U_{(\zeta,\hat{n})} = e^{-i\zeta\hat{n}\cdot\vec{K}} \ . \tag{2.113}$$

Generatori potiska u koordinatnoj reprezentaciji imaju oblik

$$K_j = -i\left(t\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j\frac{\partial}{\partial t}\right) \ , \tag{2.114}$$

a njihovi komutatori su

$$[K_i, P_0] \ = \ -iP_i \tag{2.115}$$

$$[K_i, P_j] \ = \ -i\delta_{ij}P_0 \tag{2.116}$$

$$[J_i, K_j] \ = \ i\epsilon_{ijk}K_k \tag{2.117}$$

$$[K_i, K_j] \ = \ -i\epsilon_{ijk}J_k \ . \tag{2.118}$$

Generatori $\vec{J}$ i $\vec{K}$ grade antisimetričnu 4×4 matricu $M^{\mu\nu}$, tenzor impulsa vrtnje

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2.119}$$

Uočimo da vrijedi

$$\epsilon_{kij}M_{ij} = J_k \ , \qquad M_{0i} = K_i \ . \tag{2.120}$$

Svaka transformacija $\Lambda \in L_+^\uparrow$ (iz vlastite ortokrone HLG) ima prikaz

$$\Lambda^\mu_\nu = [e^{-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}}]^\mu_\nu \ . \tag{2.121}$$

Eksplicitni je prikaz generatora potisaka sličan onom za generatore rotacija

$$K_i = \frac{1}{i}\frac{\partial\Lambda_i}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=0} \ , \qquad J_i = \frac{1}{i}\frac{\partial R_i}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0} \ , \tag{2.122}$$

tako da dobivamo

$$K_1 \ = \ -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.123}$$

$$K_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.124}$$

$$K_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.125}$$

Primjetimo da uzastopni potisci ne vode na novi potisak[2]. Da bismo zatvorili algebru, potrebno je K_i matrice dopuniti generatorima grupe rotacija $0(3)$:

$$J_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.126}$$

$$J_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.127}$$

$$J_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.128}$$

Tada je

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \tag{2.129}$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{2.130}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k . \tag{2.131}$$

Ako od gornjih šest generatora učinimo kombinacije

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \qquad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \tag{2.132}$$

postigli smo komutativnost:

$$[A_i, B_j] = 0 \qquad \text{za svaki } i \text{ i } j . \tag{2.133}$$

[2]Dodatna rotacija koja se javlja nakon više Lorentzovih potisaka vodi na fizikalni učinak poznat kao Thomasova precesija.

Time smo gornju algebru sveli na dvije odvojene $SU(2)$ algebre

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k \ , \qquad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k \ . \tag{2.134}$$

To će nam omogućiti da pomoću ireducibilnih reprezentacija ($j = 0, 1/2, 1, 3/2\ldots$) grupe $SU(2)$ konstruiramo reprezentacije Lorentzove grupe, koje ćemo označavati s (j, j'). Na taj način će Lorentzova grupa uz tenzorske reprezentacije sadržavati i *spinorne* reprezentacije, za koje je $j + j'$ = polucijelo. Tenzor impulsa vrtnje (vidjeti (2.107, 2.114,i 2.119)) bit će poopćen s $i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$, na najopćenitiji oblik

$$M_{\mu\nu} = i\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right) + S_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \ , \tag{2.135}$$

gdje posljednji član, $S_{\mu\nu}$, prikazuje hermitsku veličinu koja komutira s prethodnim članom i zadovoljava istu Liejevu algebru. Dakle i ukupno:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i\left(g_{\mu\rho}M_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}\right) \ . \tag{2.136}$$

2.2.3 Poincaréova grupa i lokalna polja

Uključimo li uz homogene Lorentzove transformacije i translacije za konstantni četverovektor a^μ

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \ , \tag{2.137}$$

interval $(x - y)^2$ u prostoru Minkowkog i dalje je očuvan. Uz oznake koje slijede one za HLG, uvodi se vjerna reprezentacija grupe $\mathcal{P}^\uparrow_+$, preslikavanje iz prostora Minkowkog u vektorski prostor stanja:

$$(\Lambda, a) \to U(\Lambda, a) \ . \tag{2.138}$$

Za infinitezimalne transformacije (u okolini jedinične) može se pisati

$$U(\Lambda, a) = I - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + ia_\mu P^\mu \ . \tag{2.139}$$

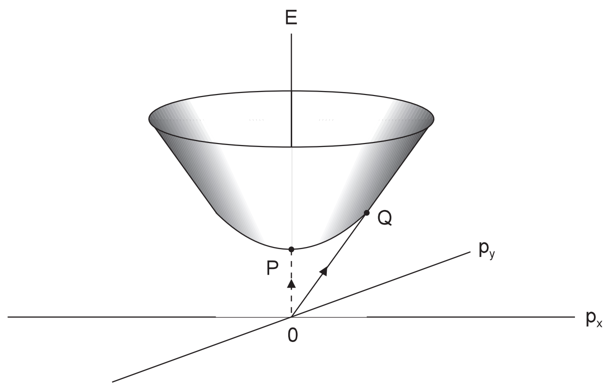
Dakle, opća je transformacija karakterizirana sa šest infinitezimalnih parametara rotacija i potisaka, sadržanih u antisimetričnoj veličini $\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}$ te s četiri infinitezimalna parametra translacija. Komutatori generatora

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}M^{\sigma\nu} - g^{\mu\sigma}M^{\rho\nu} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}) \tag{2.140}$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = -ig^{\mu\rho}P^\nu + ig^{\nu\rho}P^\mu \tag{2.141}$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0 \tag{2.142}$$

definiraju Poincaréovu algebru.



Slika 2.4: *Ploha energije E čestice zadane mase m, u ovisnosti o komponentama impulsa P_x i P_y (P_z je ispušten). Položaj P odgovara energiji i impulsu čestica u mirovanju, a točka Q za istu česticu u gibanju*

Provjerimo li još da kvadrat četverovektora P^μ komutira sa svim generatorima Poincaréove algebre (provjeri se $[M^{\mu\nu}, P^2] = 0$), ustanovit ćemo $P^2 = P_\mu P^\mu$ kao *prvu Casimirovu invarijantu.* Zajedno s nultom komponentom P^0, čiji se predznak ne mijenja pri Lorentzovim transformacijama, $P^2 = m^2$ katalogizira stanja u šest odvojenih klasa. Pri tome su fizikalne čestice pridružene

$$P^2 = m^2 > 0, \qquad P^0 > 0 \;, \tag{2.143}$$

čemu odgovara dijagram energije i impulsa na sl. 2.4, ili u klasi

$$P^2 = m^2 = 0, \qquad P^0 > 0 \;, \tag{2.144}$$

s dijagramom energije-impulsa na sl. 2.5. Klasa s $P^0 < 0$ bit će nefizikalna, dok $P^2 < 0$ nalazimo kod virtuelnih čestica impulsa prostornog tipa, a $P^\mu \equiv 0$ će odgovarati vakuumu.

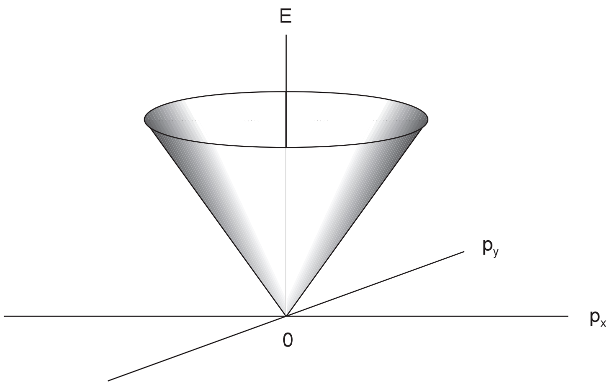
Moguće je naći još jednu veličinu koja komutira sa svim generatorima Poincaréove algebre. Ona je

$$W^2 = W_\mu W^\mu \;, \tag{2.145}$$

kvadrat vektora Pauli-Lubanskog

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \;. \tag{2.146}$$

Fizikalno značenje ove *druge Casimirove invarijante* nije očigledno. To ne može biti sam spin, čije se nerelativističko shvaćanje gubi kad na čestice izvršimo Lorentzove potiske. Da bi našli značenje W^2, otići ćemo u sustav mirovanja masivne



Slika 2.5: *Energije i impulsi za bezmasenu česticu mogu poprimiti vrijednosti na prikazanom stošcu*

čestice, gdje $P^\mu = (m, 0)$ zahtijeva

$$W^0 = 0 \qquad \text{(zbog ortogonalnosti } W_\mu P^\mu = 0\text{)} \tag{2.147}$$

$$W^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk0} P_0 M_{jk} \ . \tag{2.148}$$

Uz identifikaciju komponenata spina na način $S_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M^{jk}$, dobivamo

$$W_i = -mS_i \ , \tag{2.149}$$

tj. vektor Pauli-Lubanskog se u sustavu mirovanja čestice prepoznaje kao generator spina. Za diskretne vrijednosti spina $s = 0, 1/2, 3/2, \ldots$ to će dati

$$W^2 = -\vec{W}^2 = -m^2 \vec{S}^2 = -m^2 s(s+1) \ . \tag{2.150}$$

Uz $2s+1$ projekcija spina s $(-s, \ldots, s-1, s)$ česticu mase m prikazivat ćemo $(2s+1)$-komponentnim spinorom (multipletom stanja), reprezentacijom Poincaréove grupe s

$$P^2 = m^2 > 0, \qquad W^2 = -m^2 s(s+1) \ . \tag{2.151}$$

Za bezmasene čestice, za koje je $P^2 = 0$, treba istovremeno ispuniti tri uvjeta:

$$W^2|p\rangle = W_\mu P^\mu |p\rangle = P_\mu P^\mu |p\rangle = 0 \ . \tag{2.152}$$

To će biti zadovoljeno ako su W i P proporcionalni (zavisni), tj. ako na bezmasenom stanju $|p\rangle$ vrijedi

$$W_\mu |p\rangle = \lambda P_\mu |p\rangle \ . \tag{2.153}$$

Uz definiciju W^μ i identifikaciju generatora impulsa vrtnje $J_i = \epsilon_{ijk} M^{jk}/2$ dobiva se

$$W^0 = \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk} P_i M_{jk} = \vec{P} \cdot \vec{J} \ . \tag{2.154}$$

Time dolazimo do veličine

$$\lambda = \frac{\vec{P} \cdot \vec{J}}{P^0} \;, \tag{2.155}$$

nazvane *helicitet*. Na stanju dobro definiranog prostornog pariteta helicitet poprima samo dvije vrijednosti, $\hbar$ i $-\hbar$. Uz (2.151), to je druga reprezentacija Poincaréove grupe,

$$P^2 = 0, \qquad W^2 = 0 \;, \tag{2.156}$$

koju nalazimo u prirodi. Čestice koje bi odgovarale kontinuiranom spinu

$$P^2 = 0, \qquad W^2 = -\rho^2 \qquad \text{kontinurano} \;, \tag{2.157}$$

ili tzv. tahionske čestice s $P^2 < 0$, nisu opažene u prirodi!

□ LOKALNA TENZORSKA POLJA

Nakon što smo naučili pridjeliti masivnoj čestici spina s valnu funkciju s $2s + 1$ komponenti, otići ćemo korak dalje. Uvest ćemo *lokalno polje*, funkciju $f(x^\mu)$ kojom ćemo opisati česticu lociranu u točki x^μ u jednom inercijalnom sustavu, odnosno $f'(x'^\mu)$ koja opisuje istu česticu u nekom drugom inercijalnom sustavu. Općenito funkcijski opis će ovisiti o sustavu, no mi ćemo taj opis pojednostaviti zahtjevom da čestice opisujemo *lokalnim poljem* koje se ne mijenja pri translacijama u prostoru i vremenu. Time će preostati kao relevantne samo one Lorentzove transformacije koje nas vode od jednog inercijalnog sustava na drugi.

Općenito, infinitezimalna promjena $x \to x + \delta x$, bit će praćena promjenom funkcije

$$f(x) \to f'(x') = f(x) + \delta f(x) \;, \tag{2.158}$$

pri čemu je infinitezimalna promjena funkcije

$$\delta f(x) = f'(x + \delta x) - f(x) = f'(x) - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f' + \mathcal{O}(\delta x^2) \tag{2.159}$$

dana zbrojem funkcijske promjene za isti x

$$\delta_0 f = f'(x) - f(x) \;, \tag{2.160}$$

i transportnog člana $\delta x^\mu \partial_\mu f$. Translacije $\delta x^\mu = \epsilon^\mu$ su već konzumirane u definiciji lokalnog polja

$$\delta_0 f + \epsilon^\mu \partial_\mu f = 0 \Rightarrow \delta_0 f = -i\epsilon^\mu P_\mu f \;. \tag{2.161}$$

U odnosu na preostale transformacije homogene Lorentzove grupe koje daju $\delta x^\mu = \frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}\, M_{\rho\sigma} x^\mu$, lokalna polja će se ponašati na jedan od slijedećih načina:

- ◇ Skalarna polja su invarijantna, $\phi'(x') = \phi(x)$. Iz činjenice da je za njih $\delta\phi \equiv 0$ pokazuje se da se u tom slučaju (2.135) svodi na $M_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$, tj. takva polja opisuju čestice bez spina ;

◇ Slobodna spinorna polja $\psi(x)$ bilježit će netrivijalnu promjenu pri prijelazu u drugi Lorentzov sustav

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}\psi(x) , \tag{2.162}$$

gdje se $M_{\mu\nu}$ svodi na unutrašnji član $S_{\mu\nu}$. Konvencionalno, za spin $1/2$ ta će se veličina izražavati na način $S_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}/2$, gdje je $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ komutator Diracovih matrica, koje ćemo uvesti u odjeljku 2.3.2 ;

◇ Vektorska polja $A^\mu(x)$ transformirat će se poput samih četverovektora

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) ; \tag{2.163}$$

◇ Tenzorska polja $U_{\mu\nu}$, transformirat će se kao umnožak vektorskih,

$$U'_{\mu\nu}(x') = T_{\mu\nu,\rho\sigma}U^{\rho\sigma}(x) , \tag{2.164}$$

gdje $T_{\mu\nu,\rho\sigma} = \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\sigma}$.

Uočimo da je tenzorska reprezentacija $T_{\mu\nu,\rho\sigma}$ reducibilna. Naime, u rastavu polja na simetrični i antismetrični dio, $U_{\mu\nu} = U^S_{\mu\nu} + U^A_{\mu\nu}$ (10 komponentni i 6 komponentni dio), ti dijelovi će se transformirati pri rotacijama četverodimenzionalnog prostora neovisno, bez ikakvog miješanja. Za sve navedene tipove polja treba još uvesti diferencijalne jednadžbe, koje će povezivati polja u bliskim prostorno-vremenskim točkama. Osnovni će zahtjev na takve jednadžbe biti relativistička invarijantnost, koja se očituje kroz tzv. *kovarijantnost* — svi Lorentzovi indeksi su prosumirani (ponovljeni).

2.3 Jednadžbe gibanja i simetrije lokalnih polja

Putem kratkog izučavanja simetrija na Lorentzove i Poincaréove transformacije došli smo do koncepta lokalnih polja kojima želimo prikazati točkaste čestice. Pri tome, ovisno o spinu, čestice će biti reprezentirane različitim "tenzorskim poljima", klasificiranim pomoću Poincaréove grupe. Princip relativističke invarijantosti diktirat će i oblik *jednadžbi gibanja*, diferencijalnih jednadžbi koje povezuju polja u bliskim prostorno-vremenskim točkama. Temeljne jednadžbe moraju biti *kovarijantne* to jest moraju imati isti oblik u svim Lorentzovim (inercijalnim) sustavima.

Najprije ćemo dati izvod Klein-Gordonove i Diracove jednadžbe, oponašajući postupak kojim smo uveli i Schrödingerovu jednadžbu. Diracova jednadžba koja objedinjuje kvantnu teoriju i specijalnu relativnost, začetak je kvantne teorije polja. Ta je teorija prve uspjehe požnjela pri predviđanju međudjelovanja nabijenih čestica i zračenja. Zaokupljen spinom, koga je Diracova jadnadžba zahtijevala, Dirac je vjerovao da je spin temeljna posljedica relativističke kvantne mehanike. Interpretacija negativnih energija koja je proslavila Diracovu jednadžbu, popraćena je Feynmanovim opažanjem da je ključ za spoj kvantne mehanike i relativnosti, postojanje protučestica (antičestica).

2.3.1 Klein-Gordonova i Maxwellove jednadžbe

Schrödingerovu jednadžbu nerelativističke kvantne mehanike dobili smo zamjenama

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{2.165}$$

u klasičnoj relaciji za energiju, $E = \vec{p}^{\,2}/(2m) + V$. Dobivenu jednadžbu shvatimo kao operator koji djeluje na valnu funkciju $\psi(\vec{x}, t)$. Za slobodnu česticu ($V = 0$) mase m (u jedinicama $\hbar = 1$) slijedi

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi = 0 \ , \tag{2.166}$$

pri čemu $\rho = |\psi|^2$ interpretiramo kao gustoću vjerojatnosti: $|\psi|^2 d^3x$ daje vjerojatnost nalaženja čestice u elementu volumena d^3x. Očuvanje vjerojatnosti (jednadžba kontinuiteta)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0 \tag{2.167}$$

određuje gustoću struje (tok čestica iz nekog volumena). Uz identifikaciju $\rho = |\psi|^2$, kombiniranjem Schrödingerove jednadžbe i njoj kompleksno konjugirane, dobivamo

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \qquad (= \rho\vec{v} \text{ za slobodnu česticu}) \ . \tag{2.168}$$

□ KLEIN-GORDONOVA JEDNADŽBA

"Kvantna preskripcija" (2.165) ima oblik supstitucije četverovektora

$$p_\mu \to i\partial_\mu \equiv i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \ , \tag{2.169}$$

koji objedinjuje :

$$(E, -\vec{p}) \to \left(i\frac{\partial}{\partial t}, i\nabla\right) \ . \tag{2.170}$$

Uz relativistički izraz za energiju, $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$, ta nas supstitucija vodi na *Klein-Gordonovu* jednadžbu za *polje* ϕ,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0 \ . \tag{2.171}$$

Uz D'Alambertov operator $\Box \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$, Klein-Gordonova jednadžba poprima eksplicitno kovarijantni oblik

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \ . \tag{2.172}$$

Očekujemo da ta jednadžba vrijedi za jednokomponentne valne funkcije $\phi(\vec{x}, t)$ koje opisuju bozone spina nula, odnosno da vrijedi za svaku pojedinu komponentu tenzorskih polja.

Identificirajmo gustoće vjerojatnosti i struje, koje zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta. Pomnožimo Klein-Gordonovu jednadžbu (2.171) s lijeva s $(-i\phi^*)$ i oduzmimo od toga kompleksno konjugiranu Klein-Gordonovu jednadžbu pomnoženu s desna s $(-i\phi)$, da bi dobili:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[i\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)\right] + \nabla\left[-i(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*)\right] = 0 \ . \tag{2.173}$$

Usporedba s (2.167) daje:

$$\rho = i\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) \tag{2.174}$$

$$\vec{j} = -i\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right) \ . \tag{2.175}$$

Vjerojatnost i gustoća struje sačinjavaju četverovektor

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \ , \tag{2.176}$$

koji zadovoljava kovarijantnu jednadžbu kontinuiteta

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ . \tag{2.177}$$

Uočimo ovdje razliku od gustoće vjerojatnosti Schrödingerove jednadžbe – pojavljivanje vremenske derivacije drugog reda. Za ravni val, rješenje Klein-Gordonove jednadžbe za slobodnu česticu energije E i impulsa $\vec{p}$,

$$\phi = N e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - iEt} \ , \tag{2.178}$$

nalazimo:

$$\rho = 2E|N|^2 \qquad \vec{j} = 2\vec{p}|N|^2 \ . \tag{2.179}$$

Budući da Klein-Gordonova jednadžba vodi na vlastite energije

$$E = \pm(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \ , \tag{2.180}$$

susrećemo dva problema:

◇ problem prijelaza na sve negativnije energije;

◇ problem negativnih gustoća vjerojatnosti, pridruženih negativnim energijama.

Posljednji problem,

$$\rho < 0 \quad \text{za rješenja} \quad E < 0,$$

u povijesti je vodio na odbacivanje Klein-Gordonove jednadžbe kao relativističkog poopćenja Schrödingerove jednadžbe. Na kraju, sva će polja zadovoljavati Klein-Gordonovu jednadžbu. Pokažimo to najprije na slučaju Maxwellovih jednadžbi.

□ MAXWELLOVE JEDNADŽBE

Maxwellove jednadžbe su uzor pojednostavljenja neke teorije. Osam jednadžbi za komponente električnog i magnetskog polja $(\vec{E}, \vec{B})$ u vektorskom zapisu svodi se na četiri jednadžbe. U Heaviside-Lorentzovim racionaliziranim jedinicama (CGS jedinicama gdje je $\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$) Maxwellove su jednadžbe zapisane bez faktora 4π i c:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \tag{2.181}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.182}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.183}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \; . \tag{2.184}$$

Te će jednadžbe imati još kompaktniji relativistički zapis. U tu svrhu identificiraju se dva četverovektora, četverovektor potencijala

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \tag{2.185}$$

i četverovektor izvora

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}\,) \; . \tag{2.186}$$

Uočimo da se “skalarni potencijal” $A^0 \equiv \phi$ ponaša kao skalar na rotacije, no ne i na potiske pa uistinu nije skalar. Šest komponenata polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ koje se transformiraju jedne u druge odgovaraju broju komponenata antisimetričnog četverodimenzionalnog tenzora $F^{\mu\nu} = \{\vec{E}, \vec{B}\}$, $(F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu})$ identificiranih na način:

$$F^{i0} = E^i \qquad , \qquad F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k \; . \tag{2.187}$$

Na taj način

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.188}$$

omogućuje kompaktni zapis nehomogenih jednadžbi (2.181) i (2.182) u obliku:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \; . \tag{2.189}$$

Zapis antisimetričnog tenzora polja pomoću potencijala

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.190}$$

daje izraze

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \; , \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{2.191}$$

koji identično rješavaju homogene Maxwellove jednadžbe (2.183) i (2.184). Napomenimo da relacije (2.191) ne specificiraju jednoznačno polja $(\vec{E}, \vec{B})$ preko potencijala $(\phi, \vec{A})$. Naime, postoji sloboda baždarne transformacije (izražene skalarnom funkcijom χ):

$$\vec{A} \to \vec{A} - \nabla\chi, \qquad \phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \; , \tag{2.192}$$

ili u kovarijantnom zapisu

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi \; . \tag{2.193}$$

Ta transformacija ne mijenja polja $(\vec{E}, \vec{B})$, pa tako niti tenzor

$$F^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu} + (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu)\chi = F^{\mu\nu} \; . \tag{2.194}$$

Uvrštavanje izraza (2.190) za $F^{\mu\nu}$ u (2.189) daje nehomogene Maxwellove jednadžbe u obliku

$$\Box A^\nu - \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu\right) = j^\nu \; . \tag{2.195}$$

Upotrijebimo li slobodu odabira baždarne skalarne funkcije χ da bude zadovoljeno

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \; , \tag{2.196}$$

u takvom *Lorentzovom baždarenju* vrijedit će

$$\Box A^\mu = j^\mu \; . \tag{2.197}$$

Za polje u vakuumu riječ je o polju koje zadovoljava Klein-Gordonovu jednadžbu bezmasenog slučaja.

Uočimo da uvođenjem dualnog tenzora $\tilde{F}^{\mu\nu}$ uz pomoć antisimetričnog tenzora $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \ , \tag{2.198}$$

zbog antisimetričnosti ϵ-tenzora par homogenih jednadžbi možemo izraziti na kompaktni način

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.199}$$

U vakuumu Maxwellove jednadžbe poprimaju izrazito simetrični zapis:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{2.200}$$
$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.201}$$

2.3.2 Diracova jednadžba i negativne energije

Dirac je uočio da pozitivno-definitna gustoća vjerojatnosti $\rho \geq 0$ zahtijeva jednadžbu linearnu u $\partial/\partial t$. Relativistička kovarijantnost tada traži i linearnost u prostornoj derivaciji ∇. To onda vodi na Diracom postulirnu lineariziranu Klein-Gordonovu jednadžbu

$$i\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = (-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi \equiv H\psi \ , \tag{2.202}$$

gdje $\vec{\alpha}, \beta$ postaju hermitske matrice ($\vec{\alpha}^\dagger = \vec{\alpha}, \beta^\dagger = \beta$). Uz taj uvjet H je hermitski operator te vodi na pozitivno definiranu gustoću vjerojatnosti .

Nađimo još neka svojstva Diracom uvedenih matrica. Kvadrirajmo operator na obje strane u jednadžbi (2.202):

$$\begin{aligned}\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi &= (-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)(-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi \\ &= \left[-\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \sum_{i>j=1}^{3}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\right. \\ &\quad \left. -im\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta^2 m^2\right]\psi \ .\end{aligned} \tag{2.203}$$

Iz zahtjeva da svaka komponenta ψ zadovoljava i Klein-Gordonovu jednadžbu (tj. da bude na masenoj ljusci) slijedi da mogu preostati samo prvi i posljednji član u uglatoj zagradi. Eliminacija neželjenih članova daje uvjete koje moraju zadovoljavati $\vec{\alpha}$ i β,

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \quad \text{ili} \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \ ; \tag{2.204}$$
$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad \text{ili} \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \quad \text{za } i \neq j \ . \tag{2.205}$$

Nadalje zahtijevamo normalizaciju

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \ . \tag{2.206}$$

Pomoću matrica α_i i β uvodimo četiri Diracove γ matrice

$$\gamma^0 = \beta \tag{2.207}$$
$$\gamma^i = \beta\alpha^i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.208}$$

kako je to ekslplicitno prikazano u dodatku B. Pomoću γ matrica koje čine četverovektor

$$\gamma^\mu \equiv \left(\gamma^0, \gamma^i\right) \tag{2.209}$$

Diracovu jednadžbu možemo napisati kao

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \ . \tag{2.210}$$

Uz oznaku

$$\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu \tag{2.211}$$

postiže se elegantni zapis

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \ . \tag{2.212}$$

Množenje posljednje relacije s $(i\not{\partial} + m)$ vodi nas natrag na "kvadratičnu" Klein-Gordonovu jednadžbu.

□ EKSPLICITNE REPREZENTACIJE DIRACOVIH MATRICA

Pokažimo da su Diracove matrice dimenzije ≥ 4, odnosno da je najniža reprezentacija četverodimenzionalna. Pogledajmo najprije vrijednosti determinanti $\det \alpha_i$:

$$\alpha_i^2 = 1 \Rightarrow \det \alpha_i^2 = (\det \alpha_i)^2 = 1 \Rightarrow \det \alpha_i = \pm 1 \ . \tag{2.213}$$

Za $i \neq j$, $\det(\alpha_i \alpha_j) = \det(-\alpha_j \alpha_i) = (-)^d \det \alpha_i \det \alpha_j$. Odatle slijedi da d mora biti parno! No za $d = 2$ možemo konstruirati najviše tri antikomutirajuće hermitske matrice, Paulijeve matrice

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{2.214}$$

Pomoću njih konstruiraju se 4×4 matrice Diracove reprezentacije, koju ćemo rabiti u ovoj knjizi. Ekvivalentne reprezentacije dobiju se nesingularnom transformacijom :

$$\gamma \to U\gamma U^{-1} \ . \tag{2.215}$$

Navest ćemo eksplicitno tri najkorištenije reprezentacije — Diracovu, kiralnu (Weylovu) i Majoraninu reprezentaciju:

◇ **Diracova reprezentacija**
Ovu je reprezentaciju originalno koristio Dirac. U njoj su γ matrice definirane eksplicitno preko komponenata u (**??**) – (**??**)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.216}$$

Zbog potpunosti, dodali smo listi četiriju γ matrica i γ^5 matricu, koja je dana njihovim umnoškom. Budući da je matrica γ_0 koja dolazi uz derivaciju po vremenu dijagonalna, ova reprezentacija bit će pogodna za diskutiranje nerelativističke granice Diracove jednadžbe.

◇ **Kiralna reprezentacija**
Ova je reprezentacija odabrana tako da je u njoj *operator kiralnosti* γ^5 prikazan matricom koja je dijagonalna:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} . \tag{2.217}$$

Vidjet ćemo da je zbog toga ova reprezentacija pogodna za razmatranje kiralnih čestica (tj. bezmasenih čestica, poput neutrina), kod kojih se svojstveno stanje operatora γ^5 podudara sa svojstvenim stanjem operatora heliciteta (2.155).

◇ **Majoranina reprezentacija**
Ova je reprezentacija odabrana tako (zamjenom α_2 i β) da Diracovu jednadžbu učini realnom:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \qquad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} .$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{2.218}$$

Majorana je proučavao neka specifična svojstva fermiona koja su u ovoj reprezentaciji najlakše uočljiva (primjerice Majorana maseni članovi koje ćemo razmatrati u odjeljku **??**)[3].

[3]U Diracovoj jednadžbi maseni članovi miješaju kiralne komponente polja $\mathcal{L}_m^{Dirac} = m\bar{\psi}\psi = m\left(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L\right)$ pa su vlastita stanja mase Diracova polja $\psi_D = \psi_L + \psi_R$. Majoranini maseni članovi povezuju kiralne komponente polja i konjugiranih polja $\mathcal{L}_m^{Majorana} = m_L\left(\bar{\psi}_L^c\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_L^c\right) + m_R\left(\bar{\psi}_R^c\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_R^c\right)$ gdje su vlastita stanja mase kiralna polja koja su sama sebi konjugirana $\chi = \psi_L + \psi_L^c$, $\omega = \psi_R + \psi_R^c$.

Pogledajmo sada Diracovu jednadžbu u Diracovoj reprezentaciji γ matrica. Uočavajući 2×2 blokove, Diracov četverospinor ψ može se prikazati bispinorom

$$\psi \sim \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} , \tag{2.219}$$

gdje φ i χ prikazuju par dvokomponentnih spinora. Za slobodnu česticu pretpostavimo rješenje u obliku ravnog vala

$$\psi = w e^{-ip\cdot x} ; \qquad w = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} , \tag{2.220}$$

gdje je w rješenje iz kojeg je izdvojeno prostorno-vremensko ponašanje. Naime, ograničit ćemo se na promatranje slobodnih Diracovih čestica s četverovektorom impulsa

$$p^\mu = (E, \vec{p}) , \tag{2.221}$$

koje međudjeluju u jednoj točki, tako da prostorno-vremensko ponašanje ima oblik ravnog vala i ne ulazi u diskusiju. Uvrštavanje u Diracovu jednadžbu

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi \tag{2.222}$$

daje

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} , \tag{2.223}$$

odakle uočavamo dvije vezane jednadžbe za φ i χ

$$(E-m)\varphi = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi \tag{2.224}$$

$$(E+m)\chi = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\varphi . \tag{2.225}$$

Nalaženjem $\chi = (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})/(E+m)\varphi$ iz posljednje jednadžbe i njenim uvrštavanjem u pretposljednju dobijemo (uz $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2} I$):

$$(E-m)(E+m)\varphi = \vec{p}^{\,2}\varphi . \tag{2.226}$$

Odatle uočavamo relaciju između energije i impulsa, *disperzionu relaciju*:

$$E^2 - m^2 = \vec{p}^{\,2} . \tag{2.227}$$

Time su još uvijek dopuštena stanja i pozitivne i negativne energije:

$$E = \pm(\vec{p}^{\,2} + m^2)^{1/2} . \tag{2.228}$$

Usprkos tome gustoća struje vjerojatnosti

$$\rho = \psi^\dagger(x)\psi(x) \ , \tag{2.229}$$

je očigledno pozitivno definitna:

$$\rho = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \sum_{a=1}^{4} |\psi_a|^2 > 0 \ . \tag{2.230}$$

K tome zahtijevamo očuvanje vjerojatnosti, kako to daje jednadžba kontinuiteta – koju sada mora dati Diracova jednadžba!

Na način kako smo to izveli za Klein-Gordonovu jednadžbu u odjeljku 2.3.1, kombiniramo sada Diracovu jednadžbu

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi \tag{2.231}$$

i njoj hermitski konjugiranu

$$-i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger(+i\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m) \ . \tag{2.232}$$

Dobivena relacija

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^\dagger\psi\right] + \nabla\left[\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi\right] = 0 \tag{2.233}$$

sugerira struju

$$\vec{j} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi \tag{2.234}$$

kao struju s ispravnom interpretacijom vjerojatnosti. Prikažimo to za slučaj slobodne čestice.

Za slobodnu česticu, derivacija ∂_μ spušta iz ravnog vala faktor $-ip_\mu$ i vodi na jednadžbu

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \tag{2.235}$$

i njoj hermitski konjugiranu za *adjungirani* spinor $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$

$$\bar{\psi}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0 \ . \tag{2.236}$$

Množenjem (2.235) s $\bar{\psi}\gamma^\mu$, a (2.236) s $\gamma^\mu\psi$, daje u zbroju

$$\bar{\psi}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi p_\nu = 2m\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \ . \tag{2.237}$$

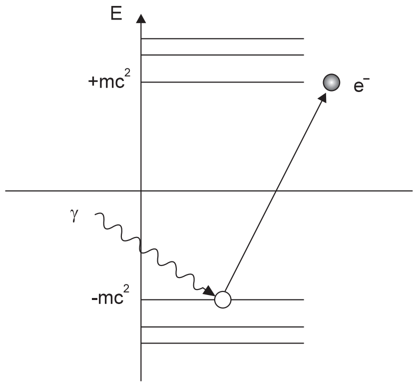
Uz antikomutator γ matrica (**??**) dan s $2g^{\mu\nu}$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \frac{p^\mu}{m}\bar{\psi}\psi \ , \tag{2.238}$$

reproducira struju slobodne čestice.

□ DIRACOVA I FEYNMAN-STÜCKELBERGOVA INTERPRETACIJA RJEŠENJA NEGATIVNE ENERGIJE

Dosadašnje rezultate možemo objediniti na način : problem negativnih vjerojatnosti za Klein-Gordonovu jednadžbu ($\rho < 0, E < 0$) izbjegnut je linearizacijom za Diracovu jednadžbu ($\rho > 0, E < 0$). Pritom je spektar simetričan oko $E = 0$ (sl. 2.6). Da bi spriječio pad elektrona pozitivne energije na niža, negativno-



Slika 2.6: *Produkcija para u Diracovoj slici negativno-energijskog mora: elektron izbačen fotonom iz "mora", ostavlja "rupu" koja se ponaša kao antielektron*

energijska stanja, Dirac pretpostavlja da su sva stanja negativne energije popunjena. Tada Paulijev princip ne dozvoljava pad elektrona s $E > 0$ na niže razine, na popunjeno "more" negativno energijskih stanja.

Naravno da takav vakuum ima beskonačni naboj i energiju, no opažanja su vezana uz konačne *fluktuacije* u energiji i naboju u odnosu na taj vakuum. Dakle, Diracov vakuum nije "ništa", nego je prikazan beskonačnim morem negativno-energijskih elektrona, protona, neutrina . . . — svih čestica spina 1/2!

Odustnost negativno energijskih elektrona iz mora ("rupa" u odnosu na Diracov vakuum), ekvivalentno je prisutnosti pozitivno-energijskih pozitrona[4]. Iako Pauli 1933. godine misli da identifikaciju rupa s antielektronima ne treba uzimati ozbiljno[5], pokazala se smislenost rezultata koji se dobivaju iz Diracove jednadžbe i njenih negativno-energijskih rješenja. Ipak, teorija prestaje biti čisto "1-čestična", jer možemo pobuđivati elektrone negativne energije. Primjerice, pobuđivanje na pozitivno energijsko stanje prikazuje proces produkcije para e^+e^-! Riječ je o teoriji mnoštva čestica koja će biti ekvivalentna kvantnoj elektrodinamici!

[4]Ta predikcija potvrđena je Andersonovim otkrićem pozitrona (Nobelova nagrada za 1932).

[5]Drugi kritičar "mora" bio je Landau. Ipak, uočivši da su samo razlike bitne, on sam konstruirao je na konceptu Diracovog mora proslavljenu teoriju Fermijevih tekućina.

Uočimo da argument Paulijevog isključenja ne vrijedi za Klein-Gordonove čestice (bozone), pa prelazimo na Feymanov tretman negativno-energijskih rješenja (koji vrijedi i za Diracovu i za Klein-Gordonovu jednadžbu). *Feynmanova preskripcija* uspostavlja ekvivalenciju čestica negativne energije koja putuje u prošlost s pozitivno energijskom antičesticom koja putuje u budućnost. U mogućnosti te identifikacije Feynman vidi najviši doseg Diracove jednadžbe!

Feynmanova preskripcija je ideja na kojoj će se temeljiti tzv. Feynmanovi dijagrami. Primjerice, elektron definiranog četveroimpulsa i naboja

$$\left\{ \begin{array}{ccc} p^\mu & = & (E,\vec{p}) \\ Q & = & -e \end{array} \right\} \tag{2.239}$$

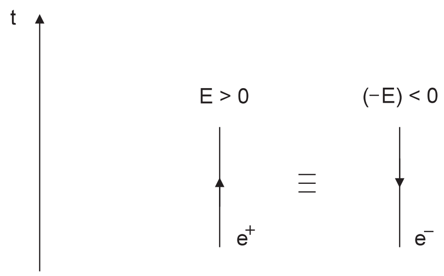
opisan je četverovektorom elektromagnetske struje

$$j^\mu(e^-) = (-e)2|N|^2(E,\vec{p}) \ . \tag{2.240}$$

Za njegovu antičesticu istog četverovektora $(E, \vec{p})$, ali suprotnog naboja $Q = +e$, elektromagnetska struja

$$j^\mu(e^+) = (+e)2 \ |N|^2 \ (E,\vec{p}) \tag{2.241}$$

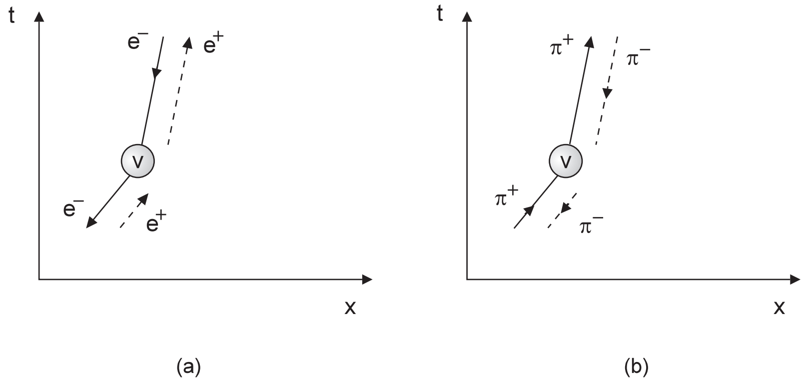
podudarat će se sa strujom elektrona ako elektronu pridjelimo četverovektor $(-E, -\vec{p})$. Emisija pozitrona energije E ekvivalentna je apsorpciji elektrona energije $-E$ (vidjeti sliku 2.7). Ova identifikacija je moguća, jer vrijedi



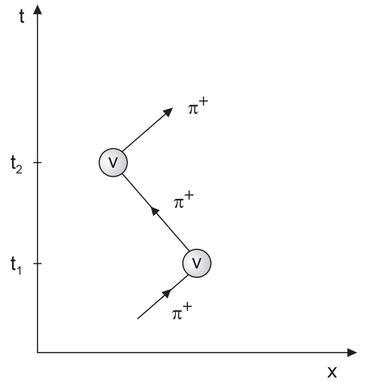
Slika 2.7: *Rješenja koja opisuju negativno energijske čestice koje putuju u prošlost odgovaraju rješenjima pozitivno energijskih antičestica koje putuju u budućnost*

$$e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt} \ . \tag{2.242}$$

Promotrimo u Feynmanovoj slici procese raspršenja opisane teorijom smetnje nerelativističke kvantne mehanike (NRQM). U toj slici jednostruko raspršenje pozitrona (sl. 2.8(a)) ili π mezona (sl. 2.8(b)) na potencijalu možemo opisati



Slika 2.8: *Sva jednostruka raspršenja elektrona (a) ili piona (b) mogu se opisati čisto čestičnim rješenjima, bez uvođenja antičestičnih stanja (pomoću interpretacije sa slike 2.7)*

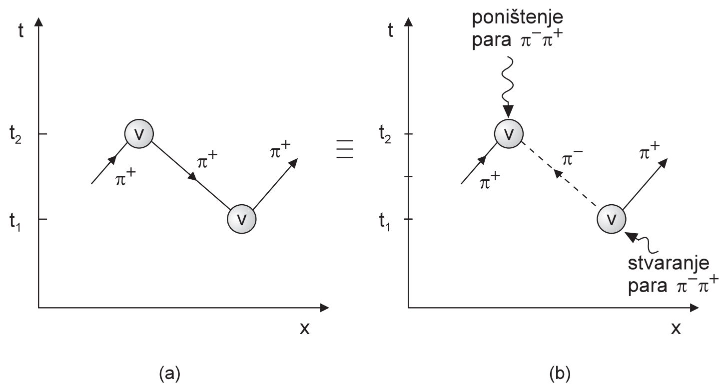


Slika 2.9: *Prostorno-vremenski prikaz staze čestice u NRQM*

njihovim antičesticama koje putuju u suprotnom vremenskom smjeru. Dvostruko raspršenje u drugom redu NR teorije smetnje ima prostorno-vremenski (Feynmanov) dijagram prikazan na slici 2.9. Po Feynmanu, to treba biti dopunjeno mogućnošću raspršenja čestica "unatrag u vremenu" (sl. 2.10) Bez te dodatne amplitude, opis procesa nije potpun!

2.3.3 Jednadžbe gibanja i Noetheričin teorem

U ovom odjeljku pokazat ćemo da se sve jednadžbe gibanja mogu izvesti i na drugi način, preko varijacijskog načela. Ono će voditi i na očuvane veličine putem Noetheričinog teorema.



Slika 2.10: *Dodatna staza čestice u relativističkoj kvantnoj mehanici (a) ima fizikalnu interpretaciju (b)*

□ FUNKCIJA DJELOVANJA

Lagrangeova formulacija klasične mehanike sinonim je za *princip najmanjeg djelovanja*. Riječ je o varijacijskom principu koji iz zahtjeva ekstremalnosti funkcije djelovanja S

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \; , \tag{2.243}$$

daje Lagrangeove jednadžbe gibanja

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \; . \tag{2.244}$$

Elementarne čestice opisivat ćemo lokalnim poljima. Umjesto diskretnog sustava točkastih čestica (s koordinatama $q_i(t)$) opisanih lagrangianom $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ promatramo kontinuirani sustav polja (funkcija $\phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x^\mu)$) opisan gustoćom lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) \; . \tag{2.245}$$

Eksplicitna ovisnost o koordinatama x^μ pojavljivat će se samo ako je polje ϕ u međudjelovanju s vanjskim izvorom, tj. kad $\mathcal{L}$ opisuje sustav koji nije zatvoren. Opća svojstva koja zahtijevamo od gustoće lagrangiana su:

◇ translaciona invarijantnost, koja zahtijeva da se radi o funkciji polja i njihovih derivacija;

◇ lokalnost, zahtjev da su polja uzeta u jednoj prostorno vremenskoj točki x^μ, vodi na lokalnu teoriju polja. Vjeruje se da su takve teorije dovoljne i za opis nelokalnih pojava.

Na kraju uvodimo i *djelovanje*, funkcional građen od Poincaréovih invarijanti

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x\mathcal{L}, \tag{2.246}$$

gdje je d^4x "integracijska mjera" (element volumena $dt\,dx\,dy\,dz \equiv dx^0\ dx^1\ dx^2\ dx^3$) u četverodimenzionalnom prostoru Minkowskog. Svojstva koja zahtijevamo od djelovanja su:

- ◇ realnost ($S \in \mathcal{R}$), nužna da bi u pridruženoj teoriji polja vjerojatnost bila očuvana (prisjetimo se da kompleksni potencijali daju apsorpciju);
- ◇ želimo da S vodi na klasične jednadžbe gibanja koje ne uključuju više od derivacija drugog reda (za više derivacije pojavljuju se nekauzalna rješenja);
- ◇ osim na Poincaréovu grupu S može imati i dodatne simetrije;
- ◇ Po konstrukciji S ima dimenziju impulsa vrtnje [energija $\times$ vrijeme], tj. dimenziju ML^2T^{-1} kakvu ima i $\hbar$. U prirodnom sustavu jedinica dimenzija $\mathcal{L}$ bit će M^4.

Zahtjev ekstremalnosti za funkciju djelovanja S (varijacijski princip) imat će dvije posljedice: Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja i Noetheričin teorem.

□ EULER-LAGRANGEOVE JEDNADŽBE GIBANJA

Za čestice koje mogu postojati samo u nekom konačnom području R četveroprostor-vremena, promatrat ćemo promjenu djelovanja $\int_R d^4x\mathcal{L}$, kad koordinate podvrgnemo varijaciji

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{2.247}$$

praćenoj promjenom polja

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta_0\phi(x). \tag{2.248}$$

Dakle, ograničujemo se na čisto funkcijsku varijaciju polja (usporedbu ϕ' i ϕ u istoj prostorno-vremenskoj točki x^μ), pri čemu na rubu područja (∂R) zahtijevamo:

$$\delta x^\mu = 0, \qquad \delta_0\phi = 0 \qquad \text{na } \partial R. \tag{2.249}$$

Tada zahtjev stacionarnosti djelovanja

$$\delta S = \int_R d^4x'\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi') - \int_R d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = 0 \tag{2.250}$$

daje Euler-Lagrangeovu jednadžbu gibanja

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0. \tag{2.251}$$

Efektivno, naš problem će se svesti na traženje onih Lagrangeovih gustoća, koje će reproducirati prije uvedene jednadžbe: Klein-Gordonovu, Diracovu ili Maxwellovu.

a) Klein-Gordonov lagrangian

Za skalarno polje kanonske dimenzije[6] $d(\phi) = 1$ lagrangijan je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \ . \tag{2.254}$$

Ako izračunamo funkcionalne derivacije

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \ , \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = g^{\mu\nu}(\partial_\nu \phi) = \partial^\mu \phi \tag{2.255}$$

i uvrstimo ih u jednadžbu (2.251) dobijemo

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = 0 \ , \tag{2.256}$$

što je upravo Klein-Gordonova jednadžba.

b) Diracov lagrangian

Za fermionsko polje ψ kanonske dimenzije $d(\psi) = 3/2$ lagrangijan je dan izrazom

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi \ . \tag{2.257}$$

Polja $\bar{\psi}$ i ψ tretiramo kao neovisne varijable te računamo funkcionalne derivacije, primjerice

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} = -m\psi_A \ , \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_A)} = i\bar{\psi}_B \gamma^\mu_{BA} \ , \tag{2.258}$$

---

[6] Kanonska dimenzija definirana je kao

$$d(A) = (4 - \omega_A)/2 \tag{2.252}$$

gdje je A općenito kvantno polje i ω_A potencija impulsa asimptotskog propagatora $D_A(p^2)$:

$$D_A(p^2) \overset{p^2 \to \infty}{\longrightarrow} \left(p^2\right)^{-\omega_A/2} \ . \tag{2.253}$$

Za skalarna i fermionska polja kanonska dimenzija operatora jednaka je naivnoj dimenziji operatora u jedinicama mase, što ne vrijedi za masivna vektorska polja.

gdje su A i B Diracovi indeksi. Ako to uvrstimo u jednadžbu (2.251) dobijemo

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = \bar{\psi}\left(i\overleftarrow{\not\partial} + m\right) = 0 \; . \tag{2.259}$$

Analogno dobijemo

$$(i\not\partial - m)\,\psi = 0 \tag{2.260}$$

što su upravo Diracove jednadžbe za slobodni elektron.

c) Maxwellov lagrangian

Provjerimo da gustoća lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{2.261}$$

daje Maxwellove jadnadžbe kao Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja. Funkcionalne derivacije lagrangijana su

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu \; , \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \; , \tag{2.262}$$

koje uvrštavanjem u (2.251) daju

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \; , \tag{2.263}$$

što odgovara paru nehomogenih Maxwellovih jednadžbi.

□ NOETHERIČIN TEOREM ZA PROSTORNE I INTERNE SIMETRIJE

Proučavat ćemo odziv funkcionala djelovanja S na neku (za sada nespecificiranu) promjenu koordinata i polja. Pritom će nas zanimati posljedice zahtjeva invarijantnosti djelovanja (δS=0) na varijacije koordinata i polja, pri čemu ćemo te varijacije izraziti pomoću globalnih (x-neovisnih) parametara ω^a

$$\delta x^\mu = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^a}\delta\omega^a \tag{2.264}$$

$$\delta\phi = \frac{\delta\phi}{\delta\omega^a}\delta\omega^a \; . \tag{2.265}$$

Napomenimo da ovdje varijacija polja općenito sadrži i transportni član, $\delta\phi(x) = (\delta_0 + \delta x^\nu \partial_\nu)\phi(x)$. Više se podrobnosti može naći u [**?**].

a) Prostorno-vremenske transformacije

Iz zahtjeva simetrije Diracove ili Maxwellove teorije na prostorno-vremenske transformacije doći ćemo na operatore energije, impulsa i impulsa vrtnje kao na očuvane "naboje" Noetheričinog teorema. Napišimo gornje varijacije, prvu u obliku

$$\delta x^\mu = X_a^\mu \delta\omega^a \ , \tag{2.266}$$

a drugu kao

$$\delta\phi = \Phi_a \delta\omega^a \ , \tag{2.267}$$

gdje je X_a^μ općenito matrica (a je jedan indeks za translacije, no za Lorentzove transformacije trebamo dva indeksa), dok je Φ_a skup brojeva, koji postaje matrica za multiplet skalarnih polja ϕ_i ($\delta\phi_i = \Phi_{ij}\delta\omega^j$).

◇ Translacije ishodišta prostor-vremena

Za infinitezimalne prostorno-vremenske translacije vrijede slijedeća pridruživanja

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu \qquad \Rightarrow \qquad X_a^\mu \to X_\nu^\mu = g_\nu^\mu \ . \tag{2.268}$$

Tada za skalarno polje, gdje po definiciji

$$\delta\phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_a = 0 \ , \tag{2.269}$$

zahtjev stacionarnosti djelovanja, $\delta S = 0$, poprima oblik

$$\int\limits_{\partial R} d\sigma_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Phi_\nu - \Theta_\kappa^\mu X_\nu^\kappa \right] d\omega^\nu = 0 \ . \tag{2.270}$$

Pri tom smo dio uz varijaciju polja eliminirali jednadžbama gibanja i k tome smo uveli veličinu

$$\Theta_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - g_\nu^\mu\mathcal{L} \ , \tag{2.271}$$

za koju ćemo opravdati naziv *tenzora energije-impulsa*. Čitav podintegralni izraz u (2.270) prikazuje Noetheričinu struju

$$j_\nu^\mu = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Phi_\nu - \Theta_\kappa^\mu X_\nu^\kappa \right] \ . \tag{2.272}$$

Ujedno, za prostornu hiperplohu (gdje je t = konstantno) integral (2.270) vodi na *očuvani naboj*

$$Q_\nu = \int\limits_V j_\nu^0 d^3x \ . \tag{2.273}$$

Naime, Gaussovim teoremom (2.270) postaje

$$\int_R \partial_\mu j^\mu_\nu d^4x = 0 \ . \tag{2.274}$$

Za spomenutu prostornu hiperplohu,

$$\int_V \partial_0 j^0_\nu d^3x + \int_V \partial_i j^i_\nu d^3x = 0 \ . \tag{2.275}$$

Budući da drugi član iščezava po Gaussovom teoremu (izborom dovoljno dalekog ruba volumena), u preostalom članu prepoznajemo

$$\frac{d}{dt}\int j^0_\nu d^3x \equiv \frac{d}{dt}Q_\nu = 0 \tag{2.276}$$

kao zakon očuvanja, gdje je očuvana struja translacije dana tenzorom energije-impulsa

$$j^\mu_\nu = -\Theta^\mu_\nu \ . \tag{2.277}$$

Pridruženi očuvani naboj dan je operatorom četveroimpulsa

$$P_\nu = \int \Theta^0_\nu \, d^3x \ . \tag{2.278}$$

Uočimo da tenzor energije-impulsa nije simetričan. Simetrični, *kanonski* tenzor energije impulsa dobije se dodavanjem totalne derivacije $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$ (gdje $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$),

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \tag{2.279}$$

i ponovno je očuvan ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$). Najilustrativniji je slučaj Maxwellovog polja (vidjeti zadatak 2.11 na kraju poglavlja).

◇ Prostorne rotacije

U potpunoj analogiji s prethodnim primjerom, infinitezimalne rotacije specijalni su slučaj Lorentzovih transformacija

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu_\nu x^\nu \qquad (\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}) \ , \tag{2.280}$$

specificiranih na način

$$\delta x^i = \varepsilon^{ij} x^j \qquad (\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji} \ ; \qquad i,j = 1,2,3) \ . \tag{2.281}$$

Općenita očuvana Noetheričina struja, izražena je simetričnim tenzorom energije-impulsa

$$\mathcal{M}^{\mu\rho\sigma} = T^{\mu\rho}x^{\sigma} - T^{\mu\sigma}x^{\rho} \ . \tag{2.282}$$

Naime, očuvanje tenzora $\mathcal{M}^{\rho\mu\nu}$

$$\partial_{\rho}\mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.283}$$

zbog očuvanog $T^{\rho\mu}$ $(\partial_{\rho}T^{\rho\mu} = 0)$, zahtijeva da je tenzor energije-impulsa simetričan

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \ . \tag{2.284}$$

Nulta komponenta u (2.282) vodi na gustoću tenzora impulsa vrtnje

$$M^{\mu\nu} = \int_V \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x \ , \tag{2.285}$$

koji je "očuvan naboj":

$$\frac{d}{dt}M^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.286}$$

Tri komponente operatora impulsa vrtnje dane su prostornim komponentama M^{ij}, kako samo već vidjeli u odjeljku 2.2.2:

$$J^k = \epsilon^{kij}M^{ij} \ . \tag{2.287}$$

b) Interne simetrije i Gell-Mann – Levyjeva metoda

Uvest ćemo alternativnu metodu Gell-Mann – Levyja [**?**] za nalaženje struja i njihovih divergencija, primjenljivu čak i za slučajeve kad transformacije nad poljima ne odgovaraju egzaktnim simetrijama. Neka je lagrangian danog (bozonskog ili fermionskog) polja $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_{\mu}\phi_r)$ podvrgnut transformaciji

$$\phi_r \to \phi'_r = \phi_r + \delta\phi_r \ . \tag{2.288}$$

Pretpostavimo da, iako nije riječ o prostorno-vremenskim transformacijama, infinitezimalni parametri ϵ imaju x-ovisnost, tako da se polje transformira na način

$$\phi_r(x) \to \phi'_r(x) = \phi_r(x) - i\epsilon_{\alpha}(x)F_r^{\alpha}(\phi) \ . \tag{2.289}$$

To vodi na promjenu lagrangiana za iznos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)}\delta(\partial_{\mu}\phi_r) \ , \tag{2.290}$$

što po uvrštavanju $\partial\mathcal{L}/\partial\phi_r$ iz Euler–Lagrangeove jednadžbe daje

$$\delta\mathcal{L} = -i\epsilon_\alpha(x)F_r^\alpha(\phi)\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) + \left(-iF_r^\alpha(\phi)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\right)\partial_\mu\epsilon_\alpha(x)\ . \quad (2.291)$$

Koeficijent uz $\partial_\mu\epsilon_\alpha(x)$ prepoznajemo kao Noetheričinu struju $j^{\alpha\mu}$ za $X = 0$ (internu simetriju) u (2.272). Taj isti koeficijent dobiva se iz (2.291) na način

$$j^{\alpha\mu}(x) = \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\epsilon_\alpha(x))}\ . \quad (2.292)$$

Potom izraz (2.291) možemo pisati u obliku

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon_\alpha(x)\partial_\mu j^{\alpha\mu}(x) + j^{\alpha\mu}(x)\partial_\mu\epsilon_\alpha(x)\ , \quad (2.293)$$

odakle slijedi izraz za divergenciju struje

$$\partial_\mu j^{\alpha\mu}_{(x)} = \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial\epsilon_\alpha(x)}\ . \quad (2.294)$$

Dakle, za danu internu transformaciju treba naći promjenu $\delta\mathcal{L}$ iz koje se pomoću relacija (2.292) i (2.294) nalazi struja i divergencija te struje. Ilustrirajmo to slijedećim primjerima:

◇ Abelova U(1) transformacija faze

Diracov lagrangian $\mathcal{L} = \bar\psi(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$ simetričan je na transformacije

$$\begin{aligned} \psi(x) \to \psi'(x) &= e^{-i\alpha}\psi(x) && (2.295)\\ \bar\psi(x) \to \bar\psi'(x) &= \bar\psi(x)e^{i\alpha}\ . && (2.296)\end{aligned}$$

Na početku poglavlja vidjeli smo da nas odabir

$$\alpha \to \begin{cases} \epsilon(Q) \\ \epsilon(B) \\ \epsilon(L) \end{cases} \quad (2.297)$$

vodi na očuvanje odgovarajućeg globalnog naboja. Ovdje, uz Gell-Mann–Levyjev trik $\epsilon \to \epsilon(x)$ ϵ postaje lokalni parametar. Sukladno tome

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + Q\bar\psi\gamma^\mu\psi\partial_\mu\epsilon(x) \quad (2.298)$$

daje $\delta\mathcal{L} = Q\bar\psi\gamma^\mu\psi\partial_\mu\epsilon(x)$, koji po (2.292) i (2.294) vodi na struju

$$j^\mu(x) = Q\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)\ , \quad (2.299)$$

koja je očuvana

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0\ . \quad (2.300)$$

$\diamond$ **Neabelova $SU(2)$ transformacija**

Ako je u Diracovom lagrangianu $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$ spinor prikazan fermionskim (nukleonskim ili kvarkovskim) izospinorom,

$$\psi \rightarrow \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \qquad \text{ili} \qquad \psi \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} , \tag{2.301}$$

uočit ćemo simetriju Diracovog lagrangiana pri rotacijama u prostoru izospina

$$\begin{aligned} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) &= e^{-i\epsilon_a \frac{\tau^a}{2}}\psi \qquad a = 1,2,3 &(2.302)\\ &\simeq (1 - i\epsilon_a \frac{\tau^a}{2})\psi , &(2.303) \end{aligned}$$

gdje su τ_a generatori $SU(2)$ grupe (primjerice, σ matrice iz jednadžbe (2.214)). Gell-Mann – Levyjev trik (zamjena $\epsilon_a \rightarrow \epsilon_a(x)$) daje

$$\delta\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}\frac{\tau^a}{2}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\epsilon_a(x) - i\bar{\psi}\frac{\tau^a}{2}m\psi\epsilon_a(x) + i\bar{\psi}m\frac{\tau^a}{2}\psi\epsilon_a(x) , \tag{2.304}$$

pa uz formule (2.292) i (2.294) dobivamo izraze za struju i njenu derivaciju

$$\begin{aligned} j^{a\mu}(x) &= \bar{\psi}\frac{\tau^a}{2}\gamma^\mu\psi , &(2.305)\\ \partial_\mu j^{a\mu}(x) &= i\bar{\psi}\left[m, \frac{\tau^a}{2}\right]\psi . &(2.306) \end{aligned}$$

Raspišemo li maseni član, primjerice kvarkovskih polja, na način

$$m = \frac{1}{2}(m_u + m_d)\mathbf{1} + \frac{1}{2}(m_u - m_d)\tau^3 , \tag{2.307}$$

vidimo da je treća komponenta (izovektorske) struje očuvana

$$\partial_\mu j^{3\mu} = 0 , \tag{2.308}$$

dok za preostale dvije vrijedi

$$\partial_\mu j^{(1,2)\mu} \approx \delta m = (m_u - m_d) . \tag{2.309}$$

Uočene očuvane vektorske struje (električnog naboja, barionskog broja i treće komponente izospina) vode na očuvane naboje

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &(2.310)\\ B &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &(2.311)\\ T_3 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , &(2.312) \end{aligned}$$

koji zadovoljavaju relaciju

$$Q = T_3 + \frac{B}{2} \,, \tag{2.313}$$

poznatu kao Gell-Mann–Nishijima relacija.

□ Seminarske teme :

Adair, R. K. , "A Flaw in a universal Mirror", Sceintific American, Veljača 1988, str. 50.

Byers, N. , "The Life and Times of Emmy Noether", esej s hep-distribucije, hep-th/9411110.

Cronin, J. W. , and M. S. Greenwood, "CP Symmetry Violation", Physics Today, Srpanj 1982, str. 38.

Deutch, D. & M. Lockwood, "The Quantum Physics of Time Travel", Scientific American, Ožujak 1994, str. 68.

Dyson, F. J. , "Feynman's proof of the Maxwell equations", Am. J,. Phys. 58 (3), Ožujak 1990, str. 209.

Freedman, D. Z. , and P. van Nieuwenhuizien, "The Hidden Dimension of Spacetime," Scientific American, Ožujak 1985, str. 74.

Fulcher, L. P. , J. Rafelski, and A. Klein, "The Decay of the Vacuum" Scientific American, Prosinac 1979, str. 150.

Goldman, T. , R. J. Hughes, and M. M. Nieto, "Gravity and Antimatter," Scientific American, Ožujak 1988, str. 48.

Hawking, S. W. & R. Penrose, "The Nature of Space and Time" Scientific American, Srpanj 1996, str. 60.

Hegstrom, R. A., and D. K. Kondepudi, "The Handedness of the Universe", Scientific American, Siječanj 1990, str. 98.

Okun, L. B. , "The Concept of Mass", Physics Today, Srpanj 1989, str. 31.

Okun, L. B. , "C, P, T are Broken. Why not CPT?", hep-ph/0210052

Witten, E. , "Reflections on the Fate of Spacetime", Physics Today, Travanj 1996, str. 24.

□ Zadaci :

Zadatak 2.1 *Koji od slijedećih procesa je moguć kao jaki proces, a koji je zabranjen (i iz kojega razloga, ako promatramo očuvanje barionskog broja, naboja i stranosti)*

$$\begin{aligned}\pi^- + p &\rightarrow \Xi^0 + \pi^0,\ \Xi^0 + K^0,\ \Xi^- + K^+ && (2.314)\\ K^- + p &\rightarrow \Lambda + \pi^0,\ \Xi^0 + K^0,\ \Xi^0 + \bar{K}^0 && (2.315)\\ \pi^- + n &\rightarrow \Xi^- + K^0 + K^0 && (2.316)\\ K^- + p &\rightarrow \Lambda + n && (2.317)\\ \Sigma^- + p &\rightarrow \Xi^- + K^+ && (2.318)\end{aligned}$$

Zadatak 2.2 *Za procese iz prethodnog zadatka nacrtati dijagrame kvarkovskog tijeka ili pokazati da to nije moguće.*

Zadatak 2.3 *Konstruirati raspade Ω^- čestice u Ξ^-, Ξ^0, Σ^0, i N čestice, praćene ostalim produktima jakog raspada. Nacrtati kvarkovski tijek i objasniti zašto se ti procesi ne opažaju.*

Zadatak 2.4 *Uobičajena, "trodimenzionalna" definicija brzine kao vremenske derivacije koordinate po "običnom" vremenu se u specijalnoj teoriji relativnosti zamjenjuje derivacijom po vlastitom vremenu $d\tau$ koje je jednako*

$$d\tau = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2}. \tag{2.319}$$

Izračunajte komponente četverobrzine i četveroimpulsa (količine gibanja), te uspostavite vezu između ukupne energije, mase mirovanja i kinetičke energije.
Rješenje : *Četverobrzina je definirana kao*

$$u^\mu \equiv dx^\mu / d\tau \tag{2.320}$$

gdje je

$$d\tau = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} \ . \tag{2.321}$$

Međutim,

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} \ , \tag{2.322}$$

pa se iz

$$(d\tau)^2 = (dt, d\vec{x}\,)^2 \tag{2.323}$$

dobije

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{(dt)^2 - (d\vec{x}\,)^2} = \sqrt{(dt)^2 - (d\vec{x}/dt)^2(dt)^2} && (2.324)\\ d\tau &= \sqrt{(dt)^2 - \vec{v}^2(dt)^2} = dt\sqrt{1-\vec{v}^2} = dt/\gamma \ . && (2.325)\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma \ . \tag{2.326}$$

Na taj način izraz (2.322) postaje

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \tag{2.327}$$

odnosno iz (2.320) dobijemo

$$u^\mu \equiv (dt, d\vec{x})/d\tau = (\gamma, \gamma \vec{v}) = \gamma(1, \vec{v}\,) \ . \tag{2.328}$$

Četveroimpuls je umnožak "mase mirovanja" i četverobrzine

$$p^\mu \equiv m_0 u^\mu = (\gamma m_0, \gamma m_0 \vec{v}\,) = (\gamma m_0, \vec{p}\,) \tag{2.329}$$

odakle očitamo ukupnu energiju

$$E = m = \gamma m_0 \ . \tag{2.330}$$

Valja napomenuti da će veličina m posvuda biti masa mirovanja (ovdje označena s indeksom "nula"), tj. da bude jasnije

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \ . \tag{2.331}$$

U sustavu mirovanja čestice je $\gamma = 1$ pa je $m = m_0$. Dalje je

$$(p^\mu)^2 = E^2 - \vec{p}^{\,2} = (\gamma m_0)^2 - (\gamma m_0 \vec{v}\,)^2 \tag{2.332}$$

$$= \gamma^2 m_0^2 (1 - \vec{v}^{\,2}) = m_0^2 \ , \tag{2.333}$$

odnosno

$$E^2 = m_0^2 + \vec{p}^{\,2} = m^2 \ . \tag{2.334}$$

S druge je strane ukupna energija jednaka zbroju energije mirovanja i kinetičke energije T, pa je

$$E^2 = (m_0 + T)^2 = m_0^2 + \vec{p}^{\,2} \tag{2.335}$$

ili

$$T = (m_0^2 + \vec{p}^{\,2})^{1/2} - m_0 \ . \tag{2.336}$$

Zadatak 2.5 *Pokazati da je četverobrzina okomita na četveroubrzanje.*
Rješenje : *Četverobrzina je dana izrazom*

$$u^\mu = \gamma(1, \vec{v}\,) \ , \tag{2.337}$$

a njen kvadrat je

$$(u^\mu)^2 = \gamma^2(1 - \vec{v}^{\,2}) = 1\ . \tag{2.338}$$

Četveroubrzanje je derivacija u^μ po vlastitom vremenu $d\tau$, tj.

$$a^\mu = \frac{d}{d\tau}u^\mu\ . \tag{2.339}$$

Deriviranjem izraza (2.338) dobijemo

$$\frac{d}{d\tau}(u^\mu)^2 = 0 = 2u^\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = 2u^\mu a_\mu\ , \tag{2.340}$$

pa je $u^\mu \perp a^\mu$.

Zadatak 2.6 *Pokazati da je četverovolumen invarijantan na Lorentzove transformacije.*
Rješenje : *Rezultat slijedi odmah iz Jakobijana transformacije*

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x \tag{2.341}$$

koji je determinanta matrice Lorentzove transformacije, tj.

$$d^4x' = |\det \Lambda^\mu{}_\nu|\, d^4x = d^4x\ . \tag{2.342}$$

Zadatak 2.7 *Ako je $p^\mu = (E, \vec{p})$, pokazati da je izraz d^3p/E relativistički invarijantan.*
Rješenje : *Neka je*

$$dp_x = dp'_x; \quad dp_y = dp'_y\ ; \tag{2.343}$$

$$dp_z = \gamma(dp'_z + vdE') = \gamma dp'_z(1 + \frac{vdE'}{dp'})\ . \tag{2.344}$$

Budući da je $p^2 = E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$ i $EdE = pdp$, tj.

$$\frac{dE'}{dp'_z} = \frac{p'_z}{E'} \tag{2.345}$$

i $E = \gamma(E' + vp'_z)$, dobijemo

$$dp_z = \gamma dp'_z(1 + v\frac{p'_z}{E'}) \cdot \frac{E'}{E'} = \gamma dp'_z(E' + vp'_z)\frac{1}{E'} = \frac{dp'_z}{E'} \cdot E \tag{2.346}$$

odnosno

$$\frac{dp_z}{E} = \frac{dp'_z}{E'}\ . \tag{2.347}$$

Zadatak 2.8 *Pokazati da vrijedi jednakost*

$$\frac{d^3p}{2E} = d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\Theta(p^0) \tag{2.348}$$

gdje je $\Theta(x)$ *jedinična* Heavisideova *funkcija.*
Rješenje : *Iz svojstva* δ *funkcije, gdje je argument funkcija od x*

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|f'(\bar{x}_i)|}\delta(x - \bar{x}_i) \tag{2.349}$$

za $f(\bar{x}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ *možemo napisati*

$$\int \delta(p^2 - m^2)dp_0 = \int \delta(p_0^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2)dp_0 \ . \tag{2.350}$$

Uz

$$\begin{aligned} \partial_{p_0}(p_0^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2) &= 2p_0 & (2.351) \\ p_0^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2 &= 0 & (2.352) \end{aligned}$$

slijedi

$$\bar{p}_0 = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \tag{2.353}$$

tako da je

$$\delta(p^2 - m^2)dp_0 = \int \frac{dp_0}{2p_0}\delta(p - p_0) = \frac{1}{2\bar{p}_0} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}} = \frac{1}{2E} \tag{2.354}$$

pa je

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3}dp_0\delta(p^2 - m^2) = \frac{d^4p}{(2\pi)^4}2\pi\delta(p^2 - m^2) \ . \tag{2.355}$$

Θ *funkcijom osiguravamo pozitivnost rješenja korijena* $\bar{p}_0$.

Zadatak 2.9 *Čestica se raspada na druge dvije. U sustavu* S *prema kojem se raspadajuća čestica giba brzinom* 0.8 c *mjeri se kutna raspodjela. Nađeno je da prva čestica (prvi produkt raspada) izlijeće pod kutom od* 15^0 *mjereno prema smjeru brzine raspadajuće čestice, a da je smjer drugog produkta raspada okomit na prvi. Naći kut među česticama u sustavu mirovanja raspadajuće čestice.*
Rješenje : *U sustavu* S *je*

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{s}{a} = \frac{s}{a_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{s}{a_0}\frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \ , \tag{2.356}$$

a u sustavu mirovanja čestice

$$\mathrm{tg}\,\theta_1' = \frac{s}{a_0}\ . \tag{2.357}$$

Budući da je

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \mathrm{tg}\theta_1' \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} \tag{2.358}$$

dobijemo da je $\theta_1' = 9°7'\,59''$ *te je stoga*

$$\mathrm{tg}\theta_2 = \mathrm{tg}\theta_2' \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}\ , \tag{2.359}$$

odnosno $\theta_2' = 6.94$ *ili* $\theta_1' + \theta_2' = 75°4'\,0.7''$.

Zadatak 2.10 *Provjerimo da nehomogene Maxwellove jednadžbe imaju relativistički zapis* $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ *(2.189).*
Rješenje : *Uz identitet* $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jki'} = 2\delta_{ii'}$ *dobivamo* $\epsilon_{ikj}\epsilon_{jki'}B^{i'} = -\epsilon_{ijk}F^{jk} = 2B$. *Dakle*

$$\begin{aligned} \vec{E} \to E^i &= F^{i0} = -\nabla^i A^0 - \partial^0 A^i \to -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} && (2.360)\\ \vec{B} \to B^i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left[-\nabla^j A^k + \nabla^k A^j\right] \to \nabla \times \vec{A}, && (2.361)\end{aligned}$$

odakle dalje slijedi

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\frac{\partial}{\partial t}E^i + \partial_j \epsilon^{ijk} B^k\ . \tag{2.362}$$

Na kraju, sumirano

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} && (2.363)\\ \partial_i F^{i0} = \nabla \cdot \vec{E} &= \rho\ . && (2.364)\end{aligned}$$

Zadatak 2.11 *Pokazati da simetrični tenzor (2.279) slobodnog elektromagnetskog polja*

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda \left(F^{\mu\lambda} A^\nu\right) \tag{2.365}$$

daje energiju $T^{00} = (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)/2$ *i Poyntingov vektor s komponentama* $T^{i0} = (\vec{E} \times \vec{B})^i$.

Zadatak 2.12 *Pokazati da su operatori* $L^2_{\mu\nu}$ *i* $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}L_{\mu\nu}L_{\rho\sigma}$ *Casimirovi operatori Lorentzov egrupe, ali ne i pune Poincaréove grupe.*